

রাশি

পদার্থবিজ্ঞানের যেসব ভৌত বিষয় পরিমাপ করা যায় তাকে রাশি বলে।

স্কেলার রাশি

পদার্থবিজ্ঞানের যেসব ভৌত রাশির মান আছে কিন্তু দিক নেই তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে।

ভেক্টর রাশি

পদার্থবিজ্ঞানের যেসব ভৌত রাশির মান পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।

Poll Question 01

কোনটি ভেক্টর রাশি ?

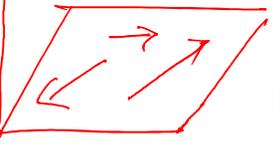
(a) দীপন তীব্রতা

(b) সময়

(c) তড়িৎ প্রবাহ

~~(d) সরণ~~

কতিপয় ভেক্টর

<p><u>সমান</u></p> <p>$\longrightarrow \vec{A}$</p> <p>$\longrightarrow \vec{B}$</p> <p>সমান ও দিক সমান হবে</p>	<p>সদৃশ</p> <p>$\longrightarrow \vec{A}$</p> <p>$\longrightarrow \vec{B}$</p> <p>সমান সমান না, দিক একই</p>	<p>সমানার্থ</p> <p>$\longrightarrow \longrightarrow$</p> <p>$\longrightarrow$</p>	<p>একক ভেক্টর</p> <p>$\frac{\vec{A}}{A} = \hat{a}$</p>	<p>} স্ফটিক</p>
<p><u>বিপরীত</u></p> <p>$\longrightarrow \vec{A}$</p> <p>$\longleftarrow -\vec{A}$</p> <p>সমান সমান, দিক বিপরীত</p>	<p>বিষদৃশ</p> <p>$\longrightarrow \vec{A}$</p> <p>$\longleftarrow \vec{B}$</p>	<p>সমতলীয়</p> 	<p>স্বাভাবিক</p> <p>$\vec{0}$</p>	

Poll Question 02

যে ভেক্টরের মান এক একক তাকে বলা হয় :

- (a) নাল ভেক্টর
- (b) সদৃশ ভেক্টর
- (c) বিপরীত ভেক্টর
- ~~(d) একক ভেক্টর~~

Poll Question 03

A ও B উভয়ে সদৃশ ভেক্টর হলে কোনটি সঠিক-

(a) $\vec{A} - \vec{B}$

$$\vec{B} = -\vec{A}$$

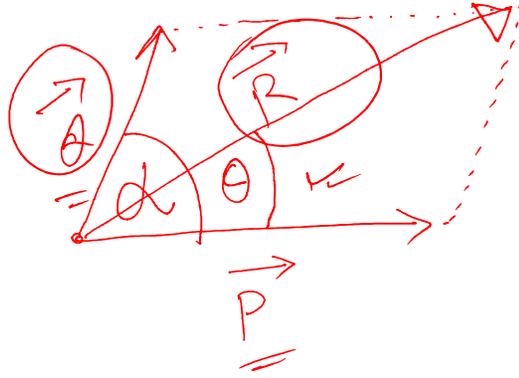
(b) $\vec{B} = -\vec{A}$

~~(c) $\vec{A} > \vec{B}$~~

(c)

