



দ্বাদশ শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

লেখকচাঁর : HM-08

অধ্যায় ৫ : দ্বিপদী উপপাদ্য



$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেন্দ্র



www.udvash.com

Poll Question 01

$(x + 4y^3)^{100}$ এর বিস্তৃতিতে সকল সহগের যোগফল নির্ণয় কর।

(i) $^{100}C_2 * 4^{100}$

(ii) 4^{100}

~~(iii) 5^{100}~~

(iv) $^{100}C_2 * 5^{100}$

$(1 + 4 \cdot 1^3)^{100}$
 $= (1 + 4)^{100}$
 $= 5^{100}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $1 + 2 + 1$
 $= 4$
 $(1+1)^2 = 2^2 = 4$

Du mcr
 $(a+b-c)^{10}$
 $= (1+1-1)^{10}$
 $= 1^{10}$
 $= 1$

অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতি:

$$(a+b)^n = a^n + nC_1 a^{n-1} b + nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots$$

n টি অংক
সুপারিশ

$$n=10 \left\{ \begin{array}{l} 10C_1 \\ 10C_2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$nC_1 = \frac{n}{n(n-1)}$$

$$nC_2 = \frac{2!}{n(n-1)(n-2)}$$

$$nC_3 = \frac{3!}{n(n-1)(n-2)}$$

$$n = -2 \left\{ \begin{array}{l} -2C_1 \\ -2C_2 \\ \vdots \end{array} \right. \times$$

$$n = \frac{3}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} C_1 \\ \frac{3}{2} C_2 \end{array} \right. \times$$

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots$$

n-তম অংক
২য় অংক

অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতিঃ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3(3-1)}{2!}x^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{3!}x^3 + \frac{3(3-1)(3-2)(3-3)}{4!}x^4 + \frac{3(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)}{5!}x^5$$

$$= 1 + 3x + \frac{3 \cdot 2}{2!}x^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}x^3 + 0 + 0$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$n = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) (\frac{1}{2} - 2) \dots$$

$$n = -2 \quad (-2) (-2-1) (-2-2) \dots$$

অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতিঃ

n এর মান যদি ∞ / অসীম হয়, $(1+x)^n$ = সীম

$(1-x)^{3/2}$ \rightarrow $(1-x)^n$ = সীম

$$|x| < 1$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\boxed{-1 < x < 1}$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-1-1)}{2!} (-x)^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} (-x)^3 + \dots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \infty$$

$n = -1$
 $x = -x$

$$r = \frac{x}{1-x} = x$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$$= (1-x)^{-1}$$

অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতিঃ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

ধারাটিকে অসীম দ্বিপদী ধারা বলা হয়, যেখানে-

- (i) n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ব্যতীত অন্য যেকোন মূলদ সংখ্যা
- (ii) $|x| < 1$ বা $-1 < x < 1$

n সাত ভগ্নাংশ/সংখ্যা

$$|x| < 1$$

$$\boxed{-1 < x < 1}$$

MCA

5.1
 $n \rightarrow$ ভগ্নাংশ
 মূলদ সংখ্যা

5.2
 $n \rightarrow$ ভগ্নাংশ/সংখ্যা
 মূলদ সংখ্যা

$n \in \mathbb{Q}$ কিন্তু n স্বাভাবিক সংখ্যা নয়, সেক্ষেত্রে $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিঃ

(i) $|a| > |x|$ হলে, $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$:

$$(a + x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2 + \dots$$

$n \in \mathbb{Q}$ কিন্তু n স্বাভাবিক সংখ্যা নয়, সেক্ষেত্রে $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতি:

(i) $|a| < |x|$ হলে, $\left|\frac{a}{x}\right| < 1$:

$$(a + x)^n = xn \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n = xn + n a xn^{-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \dots$$

অসীম ধারায় দ্বিপদী বিস্তৃতির অভিসৃতিঃ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

ধারাটিতে n এর মান ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ধারাটি সসীম। কিন্তু n এর মান ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হলে $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$ এর মান শূন্য হতে পারে না। সেক্ষেত্রে ধারাটি অসীম ধারা হবে।

ধারাটির সসীম যোগফল থাকা বা অভিসারী হবার শর্তঃ $|x| < 1$ বা $-1 < x < 1$

Poll Question 02

$(1 - \frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতি অভিসারী হতে হলে আবশ্যিক শর্ত কোনটি?

(a) $x > 8$

(b) $x < 8$

~~(c) None~~

Type-1: 1, 2, 3(a), 10-15

১. x এর মান কত হলে, x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে $\frac{1}{(8-3x)^{1/2}}$ এর বিস্তৃতি বৈধ হবে।

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(8-3x)^{1/2}} \\ &= (8-3x)^{-1/2} \\ &= \left\{ 8 \left(1 - \frac{3x}{8} \right) \right\}^{-1/2} \\ &= 8^{-1/2} \left(1 - \frac{3x}{8} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3x}{8} \right| < 1 \\ & -1 < \frac{3x}{8} < 1 \\ & -\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3} \end{aligned}$$

✓ চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি করঃ $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= x (a^2-x^2)^{-1/2}$$

$$= x \left\{ a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right\}^{-1/2}$$

$$= x (a^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{-1/2}$$

$$= x a^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{x}{a} \left[1 + (-1/2) \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!} \left(-\frac{x^2}{a^2} \right)^2 + \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!} \left(-\frac{x^2}{a^2} \right)^3 + \dots \right]$$

$$\begin{cases} n = -1/2 \\ x = -\frac{x^2}{a^2} \end{cases}$$

৩. দেখাও যে, $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{(2r)!}{(r!)^2 2^r}$

$$\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}}}{(r+1)\text{তম পদ}} =$$

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}$$

$$\text{সহগ} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\dots(-\frac{2r-1}{2})(-2)^r}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)) (-1)^r \cdot 2^r}{2^r r!}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2r-1) \cdot 2r}{r! (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r)} (-1)^{2r}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} x^r$$

$$(-2x)^r \left[\begin{array}{l} x = -2x \\ n = -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} - r + 1 \\ = \frac{-1 - 2r + 2}{2} \\ = \frac{-2r + 1}{2} \\ = -\frac{2r-1}{2} \end{array} \right\}$$

2^n

$$= \frac{(2n)!}{n! \left\{ \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{3} \cdots \binom{2}{n} \right\}} (-1)^{2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)} (+1)$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n \cdot n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$

A

কিছু প্রয়োজনীয় ধারাঃ

$$(i) (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^r + \dots \quad \infty$$

$$\underline{(-1)} (1-x)^{-1-1} \quad \underline{(0-1)} = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + \underline{\underline{\pi x^{\pi-1}}} + \dots$$

$$\Rightarrow (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + \underline{\underline{\pi x^{\pi-1} + (\pi+1)x^\pi}} + \dots \infty$$

কিছু প্রয়োজনীয় ধারাঃ

(ii) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^r x^r + \dots$

$(1-x)^{-1} \rightarrow x^r$
 $(1-x)^{-2} \rightarrow (r+1)x^r$
 $(1-x)^{-3} \rightarrow \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$

✓ (iii) $(1-x)^{-2} = \underline{1} + \underline{2x} + \underline{3x^2} + \underline{4x^3} + \dots + \underline{(r+1)x^r} + \dots$

$(-2)(1-x)^{-2-1} (0-1) = 0 + 2 + 6x + 12x^2 + \dots + (r+1) \cdot r x^{r-1} + \dots$

$2(1-x)^{-3} = 2 + 6x + 12x^2 + \dots + (r+1)r x^{r-1} + \dots$

$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + \dots + \frac{1}{2}(r+1)r x^{r-1} + \frac{1}{2}(r+2)(r+1)x^r$

কিছু প্রয়োজনীয় ধারাঃ

(iv) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (r + 1)(-1)^r x^r + \dots$

Du mca

$(1-x)^{-3}$ এর সিরিজ
 x^{100} এর সহগ
কত?

✓ (iii) $(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{1}{2}(r + 1)(r + 2) x^r + \dots$

$\frac{1}{2}(100+1)(100+2)$
 $= \frac{1}{2} \cdot 101 \cdot 102$
 $= 101 \times 51$
 $= \underline{\underline{5151}}$

x^{100}

Type-2: 6

8. দেখাও যে, $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + 2x + 3x^2 + \dots) = \frac{1}{2}(1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + \dots)$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{L.H.S}}} &= (1-x)^{-1} (1-x)^{-2} \\ &= (1-x)^{-3} \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{2} (1.2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots) \end{aligned}$$

৫. $y = x + x^2 + x^3 + \dots$ হলে দেখাও যে, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots$

