



৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : HM-07

অধ্যায় ৩.১ : জ্যামিতি

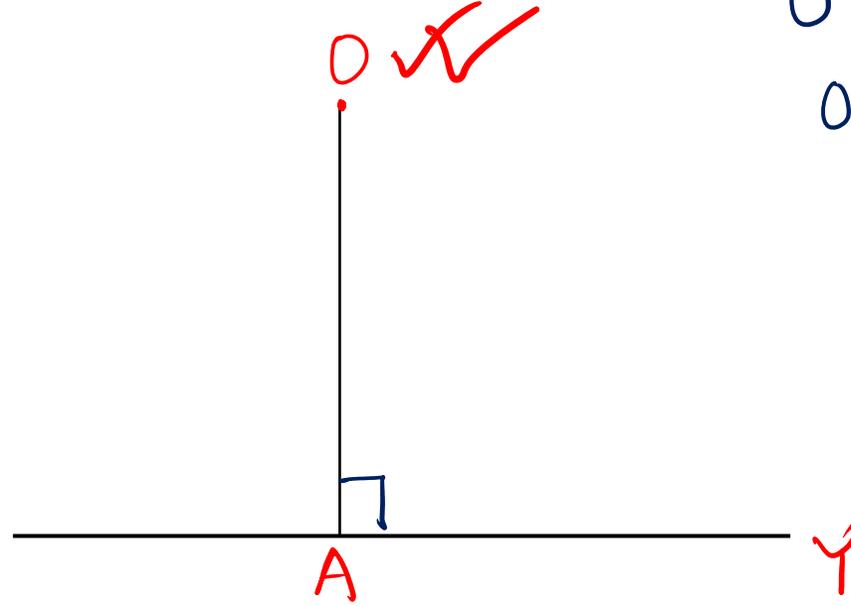
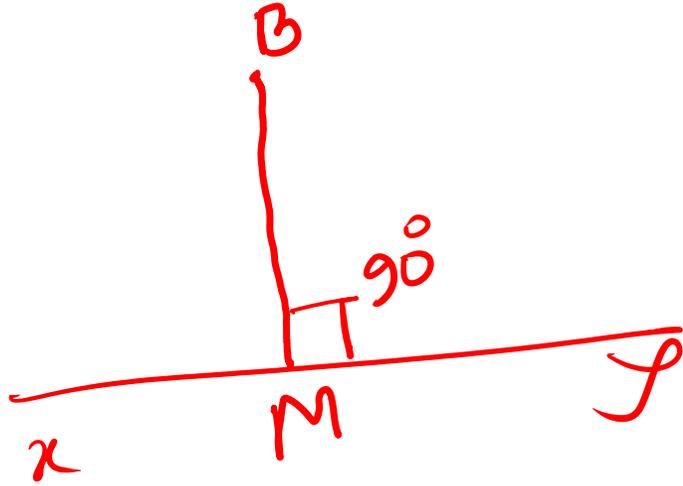


$$x = \sqrt{\frac{6^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ

কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ হলো সেই বিন্দু থেকে সেই রেখার উপর আঁকা লম্বের পাদবিন্দু।



B বিন্দুটির
লম্ব অভিক্ষেপ M

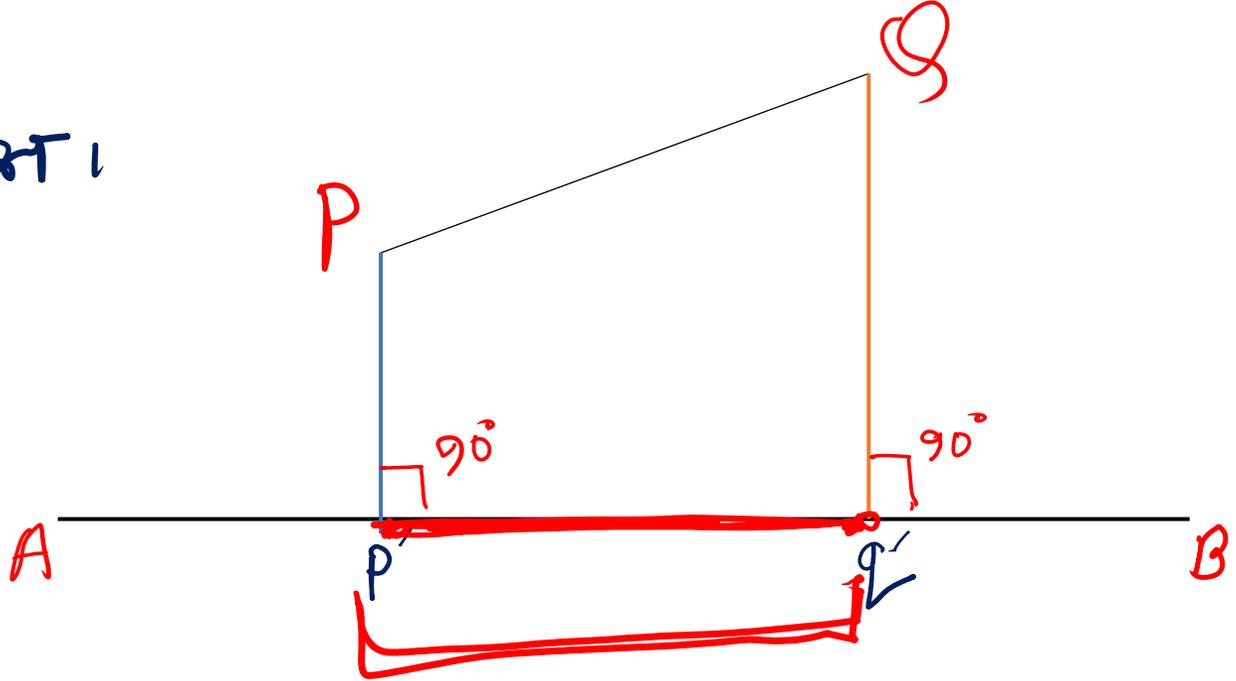
O → একটি বিন্দু
OA হলো XY সরলরেখার
উপর- লম্ব
A → লম্বের-পাদবিন্দু