~~(d) $B < A$~~

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র



i) $\alpha = 0^\circ$

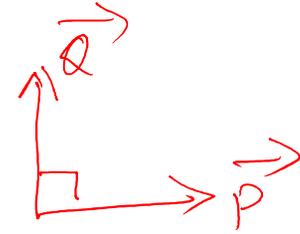
$R_{\max} = P + Q$

ii) $\alpha = 90^\circ$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$

iii) $\alpha = 180^\circ$

$R_{\min} = P - Q$



সূত্র: $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$

দিক: $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha} \right)$

Poll Question 04

\vec{p} এবং \vec{Q} এর মধ্যবর্তী কোণ এক সমকোণ হলে, লঙ্কির দিক হবে :-

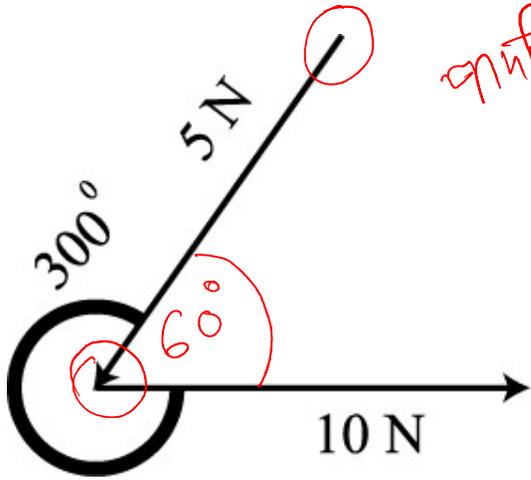
~~(a) $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{Q}{p} \right)$~~

~~(b) $\theta = 12 \text{rad}$~~

~~(c) $\theta = \sin \left(\frac{Q}{p} \right)$~~

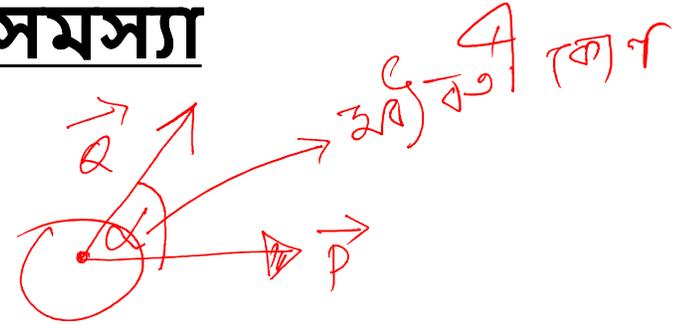
~~(d) $\theta = \cos \left(\frac{Q}{p} \right)$~~

ভেক্টর সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা

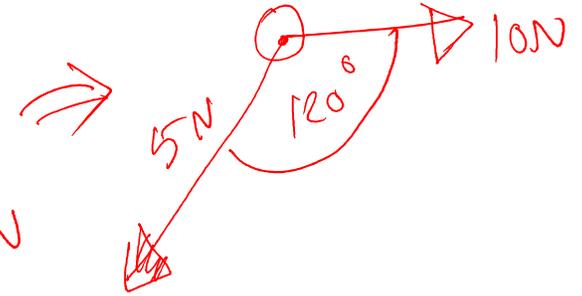
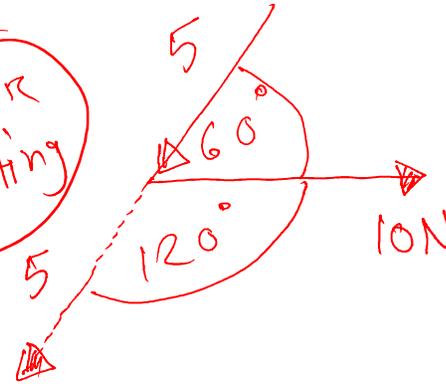


পাদবিন্দু
মা

শীর্ষবিন্দু
মাথ



Vector shifting



লক্ষ্য ভেক্টরের মান কত?

~~$$R = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ}$$

$$= \boxed{\quad}$$~~

$$R = \sqrt{5^2 + 10^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= \boxed{\quad} \checkmark$$

ভেক্টর সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা

দুইটি ভেক্টর রাশির মান 5 একক। তারা একই বিন্দুতে 120° কোণে ক্রিয়া করে।
তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

$$P = 5$$

$$Q = 5$$

$$\alpha = 120^\circ$$

$$R = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= 5 \text{ একক}$$

দুইটি ভেক্টরের মান অজানা এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ

120° হলে লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের
যে কোন একটির -সমান।

$$\therefore R = 5 \text{ একক}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5 \sin 120^\circ}{5 + 5 \cos 120^\circ} \right) = \square \text{ Ans.}$$

Poll Question 05

উভয় ভেক্টরের মান 10 একক এবং মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে লব্ধির মান কত ?

