

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

বিস্মিল্লাহির রাহমানির রাহীম



উদ্দাম

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

একাদশ শ্রেণি: উচ্চতর গণিত (অধ্যায়-০১)

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
LECTURE- HM 01

সমীকরণ সমাধান

সমাধান করঃ

$$\begin{cases} \bullet x+y=5 \\ \bullet x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \text{ (i)} \\ x-y=1 \text{ (ii)} \end{cases}$$

$$(i) + (ii) \Rightarrow 2x = 6 \\ \Rightarrow x = 3$$

$$(i) - (ii) \Rightarrow 2y = 4 \\ y = 2 \\ (x, y) = (3, 2)$$

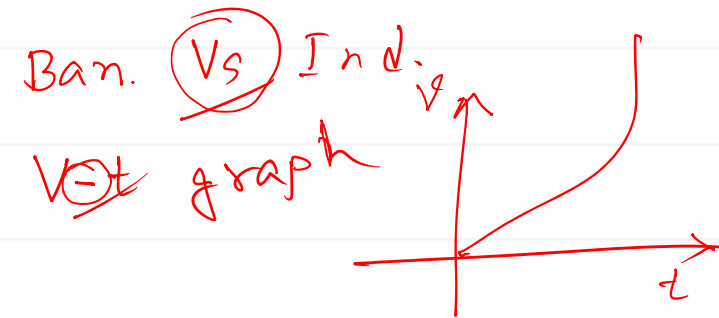
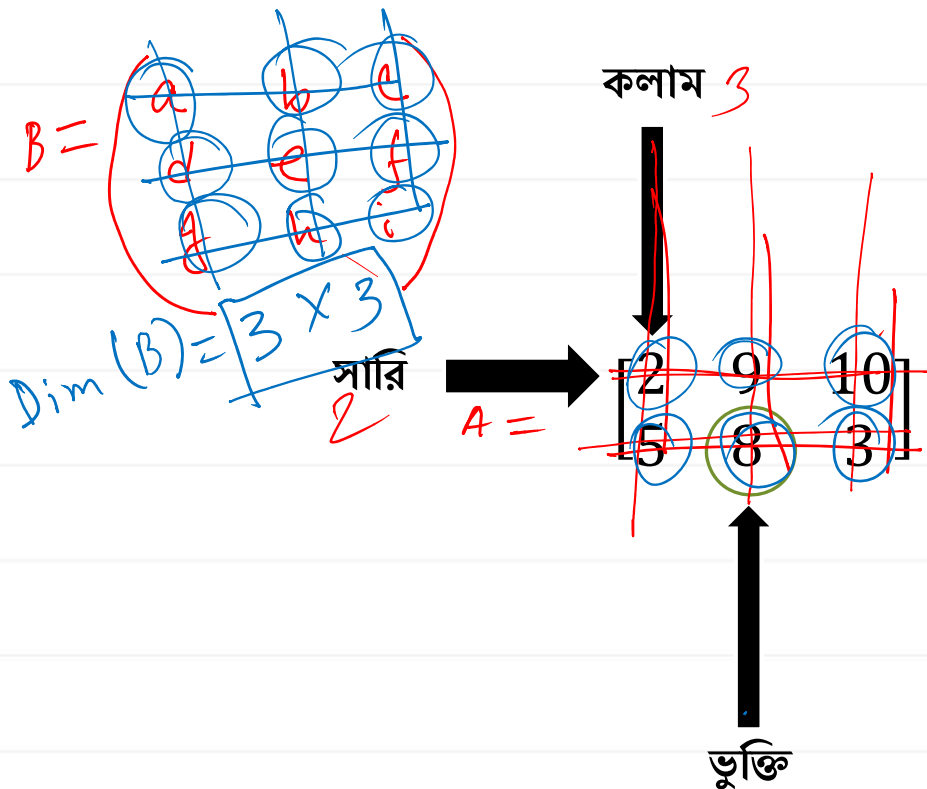
সমাধান করঃ

$$\begin{cases} \bullet 2x+y-2z=10 \\ \bullet 3x+2y+2z=1 \\ \bullet 5x+4y+3z=4 \end{cases}$$

