بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

বিস্‌মিল্লাহির রাহ্‌মানির রাহীম

উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

নবম শ্রেণি

উচ্চতর গণিত

অষ্টম অধ্যায়ঃ ৮.১ (ত্রিকোণমিতি)

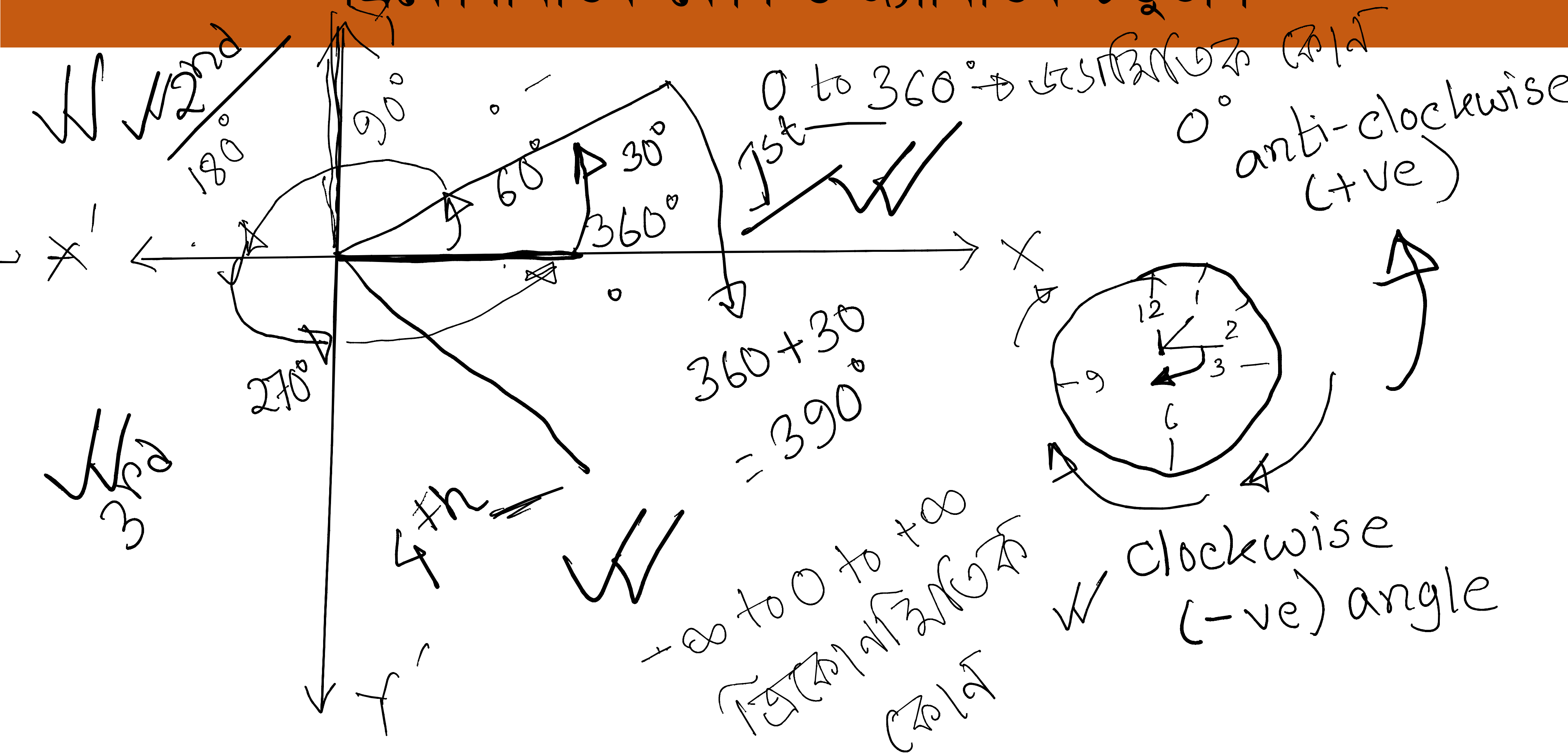
LECTURE-HM 12

Mashrur Ahmed

ত্রিকোণমিতি!!