অতএব **O** বিন্দুটির
লম্ব অভিক্ষেপ
A বিন্দুটি।

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ

কোনো নির্দিষ্টরেখার উপর কোনো রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ হলো রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় থেকে রেখার উপর আঁকা লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ।

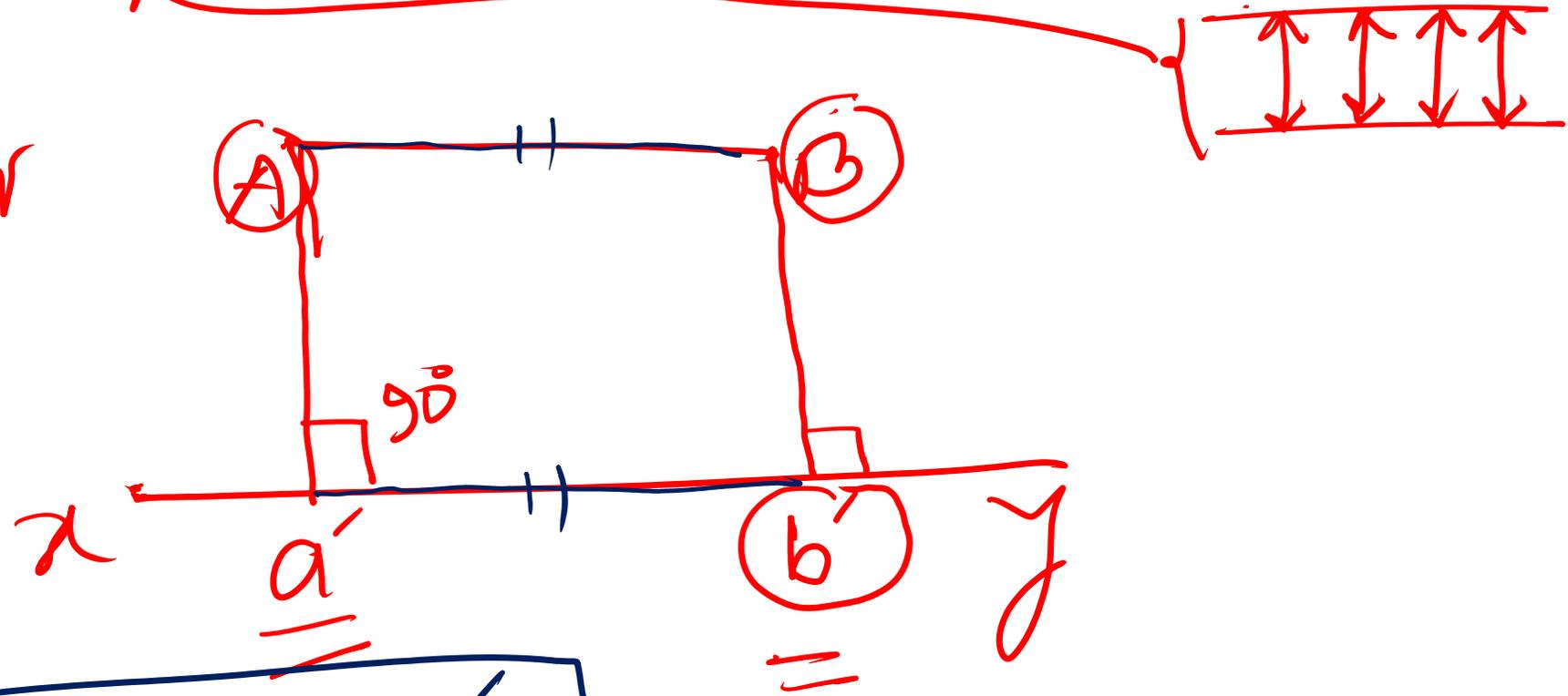
পে রেখাংশের লম্ব
অভিক্ষেপ হবে পে রেখাংশ।



Important Topic

- রেখাংশটি যদি নির্দিষ্টরেখার সমান্তরাল হয়, তাহলে রেখাংশটির লম্ব অভিক্ষেপ রেখাংশটার দৈর্ঘ্যের সমান হবে

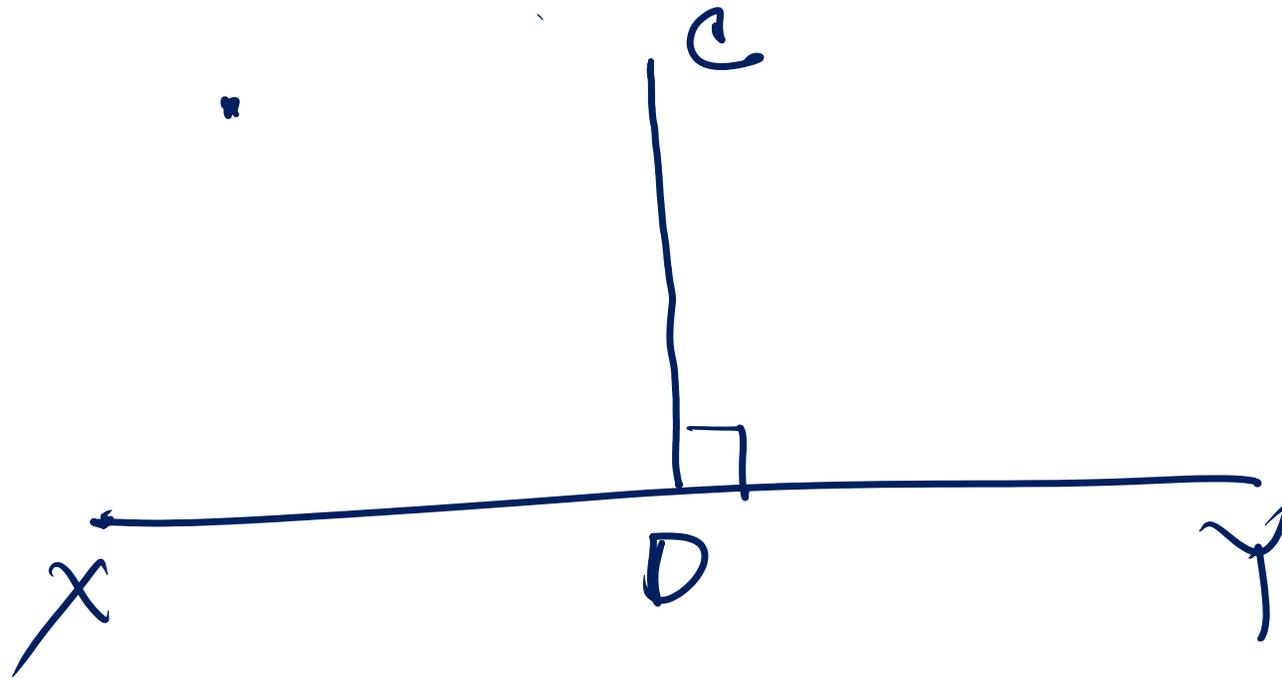
AB হইবে
লম্ব অভিক্ষেপ
a'b'