ম্যাট্রিক্স

নির্দিষ্ট সংখ্যক সারি (m) ও কলামে (n) বিন্যস্ত কিছু সংখ্যার আয়তাকার সংগ্রহ কে ম্যাট্রিক্স ($m \times n$) বলে, এবং এর মাত্রা ধরা হয় $m \times n$ (সারি $\times$ কলাম)

মাত্রা/Dim/order/ক্রম = no. of row $\times$ no. of column



$\text{Dim}(A) = 2 \times 3$

not a multiplication operator

ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ

প্রকার	ব্যাখ্যা	উদাহরণ
১. আয়তাকার ম্যাট্রিক্সঃ	$\text{Dim}(A) = \underline{2} \times \underline{3}$ no. of row $\neq$ no. of column $\hookrightarrow$ <u>Rect. Matrix</u>	$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 16 & 13 & 6 \end{bmatrix}$ # row = 2 # column = 3
২. সারি ম্যাট্রিক্সঃ <u>Row Matrix</u>	no. of row = 1 $\hookrightarrow$ <u>Row Matrix</u>	$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ # Row = 1
৩. কলাম ম্যাট্রিক্সঃ <u>column Mat:</u>	no. of column = 1 $\hookrightarrow$ <u>column Matrix</u>	$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix}$ # column = 1

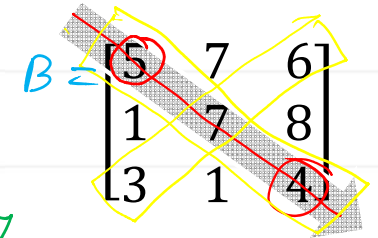
ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ

কিছু প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

✓ বর্গ ম্যাট্রিক্সঃ

no. of row = no. of column.

✓ মুখ্য কর্ণঃ



✓ ট্রেসঃ

$$\text{Trace}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\text{Trace}(B) = 5 + 7 + 4 = 16$$

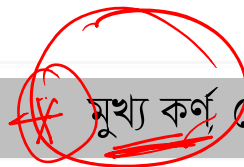
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 9 & x & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Trace}(C) = 9$$

$$x = ?$$

$$1 + x + 5 = 9$$

$$\Rightarrow x = 9 - 6 = 3$$



মুখ্য কর্ণ ট্রেস থাকতে হলে অবশ্যই ম্যাট্রিক্স টিকে বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে

Poll Question-01

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & X & -7 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস 7 হলে X এর মান কত?

7

~~X~~

(a) -1

(b) 5

(c) 1

(d) 4

$$2 + X + 4 = 7$$

$$\Rightarrow X = 7 - 6$$

$$X = 1$$

Ans

ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদঃ

প্রকার	ব্যাখ্যা	উদাহরণ
১. বর্গ ম্যাট্রিক্সঃ	no. of row = no. of column ↳ Square Matrix	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 9 & 7 & 9 \\ 13 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 3x3 মুখ্য কর্ণ
২. কর্ণ ম্যাট্রিক্সঃ Diagonal matrix!	মুখ্য-কর্ণ-বরাবর দাঁড়ি অংশ যদি দাঁড়ি = 0	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
৩. স্কেলার ম্যাট্রিক্সঃ Scalar	মুখ্য কর্ণ-বরাবর দাঁড়ি সূচক সমান	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2+0=2 2x1=2
৪. অভেদক বা ইউনিট ম্যাট্রিক্সঃ Identity	মুখ্য-কর্ণ-বরাবর দাঁড়ি-সূচক = 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Poll Question-02

নিচের কোনটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স?

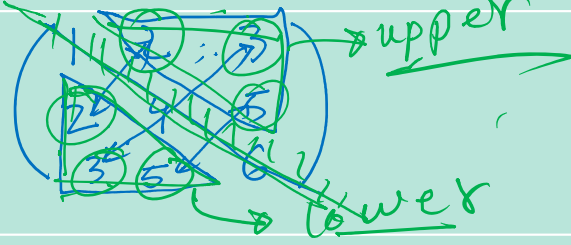
(a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) a & c

ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ

প্রকার	ব্যাখ্যা	উদাহরণ
১. শূন্য ম্যাট্রিক্সঃ <u>Null Matrix!</u>	প্রত্যেকের $0 = 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
২. রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সঃ <u>Transpose / ট্রান্স ম্যাট্রিক্স!</u>	A^T, A^t, A' Row $\rightarrow$ Column Column $\rightarrow$ Row $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$
৩. প্রতিসম ম্যাট্রিক্সঃ <u>Symmetric Matrix!</u>		$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ upper lower
৪. বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সঃ <u>Skew Symmetric Matrix!</u>	$-A^T = A$ $\rightarrow A \rightarrow$ skew symmetric Matrix $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \therefore -A^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = A$	$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Poll Question-03

নিচের কোনটি বক প্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

~~(a)~~ $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -6 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

~~(b)~~ $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

~~(c)~~ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
3x2

$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ -d & b & f \\ -e & -f & c \end{pmatrix}$

$-A^T = \begin{pmatrix} -a & +d & +e \\ -d & -b & -f \\ -e & -f & -c \end{pmatrix}$

For MCQ

skew sym matrix
স্বতন্ত্র-বাক্য-ম্যাট্রিক্স
হেরিফি = 0

$+a = -a \Rightarrow a = 0$
 $+b = -b \Rightarrow b = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{+x = -x}$
 $\Rightarrow 2x = 0$
 $\Rightarrow x = 0$

$\boxed{-1 = +1}$ (-1)

ম্যাট্রিক্স এর সমতা

দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হওয়ার শর্তঃ

- ম্যাট্রিক্স দুটির আকার/মাত্রা সমান হতে হবে
- ম্যাট্রিক্স দুটির অনুরূপ ভুক্তিগুলো পরস্পর সমান হতে হবে

$$\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2 × 2 2 × 2

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ a &= 3 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Poll Question-04

$$\begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x \\ 8 & 3x \end{bmatrix} \text{ হলে } x, y \text{ এর মান কত?}$$

2×2 2×2

~~(a) 4, 3~~

✓ (b) 2, 3

~~(c) 3, 2~~

(d) 2, 4

$$x = 2$$

$$\begin{aligned} 2y &= 3x \\ \Rightarrow 2y &= 3 \times 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

ম্যাট্রিক্স এর যোগ ও বিয়োগ

ম্যাট্রিক্সের যোগ বা বিয়োগের প্রধান শর্ত হচ্ছে অবশ্যই ম্যাট্রিক্স দুইটিকে সমান আকার/মাত্রারিশিষ্ট হতে হবে

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

2×3

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2×3

যোগঃ প্রথম ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তিগুলোর সাথে পরের ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ ভুক্তিগুলোর যোগ

$$A+B = \begin{pmatrix} a+1 & b+2 & c+3 \\ d+4 & e+5 & f+6 \end{pmatrix}$$

বিয়োগঃ প্রথম ম্যাট্রিক্স এর প্রতিটি ভুক্তি থেকে পরের ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ ভুক্তি বিয়োগ

অনুশীলনী ১.১

৬। $A = \begin{bmatrix} \underline{8} & \underline{4} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} \underline{-4} & \underline{6} & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $A+B$, $A-B$ নির্ণয় করো।

H.W.

কাজ

$A+B$, $A-B$ নির্ণয় করো

$A+B$, $A-B$

$$\text{১। } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{২। } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স এর গুণন

প্রথম প্রকারঃ
স্কেলার সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্সের গুণন

নিয়ম স্কেলার সংখ্যা দ্বারা প্রতিটি ভুক্তি গুণ

১। $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ হলে $2A$ নির্ণয় করো।

Solⁿ: দেওয়া আছে, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$\therefore 2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 10 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Ans.

কাজ

১। $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ হলে $3A+4B$ নির্ণয় করো।

$3A = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$ $4B = \left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$

২। $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে $3A-5B$ নির্ণয় করো।

ম্যাট্রিক্স এর গুণন

দ্বিতীয় প্রকারঃ
দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন

শর্তঃ প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা ও দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হতে হবে

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স এর গুণন

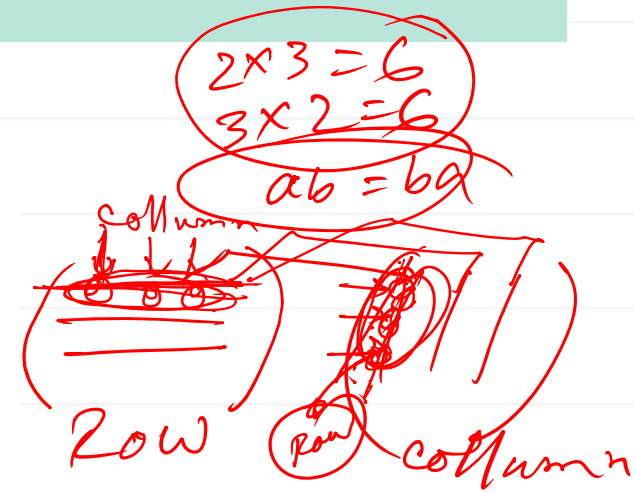
যদি A ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times n$ হয় এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times p$ হয়, তাহলে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times p$ হবে।

$A_{m \times n} \quad B_{n \times p}$

i) $AB \rightarrow$ সম্ভব হবে যদি $n = p$ হয়
 $m \times n \quad n \times p$
 $\otimes \quad \text{Dim}(AB) = m \times p$

ii) $BA \rightarrow$ সম্ভব হবে যদি $n = m$
 $p \times n \quad m \times n$
 $\text{Dim}(BA) = p \times n$

যদি $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = P$ হয়



Copyright © 2003
 Elizabeth Stapel
 All Rights Reserved

অনুশীলনী ১.১

১। $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে $AB \neq BA$

$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \times 0 + 2 \times 1 + 9 \times 0 \\ -2 \times 0 + 5 \times 1 + 3 \times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$

$\text{Dim}(AB) = 2 \times 2$

$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

হলে দেখাও যে $AB \neq BA$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \times 5 + 7 \times (-2) & 0 \times 2 + 7 \times 5 & 0 \times 9 + 7 \times 3 \\ 1 \times 5 + 2 \times (-2) & 1 \times 2 + 2 \times 5 & 1 \times 9 + 2 \times 3 \\ 0 \times 5 + (-5) \times (-2) & 0 \times 2 + (-5) \times 5 & 0 \times 9 + (-5) \times 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -14 & 35 & 21 \\ 1 & 12 & 15 \\ 10 & -25 & -15 \end{pmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$
shown

কাজ

১। দেয়া আছে $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ দেখাও যে $(AB)C = A(BC)$

২। যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$2AB = 2(A \cdot B)$$

$$B^2 = B \cdot B$$

Poll Question-05

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং $A^2 + 2A - kI = 0$ হলে k এর মান কত? যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) 11

(b) 10

(c) 8

(d) 13

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A \cdot A \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 4 & 1 \times 2 + 2 \times (-3) \\ 4 \times 1 + (-3) \times 4 & 4 \times 2 + (-3) \times (-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^2 + 2A - kI &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} &= 0 \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\
 k &= 11
 \end{aligned}$$

লেগে থাকো সৎভাবে,
স্বপ্ন জয় তোমারই হবে

উদ্ভাস-উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