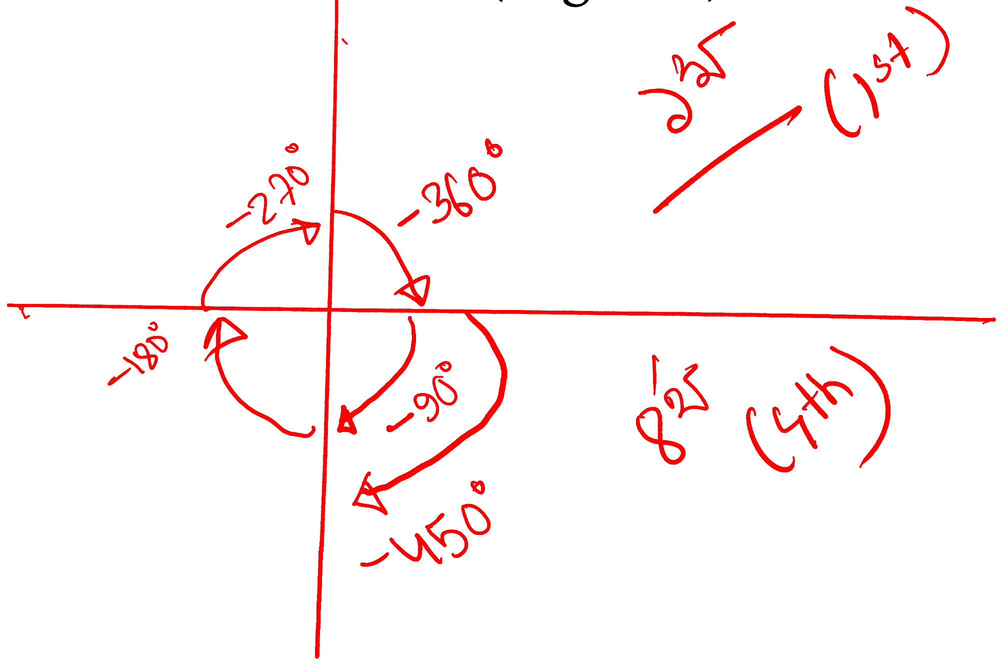
- ত্রিকোণমিতি শব্দটি বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায় 'ত্রিকোণ' এবং 'মিতি'।
- ত্রিকোণ বলতে তিনটি কোণ এবং মিতি বলতে পরিমাপ বুঝায়।
- ইংরেজিতে ত্রিকোণমিতিকে 'Trigonometry' লেখা হয়। এটি বিশ্লেষণেও পাওয়া যায় 'Trigon' এবং 'Metry'।
- 'Trigon' গ্রিক শব্দ দ্বারা তিনটি কোণ যা ত্রিভুজ এবং 'Metry' দ্বারা পরিমাপ বুঝায়।
- সাধারণভাবে ত্রিকোণমিতি বলতে তিনটি কোণের পরিমাপ বুঝায়।