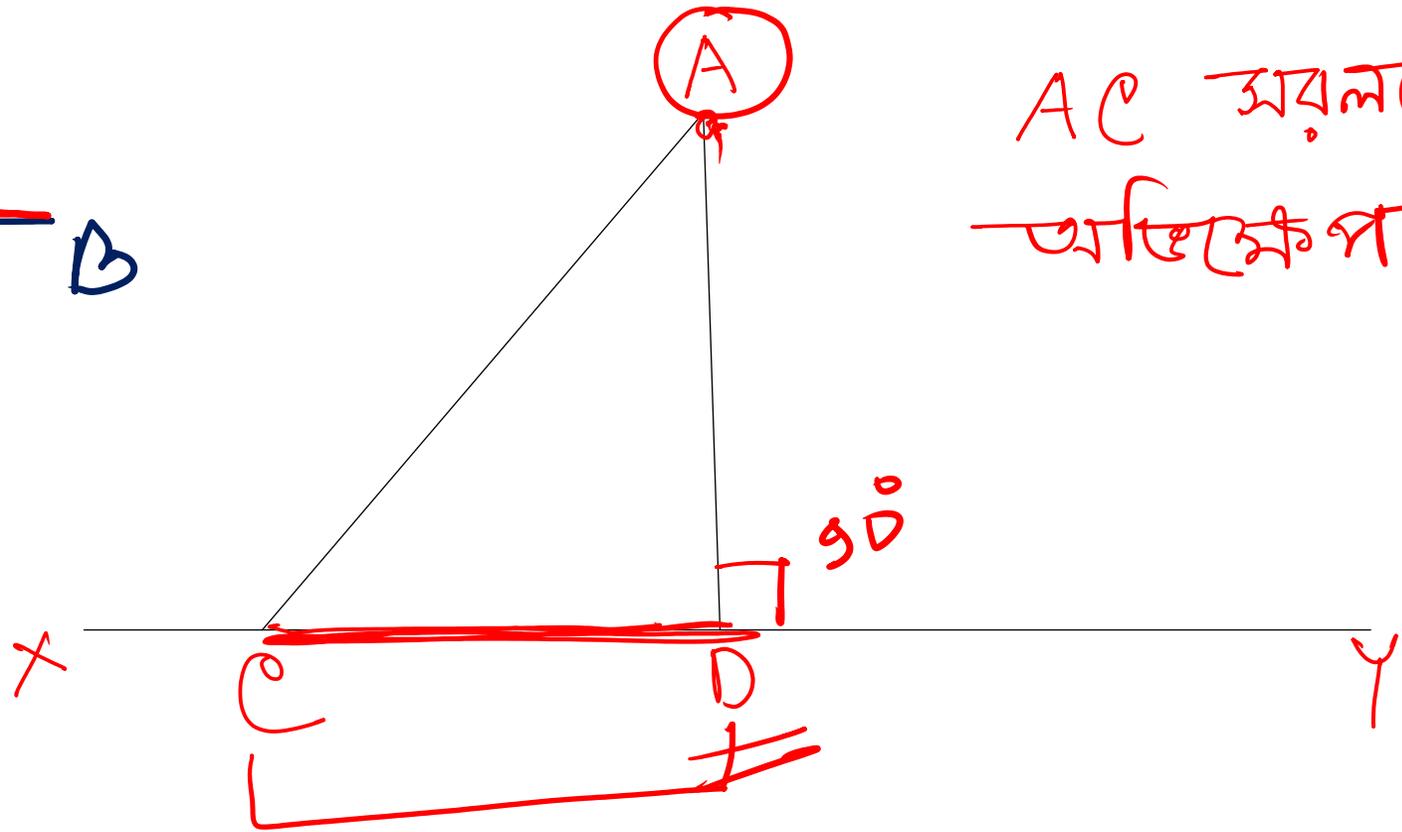
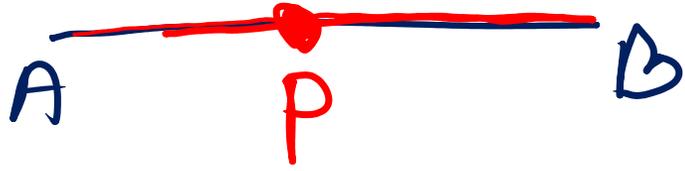
$$AB = a'b'$$

Important Topic

- রেখাংশটি যদি নির্দিষ্টরেখার উপর লম্ব হয়, তাহলে রেখাংশটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য তথা এক বিন্দুর সমান হবে