[Most important type]

$$y = x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow 1 + y = \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}{1 - x}$$

$$\Rightarrow 1 + y = (1 - x)^{-1}$$

$$\Rightarrow (1 - x) = (1 + y)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots$$

$$\Rightarrow -x = -y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots$$

$$\Rightarrow x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} a^3 &= b \\ a &= b^{1/3} \end{aligned}$$

~~উ.~~ $y = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 - \dots$

$$1+y = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots$$

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots$$

$$\Rightarrow (1+y) = (1-x)^{-2}$$

$$\Rightarrow (1-x) = (1+y)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow 1-x = 1 + (-1/2)y + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}y^2 + \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!}y^3 + \dots$$

৭. $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$ হলে দেখাও যে, $x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - \dots$

Type-3: 3(b,c) , 4 ,5 ,7,17-22,26,27

৮. $\frac{2x+1}{1+x^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

✓ ৯. দেখাও যে, $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n

$$\begin{aligned} & \frac{(1+x)^n (1-x)^{-1}}{=} (1 + nC_1 x + nC_2 x^2 + \dots + nC_n x^n) \\ & \quad (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n) \\ x^n \text{ এর সহগ} &= 1 + nC_1 + nC_2 + \dots + nC_n \\ &= 1 + 2^n - 1 \\ &= \underline{\underline{2^n}} \end{aligned}$$

Dul

$\frac{1+x}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ ?

$$\begin{aligned} &= (1+x) (1-x)^{-1} \\ &= (1+x) [1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + \dots] \\ \therefore x^n \text{ এর সহগ} &= 1 + 1 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

✓ ১০. দেখাও যে, $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ $3^{r+1} - 2^{r+1}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-5x+6x^2} \\
 = & \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} \\
 = & \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} \\
 & \begin{array}{l} \downarrow 1-3x=0 \\ 3x=1 \\ x=1/3 \\ \hline \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow 1-2x=0 \\ 2x=1 \\ x=1/2 \\ \hline \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{l} \frac{1}{1-2 \cdot 1/3} \\ = \frac{1}{1/3} \\ = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{1-3 \cdot 1/2} \\ = \frac{1}{1-3/2} \\ = \frac{1}{-1/2} = -2 \end{array} \\
 & = 3(1-3x)^{-1} - 2(1-2x)^{-1} \\
 & = 3 \left[1 + 3x + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots \right] \\
 & \quad - 2 \left[1 + 2x + (2x)^2 + \dots + (2x)^n + \dots \right] \\
 x^r \text{ সহগ} & = 3 \cdot 3^r - 2 \cdot 2^r \\
 & = 3^{r+1} - 2^{r+1}
 \end{aligned}$$

১১. $(1 - x + x^2 - x^3)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^4 এর সহগ নির্ণয় কর।

আংশিক ভগ্নাংশঃ

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x - \beta)^2(px^2 + \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \beta)^2} + \frac{C}{(x - \beta)} + \frac{Dx + E}{\beta x^2 + \gamma}$$

Poll Question 03

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = ?$$

(a) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

(b) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$

~~(c) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$~~

(d) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

$$1-x=0 \\ x=1$$

$$1+x=0 \\ x=-1$$

Type-4: $\frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

১২. দেখাও যে, $\frac{1}{(1-x)(3-x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{2}}{3-x}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1-x)^{-1} - \left\{ 3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) \right\}^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1-x)^{-1} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots) \right]$$

$$- \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \dots \right)$$

$$x^n \text{ এর সহগ} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right]$$

$\frac{x^n}{3^n}$

$x=1$

$x=3$

$$= \frac{1}{2} \left[(1-x)^{-1} - (3-x)^{-1} \right]$$

Type-5: 9

১৩. ① $1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots = ?$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$nx = \frac{1}{3} \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} x^2 = \frac{1.3}{3.6} \quad \text{--- ②}$$

মানবান ধরে,

$$n =$$

$$x =$$

$$\begin{aligned} \text{মানবান} &= (1+x)^n \\ &= (1+\square)^{\square} \\ &= \square \end{aligned}$$

$$১৪. 1 + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{2.5.1}{1.2.34} + \frac{2.5.8.1}{1.2.3.36} + \dots = ?$$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে

$$X = caP \frac{V^2}{2S}$$

$$X = caP \frac{V^2}{2S}$$

$$E = mc^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

www.udvash.com