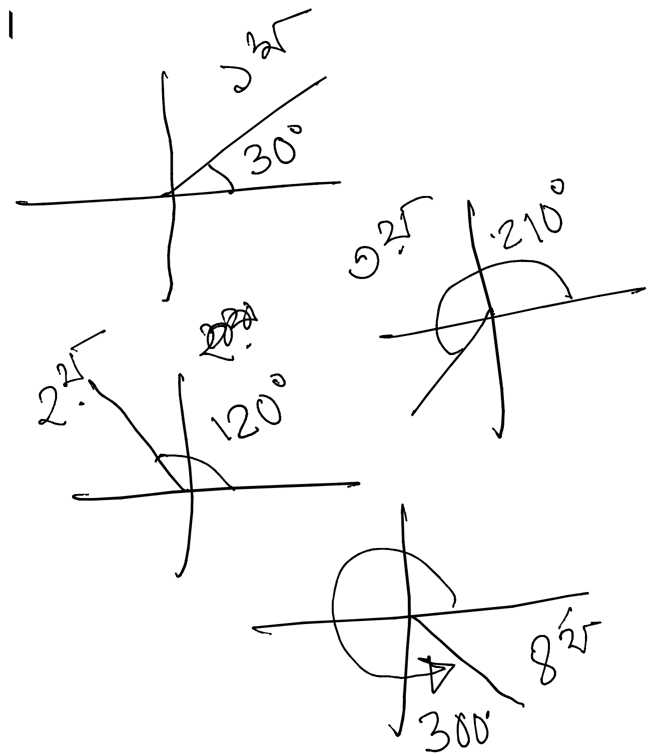
ত্রিকোণমিতিক কোণ ও জ্যামিতিক চতুর্ভাগ



ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ

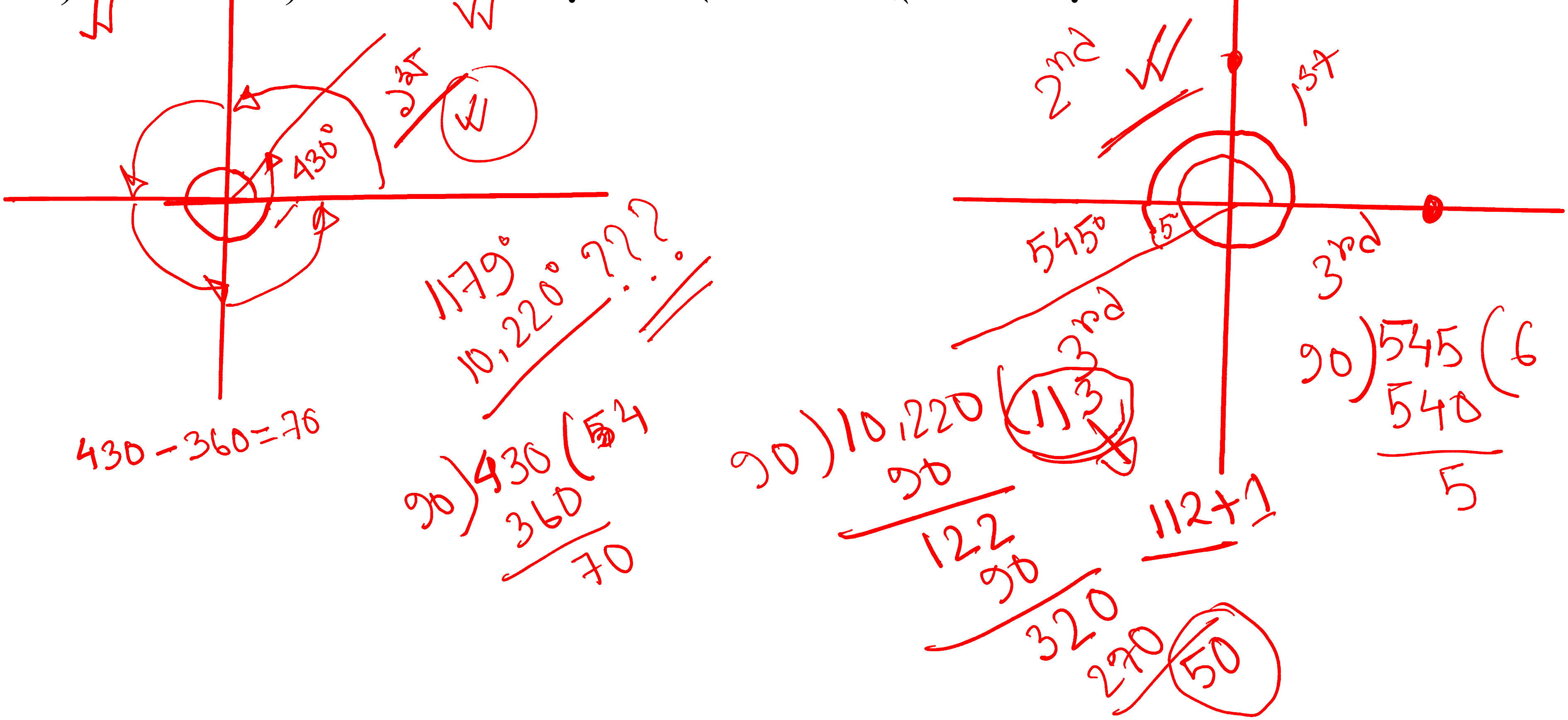
- কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anticlockwise) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক (positive) কোণ বলা হয় এবং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে (clockwise) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক (negative) কোণ বলা হয়।





উদাহরণ ১.