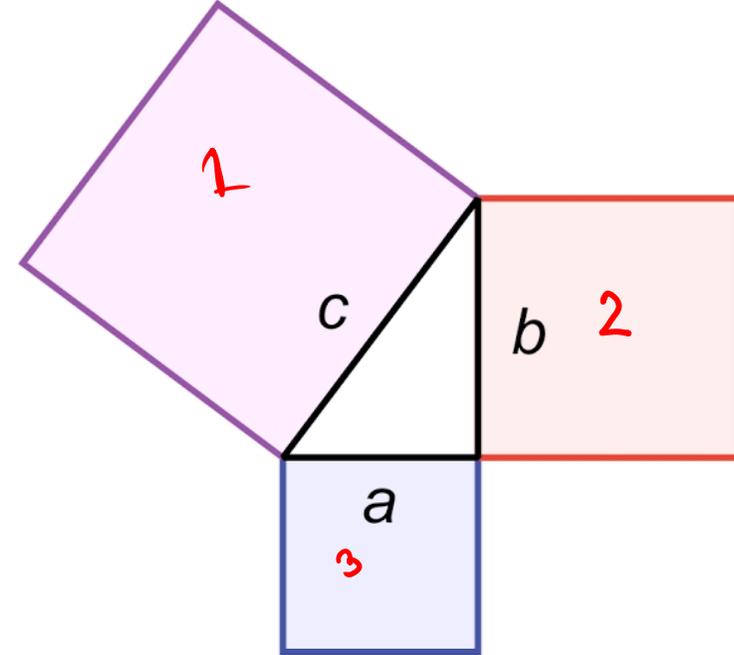
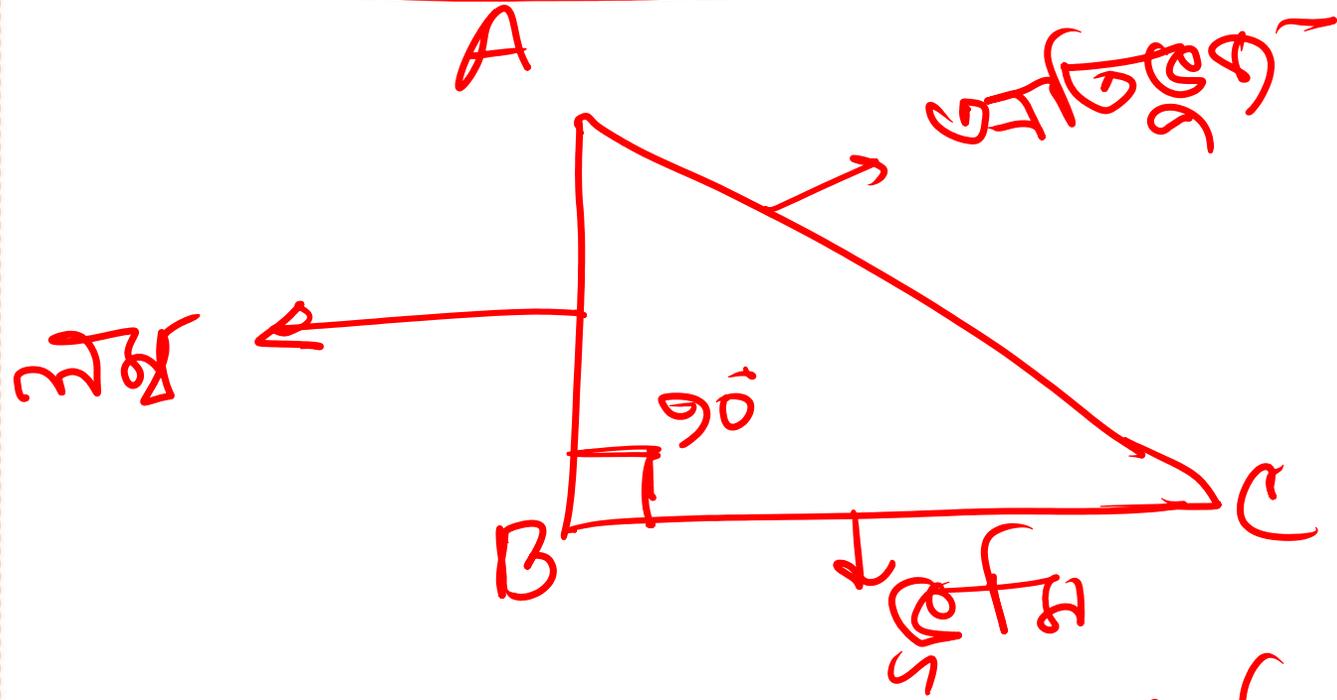
$CD \perp XY$



AC অর্ধলম্বিত্বের জন্য
অঙ্কিত = CD

উপপাদ্য ১ (ফিরে দেখা পিথাগোরাসের উপপাদ্য)

