بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

বিস্‌মিল্লাহির রাহ্‌মানির রাহীম

উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

Lecture- HM 02

নির্ণায়কঃ

নির্ণায়ক হচ্ছে বিশেষ আকারে লিখিত বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা রাশি বা স্কেলার মান।

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Poll Question-01

নিচের কোন ম্যাট্রিক্স টির নির্ণায়ক সম্ভব নয়?

(a) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(b) অভেদক ম্যাট্রিক্স

(c) সারি ম্যাট্রিক্স

(d) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নির্ণায়ক এর অনুরাশিঃ

একটি m*m আকারের নির্ণায়কের একটি ভুক্তি a_{ij} যদি i-তম সারি ও j-তম কলামে অবস্থান করে তবে i-তম সারি ও j-তম কলামের সকল ভুক্তি বাদ দিয়ে নির্ণায়কের বাকি ভুক্তিগুলো দ্বারা গঠিত (m-1)*(m-1) আকারের নির্ণায়ককে (i,j)-তম অনুরাশি বলে।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

নির্ণায়ক এর সহগুণকঃ

যথাযথ চিহ্ন (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সহ অনুরাশিকে সহগুণক বলে।

(i,j)-তম অনুরাশির ক্ষেত্রে সহগুণকের চিহ্ন হবে $(-1)^{i+j}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

অবস্থানভেদে চিহ্নঃ $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Poll Question-02

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 25 & 1 \\ 4 & 12 & 6 \end{vmatrix}$ এর (2,3)-তম সহগুণক কত ?

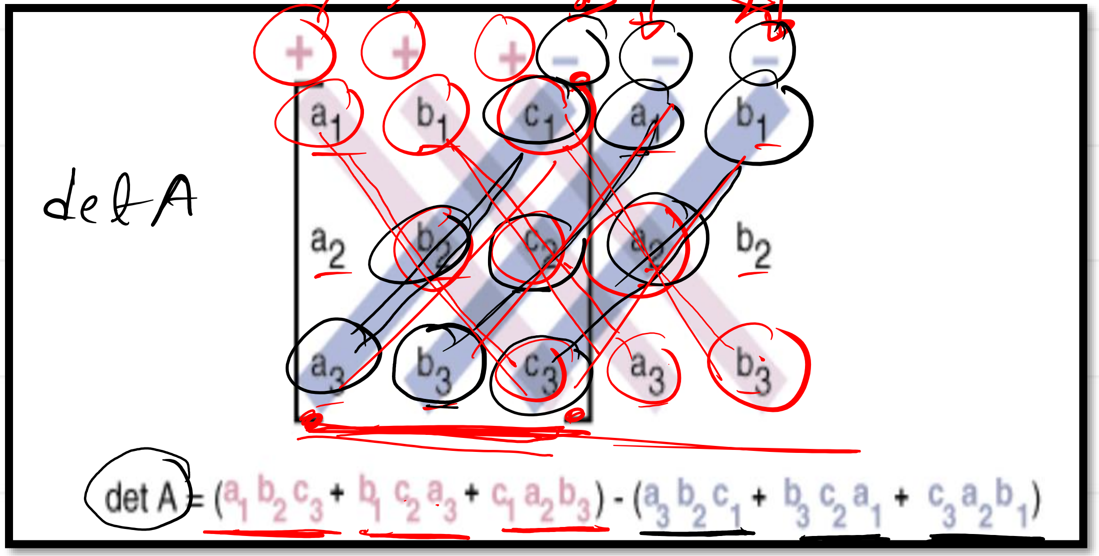
(a) 4 (b) -2 (c) 6 (d) -4

উদ্ভাস উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

নির্ণায়ক এর মানঃ

যেকোনো সারি/কলাম বরাবর নির্ণায়ক বিস্তৃত করে মান নির্ণয় করা যায়।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 b_2 - a_2 b_1$$

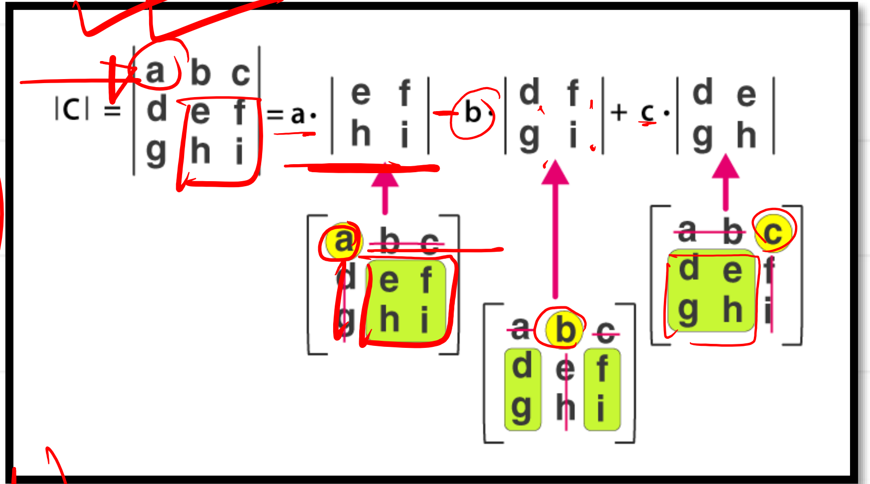


$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3 + a_3 b_2 c_1)$$

নির্ণায়ক এর মানঃ

যেকোনো সারি/কলাম বরাবর নির্ণায়ক বিস্তৃত করে মান নির্ণয় করা যায়।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$ {প্রথম সারি}

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$ {প্রথম কলাম}

Poll Question-03

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ এর মান কত ?