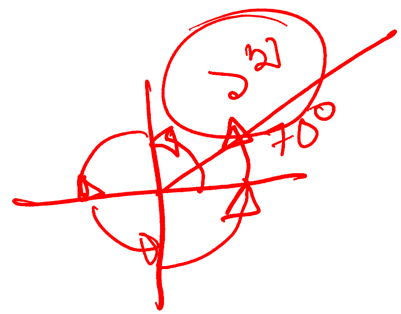
ক) 430° ও খ) 545° কোণদ্বয়ের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।



উদাহরণ ১.

ক) 430° ও খ) 545° কোণদ্বয়ের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।

- **ক) 430° = 360° + 70° = 4 x 90° + 70°।**
- 430° কোণটি ধনাত্মক কোণ এবং 4 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 5 সমকোণ অপেক্ষা ছোট।
- সুতরাং 430° কোণটি উৎপন্ন করার জন্য কোনো রশ্মিকে 4 সমকোণ বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরার পর আরও 70° ঘুরতে হয়েছে
- তাই 430° কোণটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

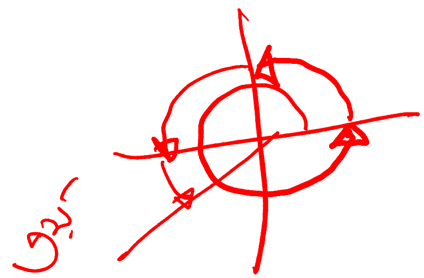


উদাহরণ ১.

ক) 430° ও খ) 545° কোণদ্বয়ের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।

- **খ) $545^\circ = 540^\circ + 5^\circ = 6 \times 90^\circ + 5^\circ$। 545° কোণটি ধনাত্মক এবং 6 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 7 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।**

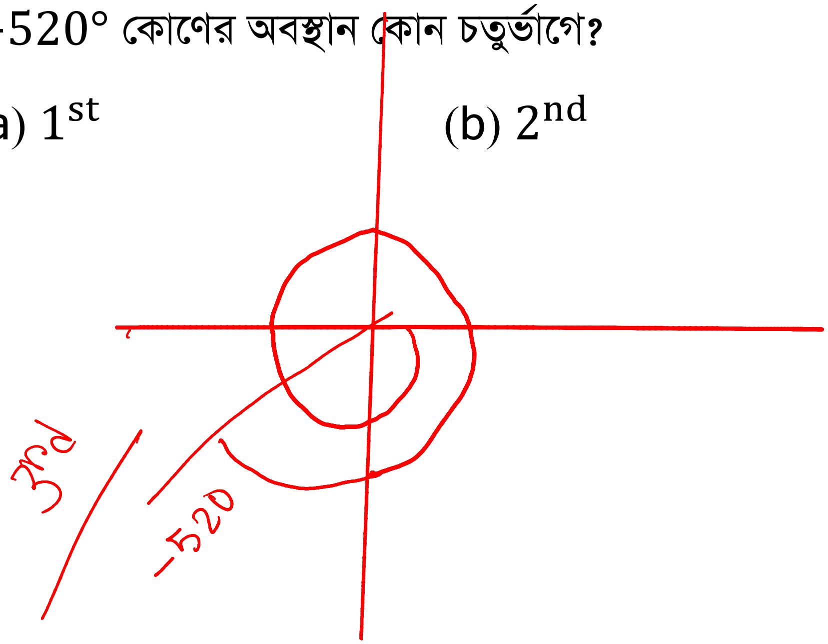
- 545° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 6 সমকোণের চেয়ে 5° বেশি বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও দুই সমকোণের চেয়ে 5° বেশি ঘুরতে হয়েছে
- তাই 545° কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।



Poll Question-01

$-520°$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?