বিবৃতিঃ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান

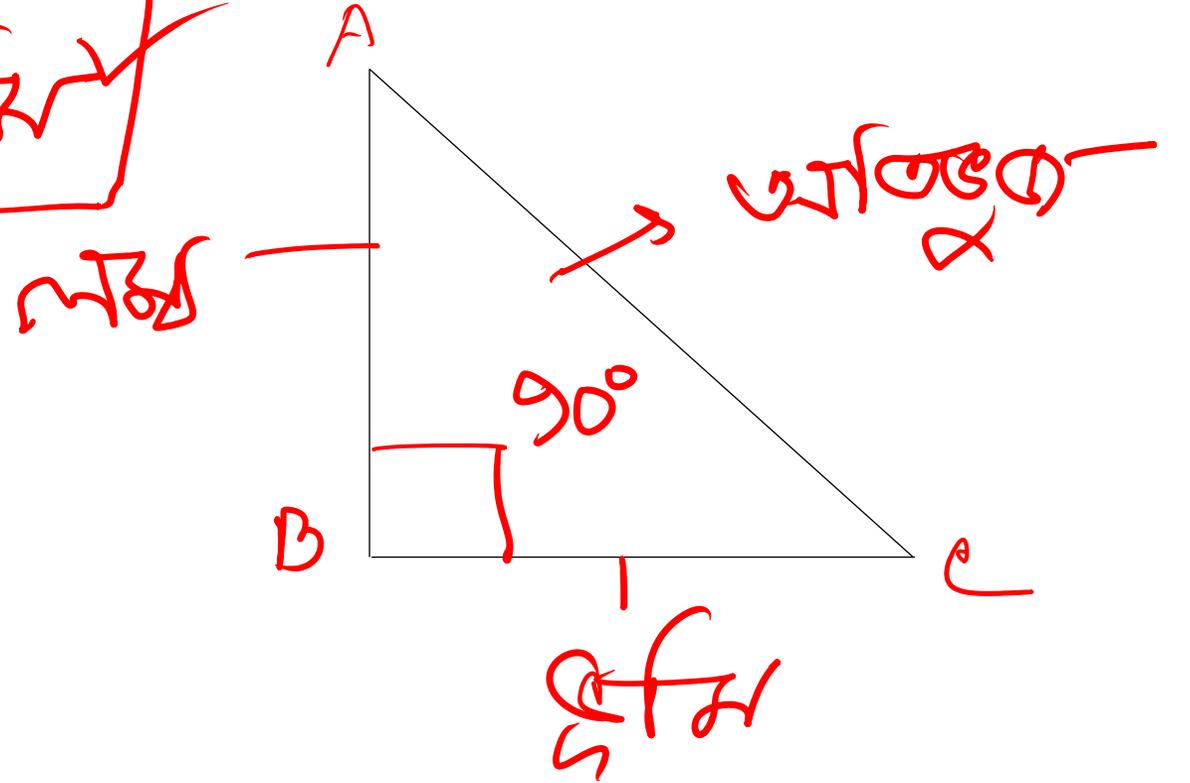


$$\Rightarrow \text{অতিভুজ}^2 = \text{অক্ষ}^2 + \text{ক্রমি}^2$$

উপপাদ্য ২ (বিপরীত উপপাদ্য)

বিবৃতিঃ কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।

$$a^2 = b^2 + c^2$$

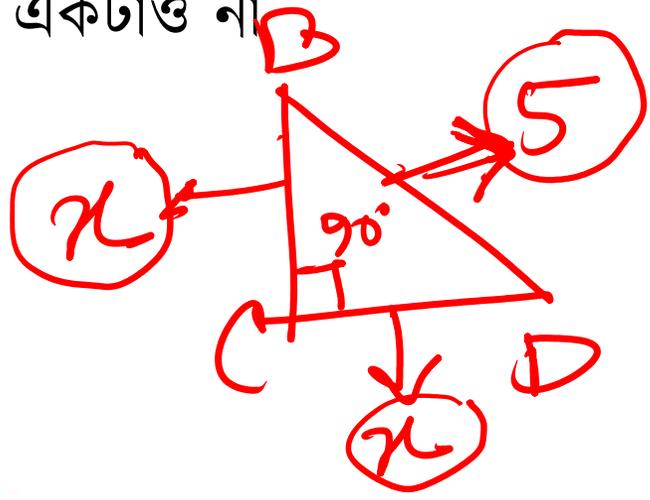
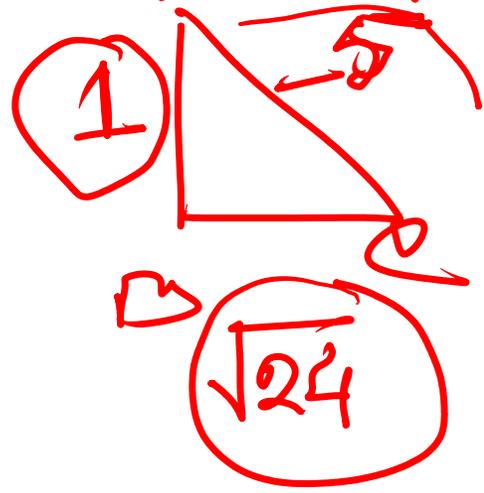
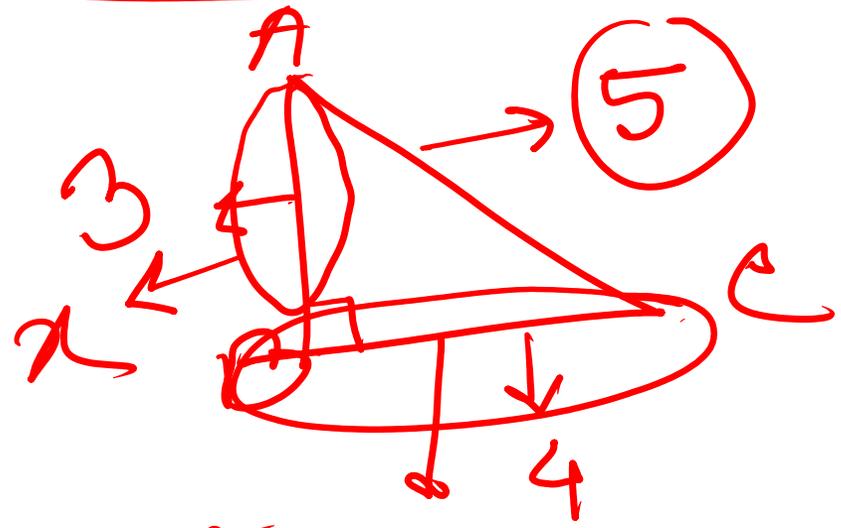


Poll Question 02

$2x^2 = 25$
 $\Rightarrow 2x^2 = 5^2$
 $\Rightarrow x^2 = \frac{5^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{2}}$
 $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

অতিভুজ ৫ সেঃমিঃ হবে, এমন কতগুলো সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা যাবে?

- (a) ১ টা
- (b) ২ টা
- (c) অসংখ্য
- (d) একটাও না



$3^2 + 4^2 = 5^2$

$BC^2 = AC^2 - AB^2$

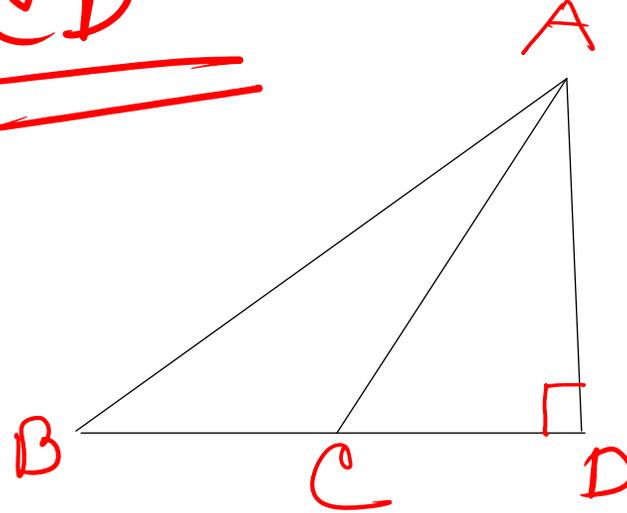
$x = ?$

$BC^2 + CD^2 = 5^2$
 $x^2 + x^2 = 5^2$
 $\Rightarrow 2x^2 = 25$

উপপাদ্য ৩ (স্থূলকোণ উপপাদ্য)