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 0

$2 \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 0) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

কাজঃ

মান নির্ণয় করোঃ

1(i). $\begin{vmatrix} 16 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 7 \\ 17 & 6 & 10 \end{vmatrix}$

1(ii). $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

1. কোনো নির্ণায়কের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে রূপান্তর করলেও নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

সারি → কলাম
কলাম → সারি

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$b_3c_2 = c_2b_3$

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

2. কোনো নির্ণায়কের যেকোনো দুইটি সারি বা দুইটি কলাম স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উচ্ছ্বাস উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

3. কোনো নির্ণায়কের দুইটি সারি বা দুইটি কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য (০) হবে।

same সমান

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$$

$$|A|_{exchange} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -D$$

১ম কলাম–২য় কলাম exchange

$$|A| = |A|_{exchange}$$

$$D = -D$$

$$\Rightarrow 2D = 0$$

$$\Rightarrow D = 0$$

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

4. কোনো নির্ণায়কের যেকোনো সারি/কলামের প্রতিটি ভুক্তিকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে ঐ নির্ণায়কের মানকেও একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়।

$$(1)\quad |A| = \begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$LHS = ma_1A_1 + mb_1B_1 + mc_1C_1 = m(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1)$$

$$= m \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = R.H.S.$$

উচ্ছ্বাস উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

5. কোনো নির্ণায়কের যেকোনো দুইটি সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলো পরস্পরের সমানুপাতিক হলে ঐ নির্ণায়কের মান শূন্য (০) হবে।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1st row

m X 1st row

সমানুপাতিক

$$= m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

same

$$= m \times 0 = 0$$

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

6. কোনো নির্ণায়কের একটি সারি/কলামের প্রতিটি ভুক্তি যদি দুইটি ভুক্তির সমষ্টিরূপে গঠিত হয় তবে ঐ নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + p & b_1 & c_1 \\ a_2 + q & b_2 & c_2 \\ a_3 + r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 + p)A_1 + (a_2 + q)A_2 + (a_3 + r)A_3$$

$$= (a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3) + (pA_1 + qA_2 + rA_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

উদ্ভাস উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

অনুশীলনী ১.২

১৮। প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

L.H.S $= \begin{vmatrix} 1 & x-a & y \\ 1 & x_1-a & y_1 \\ 1 & x_2-a & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x-a & b \\ 1 & x_1-a & b \\ 1 & x_2-a & b \end{vmatrix}$ $= 0$

$\dfrac{1 \quad 1 \quad 1}{b \quad b \quad b}$ সমানুপাতিক

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y \\ 1 & a & y_1 \\ 1 & a & y_2 \end{vmatrix}$ $= 0$

$\dfrac{1 \quad 1 \quad 1}{a \quad a \quad a}$ সমানুপাতিক

$=$ R.H.S.

নির্ণায়ক এর ধর্মাবলিঃ

7. কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের ভুক্তিগুলোকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোনো সারি বা কলামের অনুরূপ ভুক্তিগুলোর সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 \pm mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$L.H.S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{mb_1 \quad mb_2 \quad mb_3}{b_1 \quad b_2 \quad b_3}$$ সমানুপাতিক

0

$= R.H.S$

অনুশীলনী ১.২

৫। প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

C_3'

$\begin{bmatrix} C_3' = C_3 - C_2 \\ C_2' = C_2 - C_1 \end{bmatrix}$ $(p^2 - p)$

$LHS = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p^2-p \\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix}$

$= 1 \left(+ \begin{vmatrix} p-1 & p^2-p \\ p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} (p-1) & p(p-1) \\ (p^2-1) & p^2(p^2-1) \end{vmatrix}$

$= (p-1)(p^2-1) \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & p^2 \end{vmatrix} = p(p-1)(p^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p(p-1)(p^2-1)(p-1)$

$= p(p-1)^2(p^2-1) = R.H.S.$

অনুশীলনী ১.২

৯। প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix} = (ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)$

OOP

$[R_3' = R_3 - (xR_1 + yR_2)]$

$= \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ 0 & 0 & -(ax^2+2bxy+cy^2) \end{vmatrix}$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(ax^2+2bxy+cy^2)\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

$= -(ax^2+2bxy+cy^2)(ac-b^2)$ = R.H.S

কাজঃ

প্রমাণ করো যে,

6(b). $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\,(c-a)$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

10. $\begin{vmatrix} b^2+a^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

19. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix} = (xyz-1)(x-1)(y-1)(z-1)$

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

Poll Question-04

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ এর মান কত ?

(a) $4(a-b)(b-c)(c-a)$

(b) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(c) $abc(a-b)(b-c)(c-a)$

(d) $4(a+b)(b+c)(c+a)$

প্র্যাকটিস প্রবলেম

১৫। প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

উচ্ছ্বাস U উন্মেষ
শিক্ষা পরিবার

লেগে থাকো সৎভাবে,
স্বপ্ন জয় তোমারই হবে

উদ্ভাস-উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

THANK YOU