(a) 1^{st} (b) 2^{nd} (c) 3^{rd} (d) 4^{th}



$-520 = -450 - 70$

$= 5(-90) + (-70)$

কোণ পরিমাপের একক

- কোনো কোণের পরিমাণ নির্ণয়ে সাধারণত দুই প্রকার পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়:
- (ক) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System) ও
- (খ) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

ষাট মূলক

ষাট → 60

মূলক → multiple

১ সমকোণ = ৯০

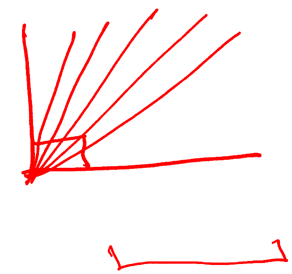
১° = ৬০ মিনিট = ৬০'

১' = ৬০'' = ৬০ সেকেন্ড

ষাটমূলক পদ্ধতি

- ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করে প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রী

  ($1° =$ one degree) ধরা হয়।



$1°$

1 সমকোণ $= 90°$

- এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক মিনিট

  ($1' =$ one minute) ধরা হয়।

- এক মিনিটকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড

  ($1'' =$ one second) ধরা হয়।

$\frac{1°}{60} = 1'$ (1 min)

$\frac{1'}{60} = 1''$ (1 sec)

$1° = 60'$

$1' = 60''$

কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

- r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে ও s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ যদি কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে $s = r\theta$ হবে।

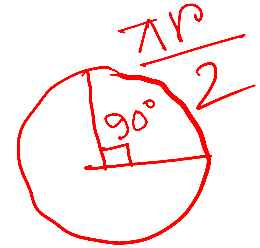
$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

অর্থাৎ, $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ। [1 রেডিয়ান = 1^c]

$$\therefore 1 \text{ সমকোণ} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$$

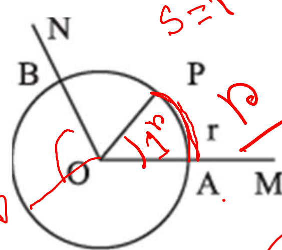
বা, $90^\circ = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

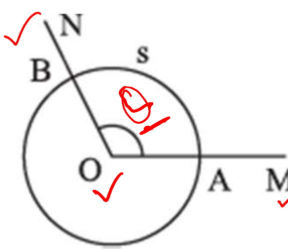
$\therefore 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$



কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

মনে করি, $\angle MON$ যেকোনো একটি কোণ যার বৃত্তীয় পরিমাপ নির্ণয় করতে হবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $OA = r$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তটি OM ও ON কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$। ব্যাসার্ধ r এর সমান করে AP চাপ নিই (চাপ ও ব্যাসার্ধ একই একককে হতে হবে)।





তাহলে, $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান।
ধরি চাপ $AB = s$।

প্রতিজ্ঞা ৩ অনুযায়ী, $\frac{\angle MON}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA} = \frac{s}{r}$

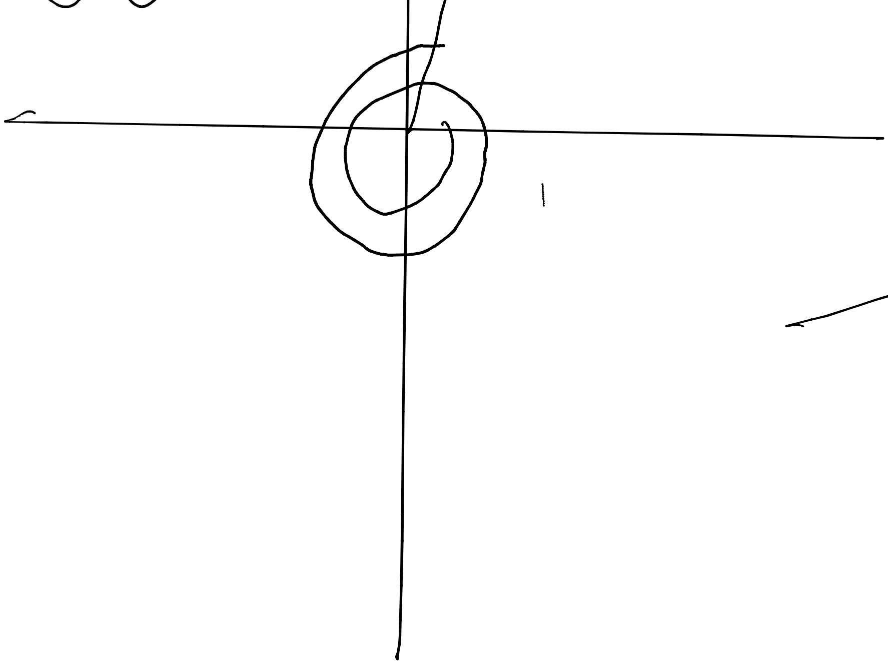
$\therefore \angle MON = \frac{s}{r} \times \angle AOP = \frac{s}{r} \times 1$ রেডিয়ান $\frac{s}{r}$ রেডিয়ান।