বিবৃতিঃ স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান

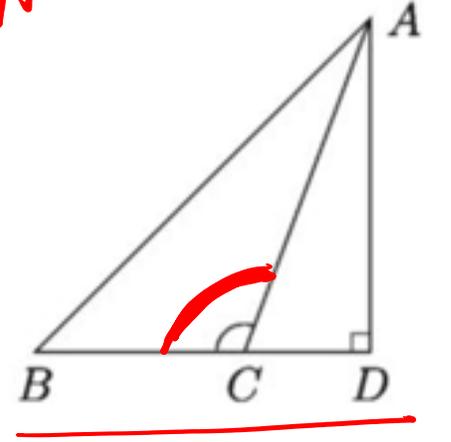
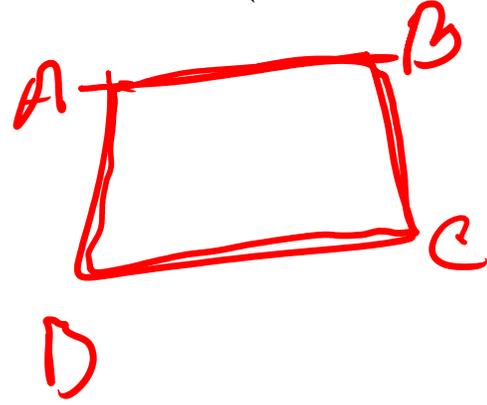
$$AC \text{ বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ} = \underline{\underline{ED}}$$



প্রমাণঃ

বিশেষ নির্বচন: মনে করি ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় BC ও AC ।

AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD । প্রমাণ করতে হবে যে,
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$



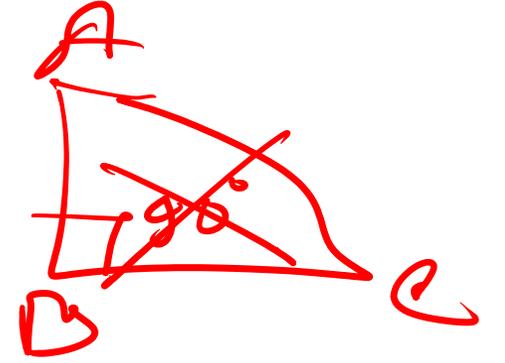
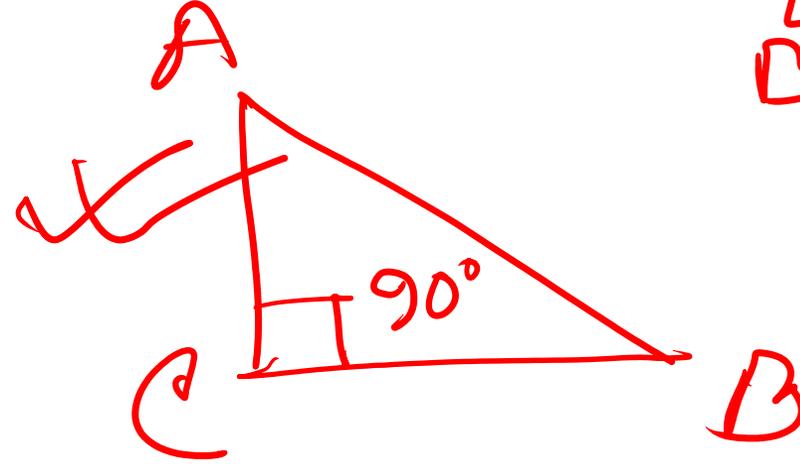
$$BD = BC + CD$$

- 1 → প্রমাণ: $\triangle ABD$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ ।
সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে
- 2 → $AB^2 = AD^2 + BD^2$
- 3 → $= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]
- 4 → $= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$
- 5 → $\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$ (1)
- 6 → আবার $\triangle ACD$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ ।
 $\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ (2)
- 7 → (2) নং সমীকরণ হতে $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই ।
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$ [প্রমাণিত]

Poll Question 03

কোনো ত্রিভুজ ABC তে যদি ACB কোণটি সমকোণ হয়, তাহলে-

- a) $AB^2 > AC^2 + BC^2$
- b) $AB^2 = AC^2 + BC^2$
- c) $AB^2 < AC^2 + BC^2$
- d) None

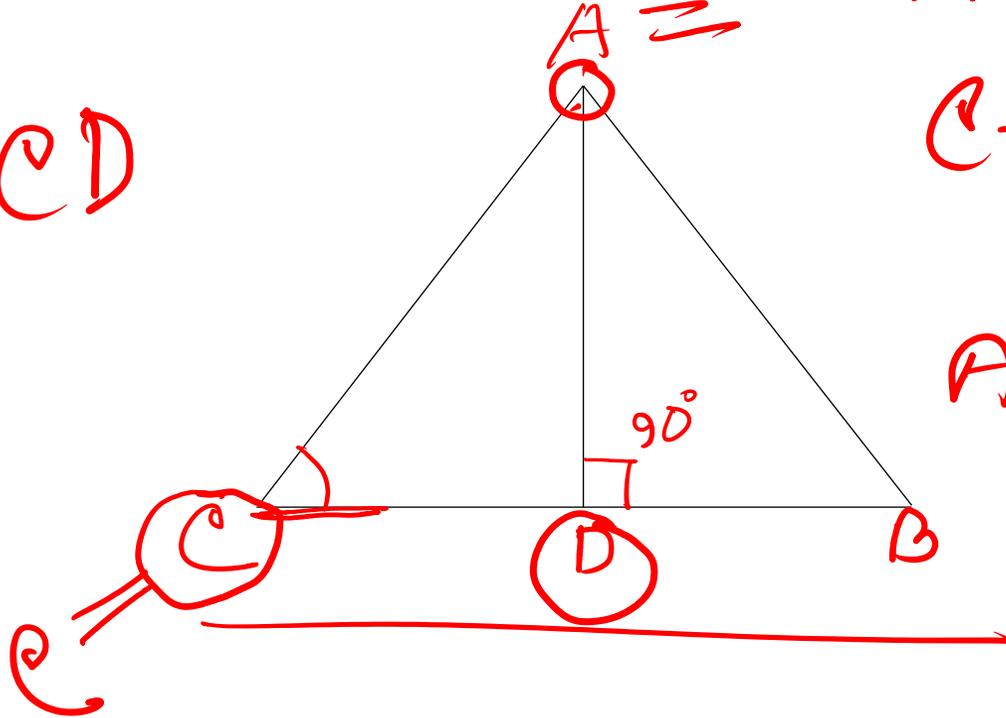


$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

উপপাদ্য ৪ (সূক্ষ্মকোণ উপপাদ্য)