(ক) 12

(খ) 20

(গ) 10

(ঘ) 0

ভেক্টর সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা

দুইটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তম লব্ধি 28 একক ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 একক। রাশি দুইটি পরস্পরের সাথে কীভাবে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান ক্ষুদ্রতম লব্ধির 5 গুণ হবে?

$$\alpha = ?$$

$$P + Q = 28$$

$$P - Q = 4$$

$$+ \quad \frac{2P = 32}{P = 16}$$

$$16 + Q = 28$$

$$\therefore Q = 12$$

$$R = 5(P - Q)$$

$$= 5(16 - 12)$$

$$R = 20$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 20^2 = 16^2 + 12^2 + 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 400 = 256 + 144 + 384 \cos \alpha$$

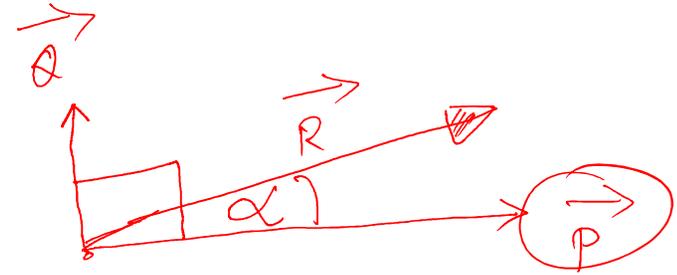
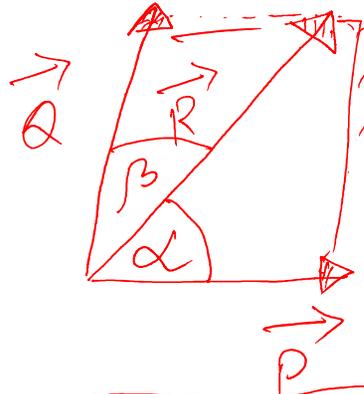
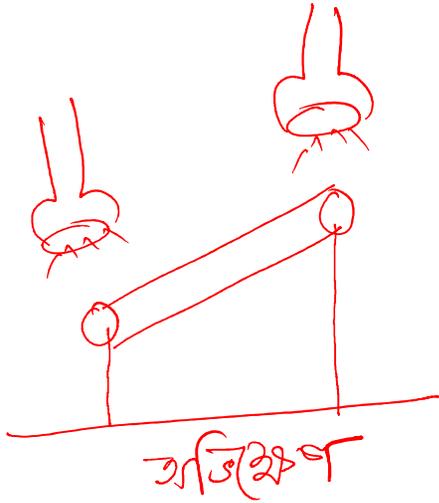
$$\begin{array}{r} 24 \\ 16 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\Rightarrow 384 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = 90^\circ$$

ভেক্টর উপাংশ ও অভিক্ষেপ সম্পর্কিত থিওরি...



$$P = \frac{R \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

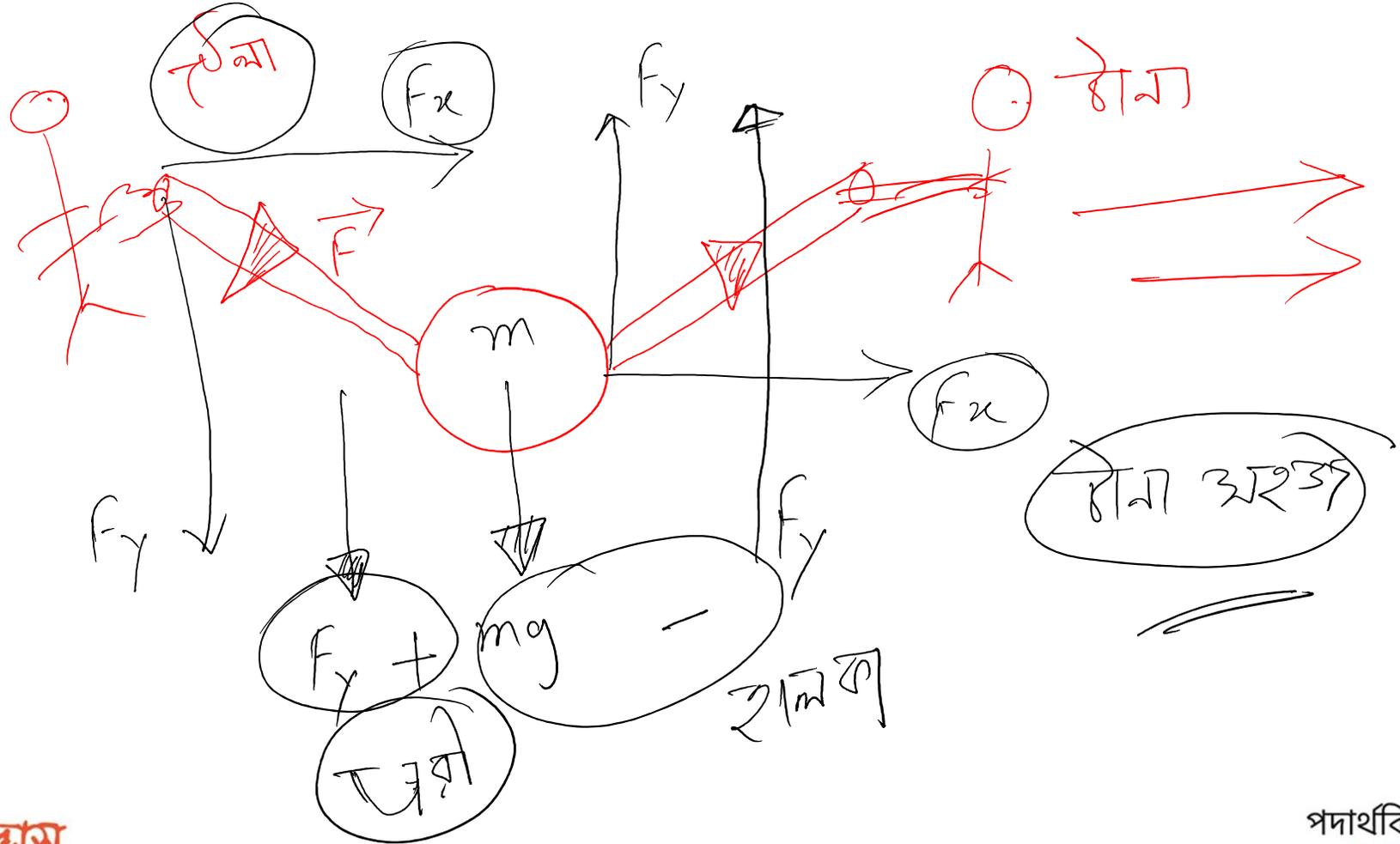
$$Q = \frac{R \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$P = R \cos \alpha$$

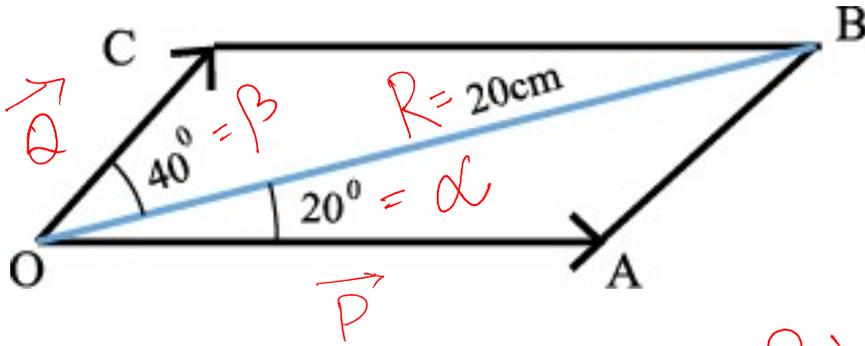
$$Q = R \sin \alpha$$

লম্ব উপাংশ

ভেক্টর উপাংশের বাস্তবিক ব্যবহার



ভেক্টর উপাংশ ও অভিক্ষেপ সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা



OA এবং OC এর দৈর্ঘ্য কত?
P Q

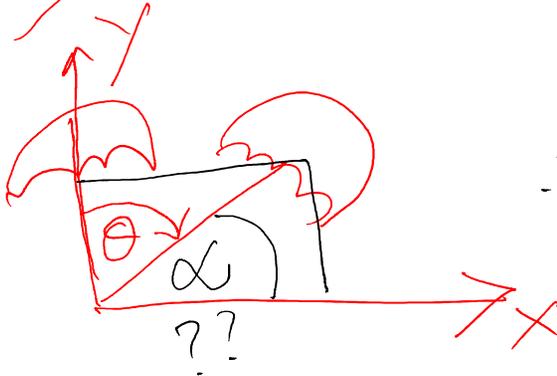
$$P = \frac{R \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{20 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} = \square$$

$$Q = \frac{R \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{20 \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} = \square$$

Ans.

আপেক্ষিক বেগ সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা

একজন লোক পশ্চিম দিক বরাবর 10kmh^{-1} বেগে চলছে। বৃষ্টি সরাসরি তার মাথার উপর $10\sqrt{3}\text{kmh}^{-1}$ বেগে পড়ছে। অনুভূমিকের সাথে কত কোণে ছাতা ধরবে?

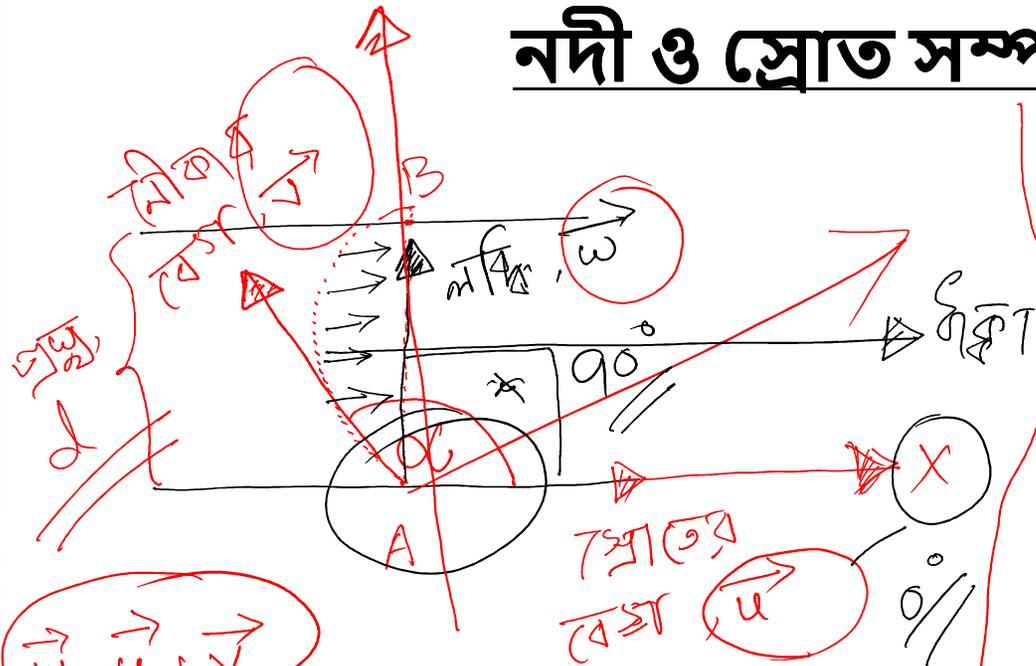


উল্লম্বের সাথে কোণ, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\text{ধ্রুৱকের বেগ}}{\text{বৃষ্টির বেগ}} \right)$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{10\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$$

$$\therefore \alpha = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \text{ Ans.}$$

নদী ও স্রোত সম্পর্কিত থিওরি



Case-1 স্বর্বাঙ্গী দূরত্ব।

$$w \cos 90^\circ = u \cos 0^\circ + v \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 0 = u + v \cos \alpha$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{-u}{v} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\text{-(ছোঁমোম)}}{\text{বড়ছোঁমোম}} \right)$$

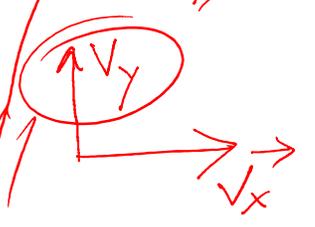
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

Case-1 স্বর্বাঙ্গী দূরত্বে, স্বর্বাঙ্গী বেগ।

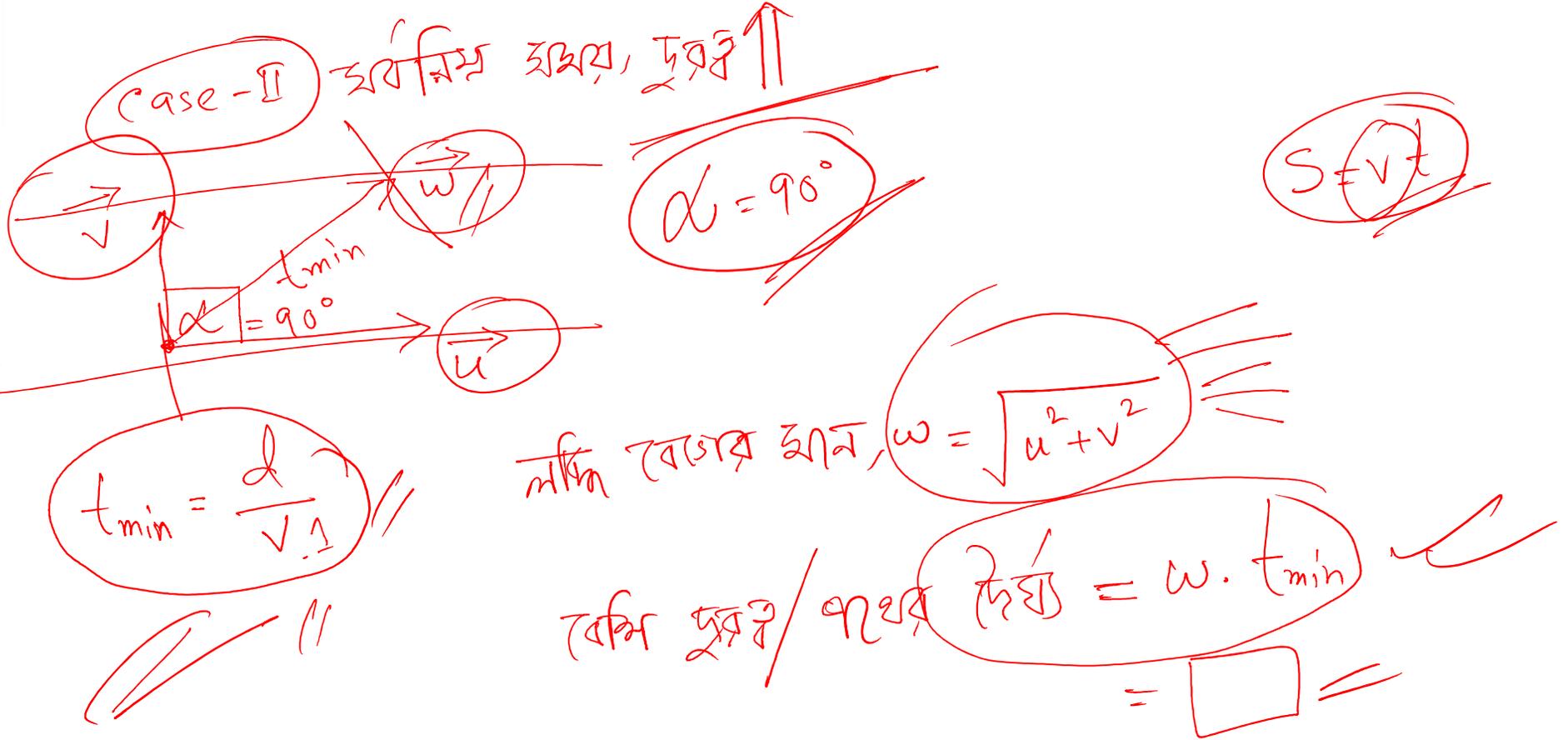
Case-2 " স্বর্বাঙ্গী, দূরত্ব "।

$$s = vt \Rightarrow d = v \sin \alpha \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{d}{v \sin \alpha}$$



নদী ও স্রোত সম্পর্কিত থিওরি



নদী ও স্রোত সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা

একটি নদীতে স্রোত ও নৌকার বেগ যথাক্রমে 6kmh^{-1} ও 12kmh^{-1} । নদীর প্রস্থ

10km.

(ক) সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পার হতে হলে নৌকাটিকে কোন দিক বরাবর চালনা করতে হবে।

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{12}\right) = 120^\circ$$

(খ) সর্বনিম্ন দূরত্ব কত? $d = 10\text{km}$

(গ) এক্ষেত্রে কত সময় লাগবে?

$$t = \frac{10}{12 \sin 120^\circ} = \square \text{ s.}$$

(ঘ) সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে নৌকাটিকে কোনদিকে চালনা করতে হবে?

(ঙ) এই ক্ষেত্রে পথের দৈর্ঘ্য কত হবে? $= w \cdot t_{\min}$

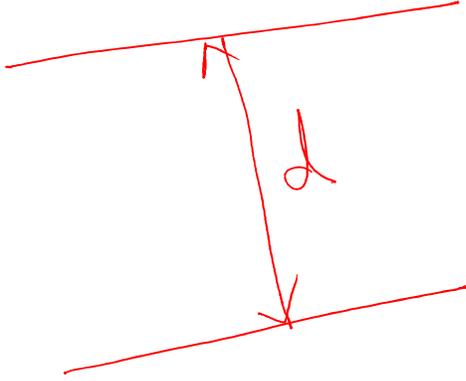
$$\alpha = 90^\circ$$