সুতরাং, $\frac{s}{r} =< MON = \theta$, যেখানে, θ অবশ্যই রেডিয়ানে হবে।

Poll Question-02

$-635°$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে?

(a) 1^{st} (b) 2^{nd} (c) 3^{rd} (d) 4^{th}



উদাহরণ-২:

$30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

$$1'' = \frac{1'}{60} \quad [1' = 60'']$$

$$30°12'36'' = 30° + 12' + 36''$$

$$= 30° + 12' + \left(\frac{36}{60}\right)' = 30° + 12' + 0.6'$$

$$= 30° + 12.6' = 30° + \left(\frac{12.6}{60}\right)°$$

$$\left[1° = 60' ;\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)°\right]$$

$$= 30.21°$$

$$\boxed{1° = 60' \quad \therefore 1' = \frac{1}{60}°}$$

$$1° = \frac{\pi}{180}^r$$

$$\therefore 30.21° = \frac{\pi}{180} \times 30.21^r$$

$$= 0.5273^c$$

উদাহরণ-৩:

$\frac{3\pi}{13}$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ কর।

→ degree → min → sec

$1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

$\therefore \left(\frac{3\pi}{13}\right)^c = \frac{3\pi}{13} \times \frac{180}{\pi} = \left(\frac{540}{13}\right)^\circ$

$\frac{540}{13} = {}^\circ\,{}'\,{}''$

$= 41^\circ 32' 18.46''$

উদাহরণ-৪:

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3: 4: 5 হলে কোণ তিনটির বৃত্তীয় মান কত?

$3x, 4x, 5x$

$3x + 4x + 5x = 180^\circ$

or, $12x = 180^\circ$

$\therefore x = 15^\circ \to \frac{\pi}{12}$

$1^\circ \to \frac{\pi}{180}^c$

বা, $15^\circ \to \frac{\pi}{180} \times 15 = \frac{\pi}{12}$

$3 \times \frac{\pi}{12}, 4 \times \frac{\pi}{12}, 5 \times \frac{\pi}{12}$

বা, $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$

$x = 10 \to$ 30, 40, 50

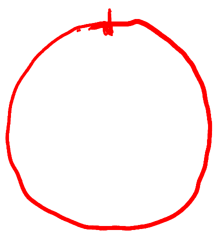
$x = 20 \to$ 60, 80, 100

15, 20, 25

180°

উদাহরণ-৫:

একটি চাকা 1.75 কিলোমিটার পথ যেতে 40 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?



$1 \rightarrow 2\pi r$

$40 \rightarrow 40 \times 2\pi r \rightarrow 1.75 km$

$40 \times 2\pi r = 1.75 km = 1750 m$

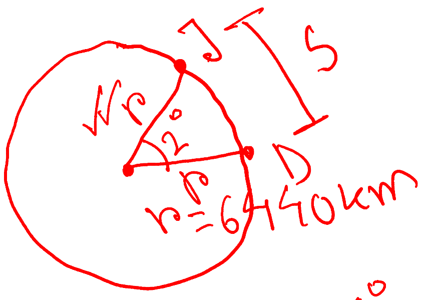
$r = \frac{1750}{80\pi} = 6.963 m$ (প্রায়)

উদাহরণ-৬:

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও জামালপুর পৃথিবীর কেন্দ্রে 2° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাকা ও জামালপুরের দূরত্ব নির্ণয় কর।

$s = r\theta$ → θ → রেডিয়ান

$\pi \to 3.1416$



$s = 6440 \times \frac{\pi}{90}$ km

$= 224.8$ km (প্রায়)

$1^\circ \to \frac{\pi}{180}^r$

$2^\circ \to \frac{\pi}{180} \times 2 = \frac{\pi}{90}^c$

$1^\circ \to \frac{\pi}{180}^c$

$1^c \to \frac{180}{\pi}^\circ$

Poll Question-03

একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 6: 8: 10 হলে সর্ববৃহত কোণটির মান কত?

(a) 60°   (b) 45°   (c) 30°   (d) 75°

15 : 20 : 25 → 6 : 8 : 10

3 : 4 : 5

$6x + 8x + 10x = 180^\circ$

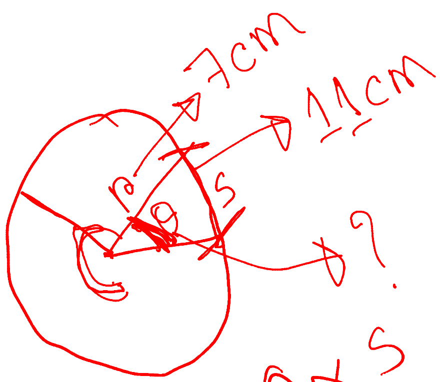
or, $24x = 180^\circ$

$\therefore x = \frac{180}{24}$

$10x = \frac{1800}{24} = 75^\circ$

উদাহরণ-৭:

কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। বৃত্তের 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।



$\theta \propto s$

$s = r\theta$

$\frac{s}{r} = \theta$

$s = r\theta$

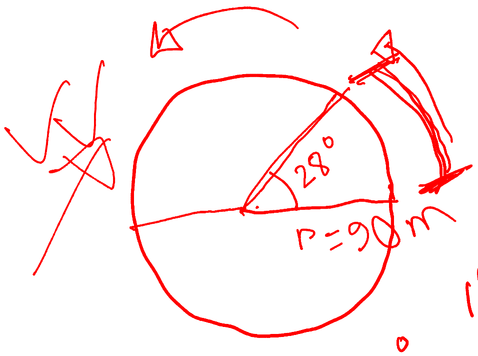
$\therefore \theta = \frac{s}{r} = \frac{11 cm}{7 cm} = 1.57^c$

$\theta = \frac{11}{7} = 1.57^c$

উদাহরণ-৮:

এহসান সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 10 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 28° কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 180 মিটার হয়, তবে এহসানের গতিবেগ নির্ণয় কর।

$r = \frac{d}{2} = 90m$



$1^\circ = \frac{\pi}{180}^c$

$\theta = 28^\circ = \frac{\pi}{180} \times 28^c$

$S = r\theta = 90 \times 28 \times \frac{\pi}{180} = 14\pi \ m$

$S = 43.98 m$

$V = \frac{s}{t} = \frac{43.98}{10} = 4.398 ms^{-1}$

$= 4.398 m/s$ (প্রায়)

Exercise

১. (ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

(i) 75°30’ (ii) 55°54’53“ (iii) 33°22′11"

$$55^\circ + 54' + \left(\frac{53}{60}\right)'$$

$$= 55^\circ + \left(\frac{54 + \frac{53}{60}}{60}\right)^\circ \Rightarrow 55.\ldots^\circ$$

radian

Exercise

১. (খ) ডিগ্রিতে প্রকাশ কর:

(i) 1.3177 রেডিয়ান (ii) 0.9759 রেডিয়ান

$$1.3177^c = \left(1.3177 \times \frac{180}{\pi}\right)^c$$

Exercise

৩. একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মিটার 3 সে.মি. হলে, চাকার পরিধির আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

Exercise

৪. একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 0.84 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

Poll Question-04

কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 সে.মি.। বৃত্তের 33 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(a) 3.14 রেডিয়ান (b) 1.57 রেডিয়ান (c) 4.71 রেডিয়ান (d) 0.785 রেডিয়ান

লেগে থাকো সৎভাবে,
স্বপ্ন জয় তোমারই হবে

উদ্ভাস-*উন্মেষ* শিক্ষা পরিবার

Thank You