বিবৃতিঃ যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

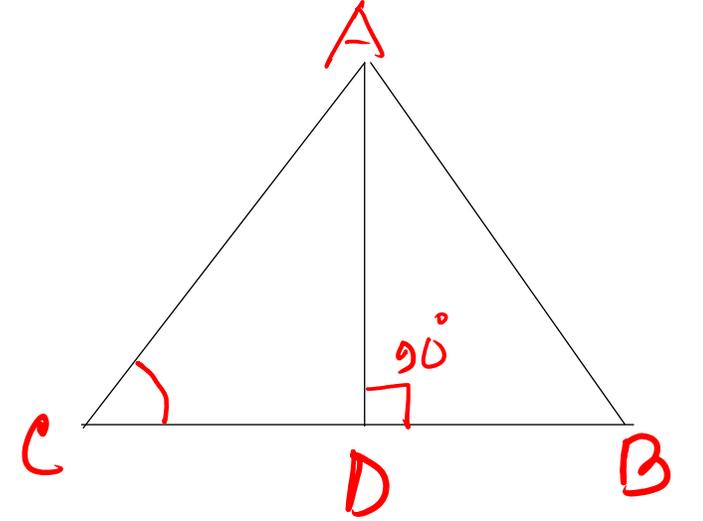
AC বাহুর উপর
লম্ব অভিক্ষেপ = ED



অন্যভাবে
 $A \rightarrow D$
এ-এর লম্ব
অভিক্ষেপ E
AE-এর
লম্ব অভিক্ষেপ
ED

প্রমাণঃ

বিশেষ নির্বচন: ΔABC ত্রিভুজের $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB । অপর দুই বাহু AC ও BC । AC বাহুর উপর লম্ব অভিক্ষেপ CD প্রমাণ করতে হবে যে $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ ।



1 → প্রমাণ: $\angle ADB$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।
∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (1)

2 → উপরের বামের চিত্রে $BD = BC - CD$ ।

3 → ∴ $BD^2 = (BC - CD)^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ (2)

4 → এখন সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাওয়া যায়,
বা, $AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$

5 → $AD^2 + CD^2 = AC^2$

6 → ΔADC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ।
∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $AC^2 = AD^2 + CD^2$

7 → $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ [প্রমাণিত]

$$BD + CD = BC \\ \Rightarrow BD = BC - CD$$

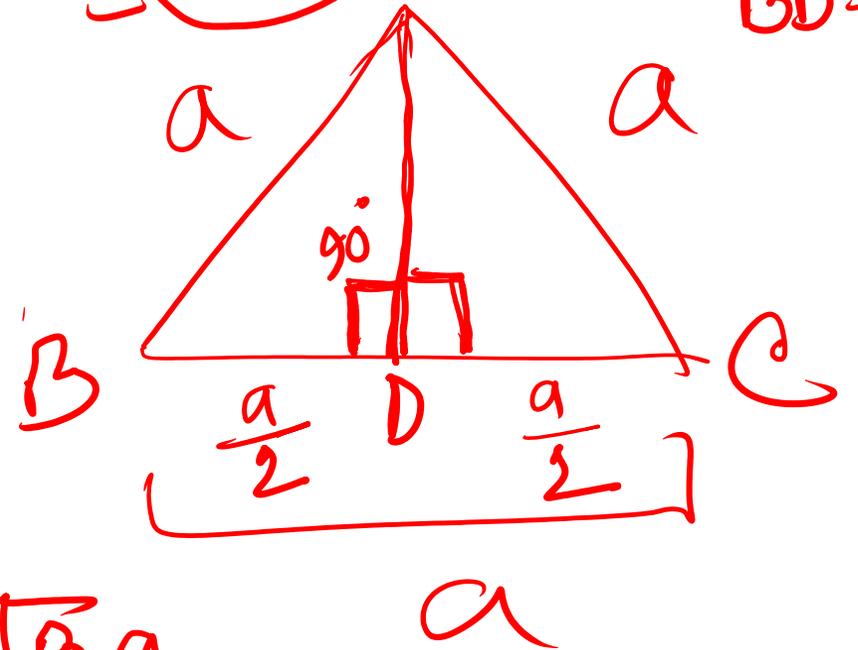
Poll Question 04

কোনো সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে-

- (a) মধ্যমা ও বাহুর অনুপাত $\sqrt{3}:1$ ✗
- (b) কোণগুলো সম্পূর্ণ ✗
- (c) মধ্যমা লম্বদ্বিখণ্ডক হিসেবে থাকে ✓✓
- (d) কোনোটিই নয়

$$\frac{\text{মধ্যমা AD}}{\text{বাহু AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \sqrt{3}:2$$