(চ) এই ক্ষেত্রে কত সময় লাগবে?

$$= \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{10}{12} = 9.23 \text{ দৈর্ঘ্য}$$

$$t_{\min} = \frac{10}{12} = \square \text{ s.}$$

নদী ও স্রোত সম্পর্কিত থিওরি



Poll Question 06

নৌকা ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে 20kmh^{-1} ও 10kmh^{-1} হলে ন্যূনতম দূরত্ব-এ নদী পার হতে মাঝি কোণ দিকে নৌকা চালাবে :-

(ক) 12°

(খ) 11°

~~(গ) 120°~~

(ঘ) 10°

$$\cos^{-1} \left(\frac{-10}{20} \right) = 120^\circ$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন থিওরি

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = \text{scalar}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \pm \hat{n} AB \sin \theta = \text{vector}$$

$\vec{A} \perp \vec{B}$ হলে ডট গুণন "শূন্য"।

$$\# \vec{A} \parallel \vec{B} \text{ হলে, } \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন গাণিতিক সমস্যা

$\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - a\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - a\hat{j} + a\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 4 + 1(-a) + (-a)(a) = 0$$

$$\Rightarrow 12 - a - a^2 = 0.$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 12 = 0.$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a - 3a - 12 = 0.$$

$$\Rightarrow a(a+4) - 3(a+4) = 0 \Rightarrow (a+4)(a-3) = 0$$

$$a = 3, -4$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন গাণিতিক সমস্যা

দুটি ভেক্টরের যোগফল ও বিয়োগফল সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

$$|\vec{P} + \vec{Q}|^2 = |\vec{P} - \vec{Q}|^2$$

$$\Rightarrow P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos \alpha.$$

$$\Rightarrow 4PQ \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = ?$$

$$\vec{P} + (-\vec{Q})$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন গাণিতিক সমস্যা

a এর মান কত হলে $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

$$\therefore \frac{5}{15} = \frac{2}{a} = \frac{-3}{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{a}$$

$$\therefore a = 6$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন গাণিতিক সমস্যা

$\vec{A} = 5\hat{j} + 3\hat{i}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$ দ্বারা একটি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সামান্তরিকের দুটি বাহু \vec{A}, \vec{B} হয়, ক্ষেত্রফল = $|\vec{A} \times \vec{B}|$

" " কর্ণ \vec{A}, \vec{B} " " " " = $\frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$ ***

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -16\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + (-16)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 = 8 \text{ বর্গ একক}$$

ভেক্টর ডট গুণন ও ক্রস গুণন গাণিতিক সমস্যা

$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে দেখাও যে, ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

যখন তাদের মিলারস্কের মান = 0

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{C}$$

$$3 - 2 = 1$$

$$-2 - (-1) = -2 + 1 = -1$$

$$4 - (-1) = 4 + 1 = 5$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$2\vec{A} - \vec{C} = \vec{B}$$

$$3\vec{C} - 2\vec{B} = \vec{A}$$

Poll Question 07

$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + a\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হলে a এর মান কত?

(ক) 2

~~(খ) 3~~

(গ) 4

(ঘ) 5

$$3 - 1 = 2$$

$$-4 - (-2) = -4 + 2 = -2$$

$$5 - 2 = 3$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{c}$$

VECTOR DIFFERENTIATION

$$5 \times 3 = 15 = \text{scalar} \rightarrow \frac{|\vec{\nabla}|}{|\vec{A}|} = \nabla \cdot \vec{A} = \text{scalar} = \text{Grad.}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{scalar} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{scalar} = \text{Div.}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \text{vector} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{Vector} = \text{Curl.}$$

Operator

2	+	2	=	4
-			=	0
x			=	4
÷			=	1

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Operator



ভেক্টর কার্ল

দেখাও যে, $\vec{A} = (x + 2y + 4z)\hat{i} + (2x - 3y - z)\hat{j} + (4x - y + 2z)\hat{k}$ একটি
অঘূর্ণনশীল ভেক্টর।

"কার্ল হবে শূন্য"

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+4z & 2x-3y-z & 4x-y+2z \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Poll Question 08

নিচের কোনটি সঠিক কার্লে'র নতিমাত্রার জন্য ?

~~(ক)~~ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ ✓

(খ) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

(গ) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0$

(ঘ) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 1$

Poll Question 09

কার্লে'র মান শূন্য হলে ভেক্টরটি হবে –

(ক) ঘূর্ণনশীল

~~(খ) অঘূর্ণনশীল~~

(গ) কৌণিক

(ঘ) কোনটি নয়

ভেক্টর ডাইভারজেন্স

$(1, -1, 1)$ অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}$ - এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} (3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y} (2xy^2) - \frac{\partial}{\partial z} (x^3y^2z)$$

$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

$$= 3(-1)(1)^3 + 4(1)(-1) - (1)^3(-1)^2$$

$$= -3 - 4 - 1 = -8$$

Poll Question 10

ভেক্টর *Divergence* এর মান শূন্য হলে ভেক্টরটি হবে –

~~(ক) সলিনয়েড~~

(খ) ত্রিভুজ

(গ) রেখা

(ঘ) কোনটি নয়

ভেক্টর ডাইভারজেন্স

b এর কত মানের জন্য ভেক্টর $\vec{v} = (x + 3y)\hat{i} + (by - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(by - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - 2z) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + b - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow b - 1 = 0$$

$$\therefore b = 1$$

না বুঝে মুখস্থ করার অভ্যাস
প্রতিভাকে ধ্বংস করে।



উদ্ভাস

একতমিক এড এডমিশন সেন্টার

www.udvash.com