$AB = a$
 $BC = a$
 $AC = a$
 $BD = \frac{a}{2}$



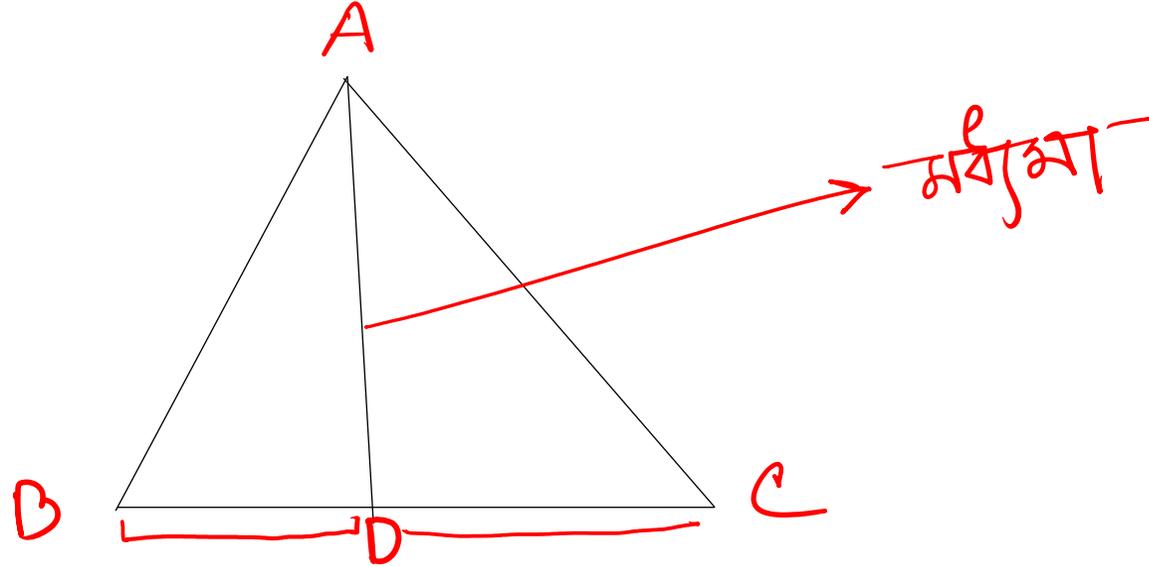
$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$a^2 = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

উপপাদ্য ৫ (এপোলোনিয়াসের উপপাদ্য)

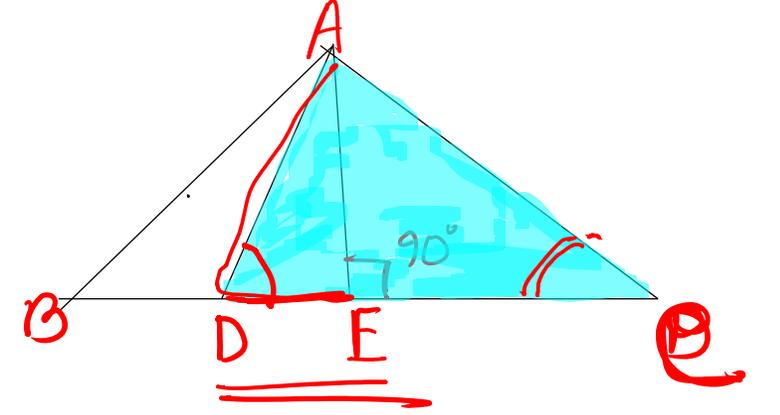
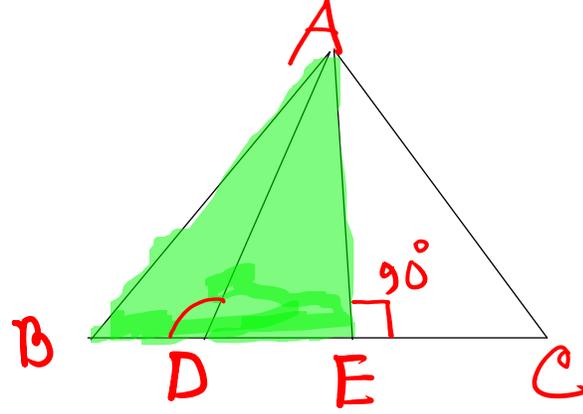
বিবৃতিঃ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।



প্রমাণঃ

বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ।

$$BD = DC$$



- 1 $\rightarrow AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2 \cdot BD \cdot DE \dots \dots \dots (1)$
- 2 \rightarrow এখন, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD রেখার লম্ব লভিক্ষেপ DE।
সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে [উপপাদ্য 8] আমরা পাই,
- 3 $\rightarrow AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot CD \cdot DE \dots \dots \dots (2)$
- 4 \rightarrow এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,
 $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2 \cdot BD \cdot DE - 2 \cdot CD \cdot DE$
 $= 2AD^2 + 2BD^2 [\because BD = CD]$
- 5 $\rightarrow \therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ [প্রমাণিত]

Fun Fact #1

মনে করি, ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c। BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f।

$$\begin{aligned} AD &= d \\ BE &= e \\ CF &= f \end{aligned}$$

তাহলে, এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

1 $\rightarrow AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

2 \rightarrow বা, $e^2 + b^2 = 2\left(d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$ $[\because BD = \frac{1}{2}a]$

3 \rightarrow বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

4 \rightarrow বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

5 \rightarrow বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

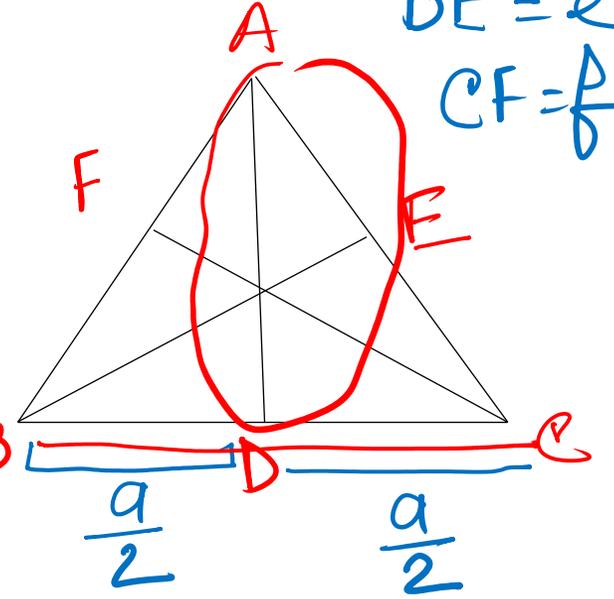
6 \rightarrow অনুরূপভাবে পাওয়া যায়, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

সুতরাং বলা যায় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাসমূহের দৈর্ঘ্য জানা যায়।

7 \rightarrow আবার, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

8 \rightarrow অর্থাৎ, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

9 $\rightarrow \therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$



না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে

$$X = caP \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

$$X = caP \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

$$E = mc^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার