অধ্যায় ০২ ভেক্টর

➤ এইচএসসি বোর্ড পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	গাণিতিক টাইপ	HSC বোর্ড পরীক্ষায় যে বছর প্রশ্ন এসেছে	
		MCQ	CQ
✪✪✪	Type-01: দুটি ভেক্টরের লব্ধি	Din.B’22, 17; SB’21, 17; BB’21, 17; Ctg.B’17	CB’22; Din.B’21; SB’17
✪✪	Type-02: ভেক্টরের উপাংশ	CB’22, 21; MB’21; DB’17	CB’22
✪✪✪	Type-03: আয়ত একক ভেক্টর দ্বারা ভেক্টরের প্রকাশ	DB’22, 21; Ctg.B’22 Din.B’21; RB’21	MB’22, 21; RB’21; BB’21; Ctg.B’19; SB’19; JB’19; CB’17
✪✪✪	Type-04: নদী ও স্রোত	JB’17	RB’22, 21; Ctg.B’22, 21, 17; CB’22, 19; Din.B’22; DB’21; SB’21; JB’21
✪✪	Type-05: ভেক্টর বিয়োগ ও আপেক্ষিক বেগ	-	SB’22; DB’19; RB’19, 17
✪✪	Type-06: দুইয়ের অধিক ভেক্টরের লব্ধি	-	BB’22; SB’21
✪✪	Type-07: অবস্থান ভেক্টর নির্ণয়	-	DB’22; BB’17
✪✪✪	Type-08: ভেক্টরের ডট গুণন	RB’22; SB’22; JB’22; CB’22; DB’21; Ctg.B’21, 19; Din.B’21	DB’22, 17; JB’22, 21, 19; MB’22, 21; RB’21; Ctg.B’21; BB’21; CB’21; Din.B’21
✪✪✪	Type-09: দিক কোসাইন	DB’22; Din.B’17	RB’22; Din.B’22, 21
✪✪✪	Type-10: ভেক্টরের ক্রস গুণন	RB’22, 21; Ctg.B’22, 21, SB’22; MB’22; DB’21,19; BB’21, 17	RB’22, BB’22, 21, 19; Din.B’22, 21; DB’21,17; Ctg.B’21, 19; JB’21, 17; CB’21; SB’19
✪✪✪	Type-11: ভেক্টর ক্যালকুলাস	BB’22, 17	RB’22; Ctg.B’22, 19; SB’22; BB’22; JB’17

Type-01: দুটি ভেক্টরের লব্ধি

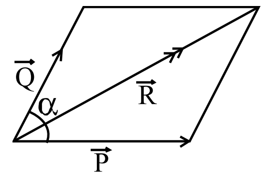
♦ লব্ধির মান:

➤ P ও Q মানের দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

➤ লব্ধির সর্বোচ্চ মান, $R_{max} = P + Q$; $[\alpha = 0°]$

➤ লব্ধির সর্বনিম্ন মান, $R_{min} = |P - Q|$; $[\alpha = 180°]$

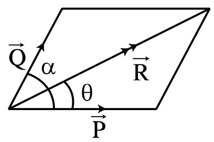
যেখানে, α হচ্ছে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ



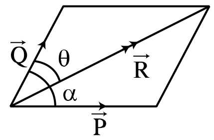
চিত্র: সামান্তরিক সূত্র

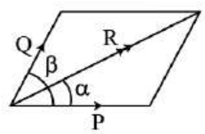
♦ লব্ধির দিক:

লব্ধির দিক (P এর সাথে), $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$



লব্ধির দিক (Q এর সাথে), $\theta = \tan^{-1}\frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$





$P = \frac{R\sin B}{\sin(\alpha+\beta)}$

$Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

⚠ সতর্কতা!

♦ সহজভাবে বললে যার সাথে কোণ (θ) নিব তাকে হরে আলাদা রাখতে হবে।

♦ এই সূত্রগুলোতে সব সময় P, Q এর পরমমান নিয়ে কাজ করতে হবে।

♦ কেবল সমবিন্দুগামী (একই বিন্দু থেকে শুরু হয় এমন) দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্র ব্যবহার করা যাবে।

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ $120°$ হলে তাদের লব্ধির মান- **[Din.B'22]**

(a) $P + Q$ (b) $\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ}$

(c) $P - Q$ (d) $\sqrt{P^2 + Q^2 - PQ}$

সমাধান: (d); $|\vec{P} + \vec{Q}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 120°}$

$= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{P^2 + Q^2 - PQ}$

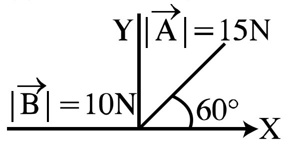
02. দুইটি ভেক্টরের মান সমান। নিচের কোন অবস্থানে এদের লব্ধি একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{3}$ গুণ হবে? **[SB'21][Ans: c]**

(a) $0°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$

03. $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ হবে– **[BB'21; Din.B'17][Ans: c]**

(a) $0°$ (b) $30°$ (c) $90°$ (d) $180°$

04. **[Ctg.B'17]**



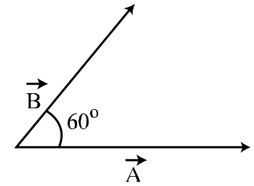
উপরের চিত্রের আলোকে $|\vec{A} + \vec{B}| = ?$

(a) 15.81N (b) 14N (c) 13.23N (d) 11.23N

সমাধান: (c); $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ

$= (180° - 60°) = 120°$

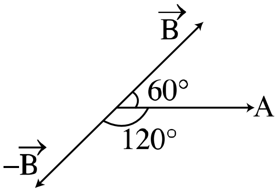
05. চিত্রে দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর প্রত্যেকের মান 5 একক। তাদের মধ্যকার কোণ $60°$। $|\vec{A} - \vec{B}|$ নির্ণয় কর। **[SB'17]**



(a) 0 (b) 5 একক

(c) 7.07 একক (d) 8.66 একক

সমাধান: (b);



$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 60°}$

$= \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\cos 60°} = 5$

06. সমমানের দুটি বলের লব্ধির মান তাদের যে কোনো একটির অর্ধেক হলে বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BB'17]**

(a) $28.90°$ (b) $41.40°$ (c) $138.6°$ (d) $151.04°$

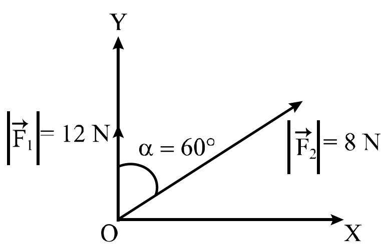
সমাধান: (d); $\frac{P}{2} = \sqrt{P^2 + P^2 + 2 \cdot P \cdot P \cdot \cos\theta}$

$\Rightarrow P^2 = 4\,(2P^2 + 2P^2\cos\theta)$

$\Rightarrow P^2 = 8P^2 + 8P^2\cos\theta \Rightarrow \theta = 151.04°$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. **[CB'22]**



(গ) বল দুটির লব্ধি **X**-অক্ষের সাথে যে কোণে ক্রিয়াশীল তা নির্ণয় কর। ৩

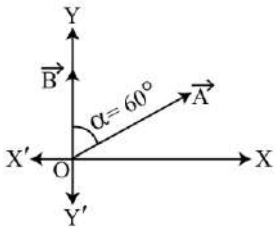
সমাধান

গ. ধরি, F_1 ও F_2 এর লব্ধি F_1 এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল।

$\tan\theta = \frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2\sin\alpha}{F_1 + F_2\cos\alpha}\right) \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{8\sin 60°}{12 + 8\cos 60°}\right) \Rightarrow \theta = 23.41°$

X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_x = 90° - \theta = 90° - 23.41° = 66.59°$

02. **[Din.B'21]**

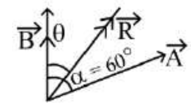


চিত্রে $|\vec{A}| = 5N$ ও $|\vec{B}| = 8N$

(গ) ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্ণয় কর। ৩

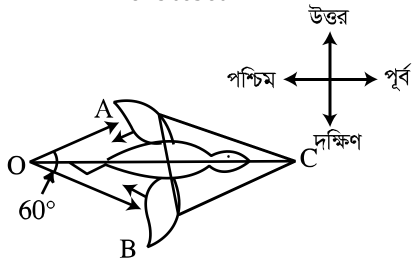
সমাধান

গ. ধরি, ভেক্টর দুটির লব্ধি $\vec{R}$, যা $\vec{B}$ এর সাথে θ কোণ তৈরি করে।



$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 8^2 + 2 \times 5 \times 8\cos 60^\circ} = \sqrt{129}\ \text{N}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{5\sin 60^\circ}{8+5\cos 60^\circ} \Rightarrow \theta = 22.41^\circ$

03. 

[SB'17]

চিত্রানুযায়ী একটি পাখি সমতল ভূমির সমান্তরালে আকাশে উড়ছে। পাখিটির উভয় পাখা কর্তৃক ধাক্কার পরিমাণ **5N**।

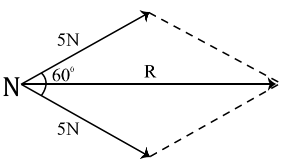
(গ) চিত্রের **OC** বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান কত? ৩

(ঘ) **AO** বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পাখিটি কোনদিকে উড়বে? গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। ৪

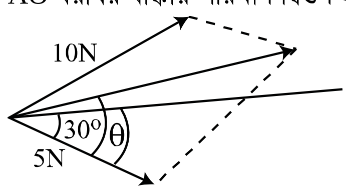
সমাধান

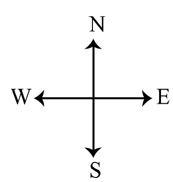
গ.

লব্ধি, $R = \sqrt{5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ}\ \text{N} = 8.66\ \text{N}$



ঘ. AO বরাবর ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে বল হবে $= (2 \times 5)\text{N} = 10\text{N}$





বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60^\circ$

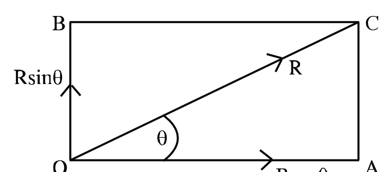
$\therefore$ 5N বলের সাথে কোণ θ হলে, $\tan\theta = \frac{10\sin 60^\circ}{5+10\cos 60^\circ} \Rightarrow \theta = 40.89^\circ$

$\therefore$ পাখিটি পূর্ব দিকের সাথে $= (40.89^\circ - 30^\circ) = 10.89^\circ$ কোণে উড়বে।

Type-02: ভেক্টরের উপাংশ

Concept:

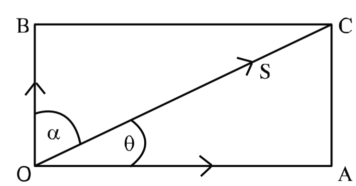
ধরি, একটি ভেক্টর R অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। তাহলে R এর অনুভূমিক উপাংশ হচ্ছে $R\cos\theta$ এবং উল্লম্ব উপাংশ হচ্ছে $R\sin\theta$ (চিত্র-১)। এখন আমরা দেখব যে শুধু cos ব্যবহার করেই একটি ভেক্টরের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ বের করা সম্ভব। সূত্রটি হচ্ছে, ভেক্টরের যে কোন দিকে উপাংশ = মূল ভেক্টর × (মূল ভেক্টর এবং ঐ দিকের অন্তর্ভুক্ত কোণের cosine)



চিত্র-১

তাহলে, চিত্র-২ এ S এর উল্লম্ব দিক বরাবর উপাংশ বা উল্লম্ব উপাংশ হচ্ছে,

$S_V = S\cos\alpha$ আবার, যেহেতু $\alpha = 90^\circ - \theta$ $\therefore S_V = S\cos(90^\circ - \theta) = S\sin\theta$

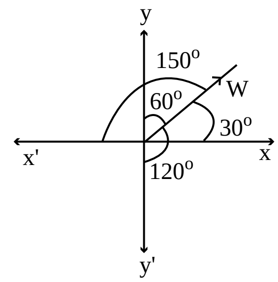


চিত্র-২

ধরি, (চিত্র-৩) এবার অপর একটি ভেক্টর W যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করেছে। এখন আমরা x, x′, y ও y′ অক্ষ বরাবর W এর উপাংশ যথাক্রমে W_x, $W_{x'}$, W_y ও $W_{y'}$ বের করবো।

এখানে, $W_x = W\cos 30° = \frac{\sqrt{3}W}{2}$; $W_{x'} = W\cos 150° = \frac{-\sqrt{3}W}{2}$

$W_y = W\cos 60° = \frac{W}{2}$; $W_{y'} = W\cos 120° = -\frac{W}{2}$

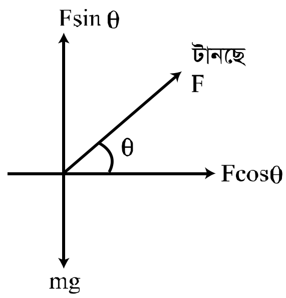


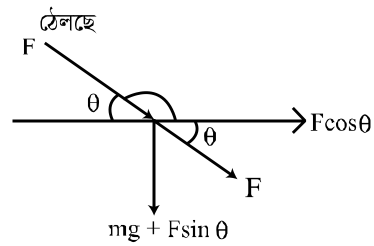
(চিত্র-৩)

Formulae: $\vec{R}$ এর θ কোণে উপাংশ $= R\cos\theta$

θ কোণের লম্বিকে উপাংশ $R = \sin\theta$

লন রোলার:



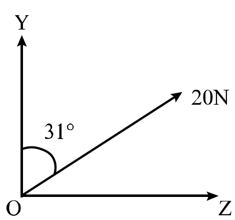


আপাত ওজন, $W = mg - F\sin\theta$ $W = mg + F\sin\theta$

∴ লনরোলার টানা ঠেলার চেয়ে সহজ।

[বি.দ্র: ক্রিকেট পিচ সমান করতে বেশি বল প্রয়োজন তাই পিচ সমান করতে ঠেলা বেশি কার্যকর।]

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

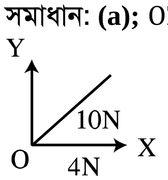
01. 

[CB'22]

OZ বরাবর বলের উপাংশ কত?

(a) 10.30 N (b) 12.01 N (c) 17.14 N (d) 33.28 N

সমাধান: (a); OZ বরাবর বলের উপাংশ, $\vec{F}_{OZ} = F\cos(90° - 31°) = 20 \times \cos 59° = 10.30$ N

02. 

10N এর একটি বলকে লম্ব উপাংশে বিভাজিত করলে OY এর মান কত? **[CB'21][Ans: b]**

(a) 4N (b) 9N (c) 12N (d) 14N

সমাধান: (b); $|\overrightarrow{OX}| = 4$; $|\overrightarrow{OY}| = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84}\text{N} \approx 9\text{N}$

03. 10 একক মানের একটি ভেক্টর দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত করায় একটির মান 8 একক হলে অপরটির মান কত? **[MB'21][Ans: c]**

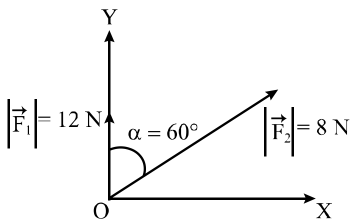
(a) 2 একক (b) 4 একক (c) 6 একক (d) 8 একক

04. XZ সমতলে $3\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য কত একক? **[DB'17]**

(a) 5 (b) $\sqrt{34}$ (c) $\sqrt{41}$ (d) 12

সমাধান: (a); XZ সমতলে ভেক্টরটির উপাংশ $= 3\hat{i} + 4\hat{k}$ ∴ দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. 

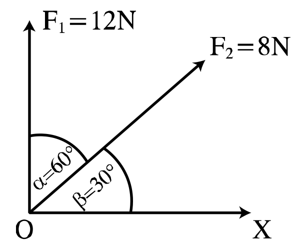
[CB'22]

(ঘ) বল দুটির লব্ধির অনুভূমিক উপাংশ ও উলম্ব উপাংশের মধ্যে কোনটি বেশি? তোমার মতামত গাণিতিক যুক্তিসহ দাও। ৪

সমাধান

ঘ. X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_x = 90° - \theta = 90° - 23.41° = 66.59°$

লব্ধি x-অক্ষের সাথে 66.59° কোণ উৎপন্ন করে। বলদ্বয়ের লব্ধির মান,



$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$

$= \sqrt{8^2 + 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 60°} = \sqrt{304 \text{ N}}$

$\vec{R}$ এর অনুভূমিক উপাংশ, $R_x = R\cos\theta_x = \sqrt{304} \times \cos(66.59°)\text{ N} = 6.93$N

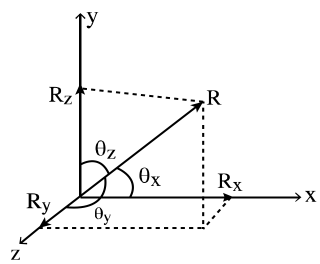
$\vec{R}$ এর উলম্ব উপাংশ, $R_y = R\sin\theta_x$

$= \sqrt{304}\sin(66.59°)\text{ N} = 16$N

$\because R_y > R_x$ অর্থাৎ, লব্ধির উলম্ব উপাংশ বেশি।

Type-03: আয়ত একক ভেক্টর দ্বারা ভেক্টরের প্রকাশ

➲ **Concept:**



কোন ভেক্টর $\vec{R}$ এর x ও y অক্ষের উপাংশ যথাক্রমে $\vec{R}_x$ ও $\vec{R}_y$ হলে আমরা লিখতে পারি, $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$

যেহেতু $\vec{R}_x$ এর দিক x অক্ষের দিকে এবং ভেক্টরটির মান যদি হয় R_x, তাহলে-

$\vec{R}_x = R_x\hat{i}$

একই ভাবে, $\vec{R}_y = R_y\hat{j}$

- সমকোণী ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ী- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$
- ত্রিমাত্রিক ভেক্টরের ক্ষেত্রে- $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$
- $\vec{R}$ ভেক্টরের x, y ও z অক্ষের সাথে কোণ যথাক্রমে θ_x, θ_y ও θ_z হলে,
- $R_x = R\cos\theta_x$

  $R_y = R\cos\theta_y$; $R_z = R\cos\theta_z$

  এবং $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+m\hat{k}$ একটি একক ভেক্টর হলে, m এর মান কত? **[DB'22]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 1

সমাধান: (a); $\vec{A}=\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}+m\hat{k}$

$|\vec{A}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+m^2}\Rightarrow 1=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+m^2}$

$\Rightarrow 1^2=\frac{1}{2}+m^2\Rightarrow m^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

02. $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরটি একটি – **[Ctg.B'22]**

(i) একক ভেক্টর (ii) সঠিক ভেক্টর

(iii) অবস্থান ভেক্টর

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $|\vec{A}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 0$

$\therefore \vec{A}$ একটি সঠিক ভেক্টর। আবার, $|\vec{A}|=\sqrt{3}\neq 1$

$\therefore \vec{A}$ একক ভেক্টর নয়।

03. $3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$ ভেক্টরটির মান– **[Din.B'21][Ans: b]**

(a) 9 একক (b) 13 একক

(c) 18 একক (d) 36 একক

04. $\vec{P}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $\vec{P}$ -এর মান কত? **[SB'19]**

(a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) 1 (d) -1

সমাধান: (b); $|\vec{P}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\vec{P}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

05. ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান কত? **[DB'21]**

(a) $\sqrt{19}$ (b) 6 (c) 9 (d) 19

সমাধান: (a);

$|\vec{P}+\vec{Q}|=\sqrt{(2+1)^2+(1+2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{19}$

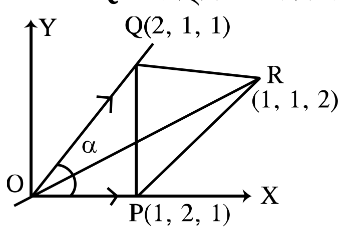
06. $\vec{P}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ভেক্টরটি YZ তলে মান কত? **[RB'21]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{10}$ (c) $\sqrt{13}$ (d) $\sqrt{14}$

সমাধান: (c); $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\mathbf{P(1,2,1)}$ ও $\mathbf{Q(2,1,1)}$। বিন্দু দুটির জন্য সৃষ্ট অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overline{\mathbf{OP}}$ ও $\overline{\mathbf{OQ}}$ । অবস্থান ভেক্টরদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিক অঙ্কন করলে **R** বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\mathbf{R(1,1,2)}$ হয়। **[MB'22]**



(ঘ) উদ্দীপকের Δ**PQR** সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কিনা — গাণিতিক ব্যাখ্যা কর। ৪

সমাধান

ঘ. $\overline{OR}=(1-0)\hat{i}+(1-0)\hat{j}+(2-0)\hat{k}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(2-1)\,\hat{i}+(1-2)\,\hat{j}+(1-1)\,\hat{k}=\hat{i}-\hat{j}$

$\overline{QR}=\overline{OR}-\overline{OQ}=(1-2)\,\hat{i}+(1-1)\,\hat{j}+(2-1)\,\hat{k}=-\hat{i}+\hat{k}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(1-1)\,\hat{i}+(1-2)\,\hat{j}+(2-1)\,\hat{k}=-\hat{j}+\hat{k}$

$|\overline{PQ}|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}; |\overline{QR}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

$|\overline{PR}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

এখানে, $PQ=QR=PR$; সমবাহু ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে না।

সুতরাং, ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে না।

02. $\vec{\mathbf{A}}=\mathbf{4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}$; $\vec{\mathbf{B}}=\mathbf{\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}}$; $\vec{\mathbf{C}}=\mathbf{4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}$ **[RB'21]**

(ঘ) $|\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{B}}|>|\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{C}}|>|\vec{\mathbf{A}}-\vec{\mathbf{C}}|$; সঠিক/সঠিক নয়-যাচাই কর।

সমাধান

ঘ. $\vec{A}-\vec{B}=(4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=3\hat{i}+4\hat{j}\ \therefore |\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ একক

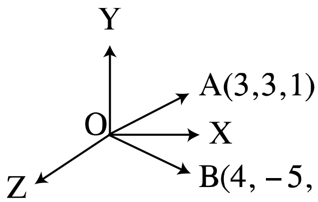
$\vec{B}-\vec{C}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})-(4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})=-3\hat{i}-2\hat{k}$

$\therefore |\vec{B}-\vec{C}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ এবং $\vec{A}-\vec{C}=(4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})=4\hat{j}-2\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}-\vec{C}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

দেখা যায়, $|\vec{A}-\vec{B}|>|\vec{A}-\vec{C}|>|\vec{B}-\vec{C}|$ $\therefore$ বক্তব্যটি সঠিক নয়।

03. নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর যেখানে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $\mathbf{A(3,3,1)}$ এবং $\mathbf{B(4,-5,1)}$ দুটি বিন্দু। **[BB'21]**



(গ) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) **O, A ও B** বিন্দুসমূহের সংযোগে গঠিত ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ কিনা– গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। ৪

সমাধান

গ. $A(3,3,1), B(4,-5,1);\ \overrightarrow{AB}=(4-3)\hat{i}+(-5-3)\hat{j}+(1-1)\hat{k}=\hat{i}-8\hat{j}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $=\frac{1}{\sqrt{65}}(\hat{i}-8\hat{j})$

ঘ. $\overrightarrow{OA}=3\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k};\ OA=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}$

$\overrightarrow{OB}=4\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k};\ OB=\sqrt{4^2+(-5)^2+1}=\sqrt{42}$

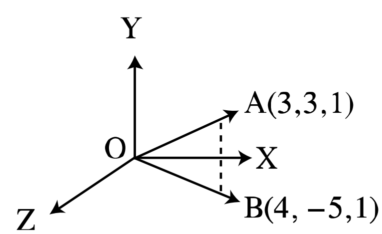
$\overrightarrow{AB}=\hat{i}-8\hat{i};\ AB=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$

$OA^2+OB^2=(\sqrt{19})^2+(\sqrt{42})^2=61$

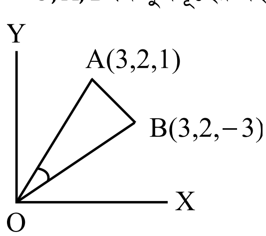
$AB^2=(\sqrt{65})^2=65$

$\therefore OA^2+OB^2\neq AB^2$

$\therefore$ O, A, B বিন্দুসমূহের সংযোগে গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ নয়।



04. **[MB'21]**



(ঘ) **ΔAOB** সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে কিনা –গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

সমাধান

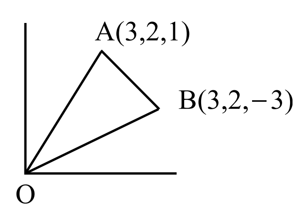
ঘ. $\overrightarrow{OA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k};\overrightarrow{OB}=3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}=-4\hat{k};\ OA=\sqrt{14}$

$OB=\sqrt{22};\ AB=4$

$OA^2+AB^2=14+16=30\neq OB^2$

$\therefore \Delta AOB$ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে না।



05. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\mathbf{P(1, 2, -1)}$, $\mathbf{Q(-2, 1, 1)}$ এবং $\mathbf{R(3, 1, -2)}$, যেখানে, $\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{Q}}$ এবং $\vec{\mathbf{R}}$ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে। [JB'19]

(ঘ) **P, Q** এবং **R** বিন্দুত্রয়ের ক্রম সংযোজন দ্বারা উৎপন্ন ভেক্টরগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্র একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কিনা তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। ৪

সমাধান

ঘ. $\vec{R} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

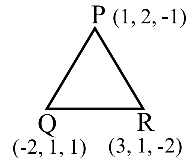
$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (-2-1)\hat{i} + (1-2)\hat{j} + (1+1)\hat{k} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{QR} = \vec{R} - \vec{Q} = (3+2)\hat{i} + (1-1)\hat{j} + (-2-1)\,\hat{k} = 5\hat{i} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{RP} = \vec{P} - \vec{R} = (1-3)\,\hat{i} + (2-1)\,\hat{j} + (-1+2)\hat{k} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14}, |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{34},\ |\overrightarrow{RP}| = \sqrt{6}\ \therefore PQ^2 + RP^2 < QR^2$

$\therefore \Delta PQR$ সমকোণী ত্রিভুজ নয়।



06. দুটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় স্থানাঙ্কদ্বয় যথাক্রমে $\mathbf{A(1, 0, -1)}$ এবং $\mathbf{B(1, 1, 0)}$। [CB'17]

(গ) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

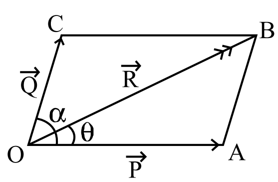
সমাধান

গ. $\overrightarrow{OA} = \hat{i} - \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = \hat{i} + \hat{j}\ \therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\ = (\hat{i} + \hat{j}) - (\hat{i} - \hat{k}) = \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{AB}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর $= \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{j} + \hat{k})$

07. চিত্রটি লক্ষ কর: [SB'19]



$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{4\hat{i} + 3\hat{j}}$; $\vec{\mathbf{Q}} = \mathbf{2\hat{j} + 5\hat{k}}$

(গ) উদ্দীপকের আলোকে $\boldsymbol{\theta}$-এর মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. উদ্দীপকে $\bar{P}$ ও $\bar{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α।

$\bar{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j} \therefore |\bar{P}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ এবং $\bar{Q} = 2\hat{j} + 5\hat{k} \therefore |\bar{Q}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

এখন, $\cos\alpha = \frac{\bar{P}\cdot\bar{Q}}{|\bar{P}||\bar{Q}|} = \frac{6}{5\times\sqrt{29}} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{29}}\right) = 77.12°$

θ এর মান নির্ণয়ে, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \frac{\sqrt{29}\times\sin 77.12°}{5+\sqrt{29}\times\cos 77.12°} = 0.84 \therefore \theta = 40.25°$

Type-04: নদী ও স্রোত

Concept:

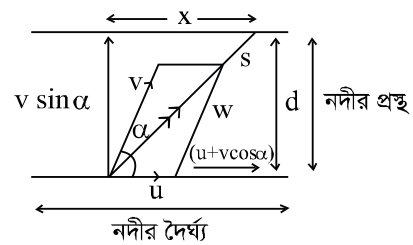
ধরা যাক, নদীতে স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v। নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যকার কোণ α।

নদী পার হওয়ার ক্ষেত্রে নৌকার বা সাতারুর বেগের উল্লম্ব উপাংশই মূলত কাজ করে। তাই এ ক্ষেত্রে সময় বের করার জন্য লব্ধির মান বের করার কোন দরকার নাই।

নদী পারাপারের সময়ের ক্ষেত্রে স্রোতের বেগের কোন ভূমিকা নেই। কারণ স্রোতের বেগের কোনো উপাংশ নদীর প্রস্থ বরাবর কাজ করেনা। স্রোত মূলত নৌকাকে স্রোতের দিক বরাবর কিছুদূর অতিক্রম করায়।

নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ = $v\sin\alpha$

Formulae:



- নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগের কোন উপাংশ নেই।
  নদীর দৈর্ঘ্য বা স্রোত বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ = $v\cos\alpha$
- নদীর দৈর্ঘ্য বা স্রোত বরাবর স্রোতের বেগের উপাংশ = u
  সুতরাং নদীর দৈর্ঘ্য বা স্রোত বরাবর মোট বেগ = $u + v\cos\alpha$
  লব্ধি বেগ = w ; নৌকার সরণ = s
- নদী পারাপারের ক্ষেত্রে সময়, $t = \frac{\text{যেদিক বরাবর দূরত্ব}}{\text{সেদিক বরাবর বেগ এর মান}} = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ}} = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{x}{u+v\cos\alpha} = \frac{s}{w}$
- যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দু থেকে x দূরত্বে পৌছালে, x = স্রোত বরাবর মোট বেগ × নদী পারাপারের সময়

ক্ষুদ্রতম পথে আড়াআড়িভাবে নদী পারাপার	সর্বনিম্ন সময়ে নদী পারাপার
সোজা নদী পার হওয়ার শর্ত: x অক্ষে সরণ ০ হতে হবে বা, $(u + v\cos\alpha)t = 0$ বা, $\cos\alpha = -\frac{u}{v}$ y অক্ষ বরাবর বেগ = লব্ধি বেগ = $v\sin\alpha$	নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় $t = \frac{d}{v\sin\alpha}$ সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে হলে $\sin\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হতে হবে। বা, $\sin\alpha = 1$ সুতরাং, $t_{min} = \frac{d}{v}$ এবং $\alpha = 90^o$

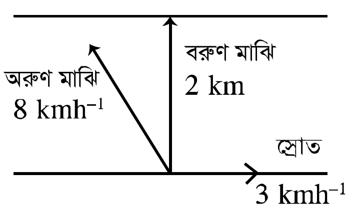
সতর্কতা!

- সোজা নদী পার হওয়ার হওয়ার ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব সর্বনিম্ন হলেও এক্ষেত্রে সময় সর্বনিম্ন নয়।
- অনেক ক্ষেত্রে পারাপার বললে যাওয়া + আসা বোঝানো হয়।

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. স্রোতযুক্ত নদীতে সর্বনিম্ন সময়ে ওপারে যেতে স্রোতের সাথে কীভাবে নৌকা চালনা করতে হবে? **[JB'17][Ans: c]**
(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

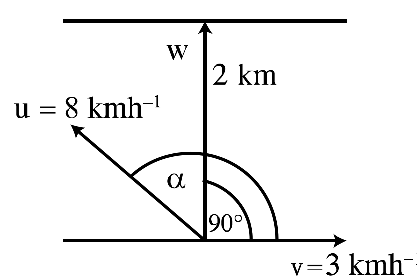
01.  **[RB'22]**

অরুণ মাঝি **8 kmh^{-1}** বেগে নৌকা চালিয়ে নদীর প্রস্থ বরাবর পার হয়। বরুণ মাঝি একই বেগে নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকা চালায়। নদীর প্রস্থ **2 km**।

(গ) উদ্দীপকে অরুণ মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল? ৩
(ঘ) উদ্দীপকের কোন মাঝি কম সময়ে নদী পার হবে? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

সমাধান

গ. স্রোতের বেগ, $v = 3\text{kmh}^{-1}$
নৌকার বেগ, $u = 8\ \text{kmh}^{-1}$
ধরি, লব্ধি বেগ = w
স্রোত বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই, $v\cos 0° + u\cos\alpha = w\cos 90°$
$v + u\cos\alpha = 0$
$\cos\alpha = -\frac{v}{u}$
$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{v}{u}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{8}\right) = 112.02°$



ঘ. অরুণ মাঝির ক্ষেত্রে,

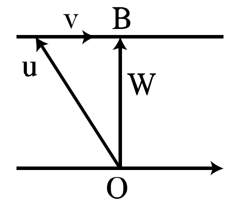
প্রস্থ বরাবর পার হওয়ার ক্ষেত্রে,

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 - v^2}$

$= \sqrt{8^2 - 3^2}$

$= \sqrt{64 - 9}$

$= \sqrt{55}\ \text{kmh}^{-1}$



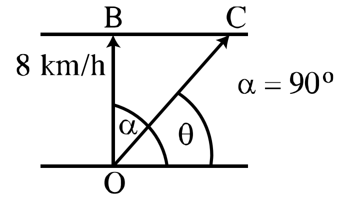
তার ক্ষেত্রে সময়, $d = wt_a \Rightarrow t_a = \frac{d}{w} = \frac{2}{\sqrt{55}} = 0.269\ \text{hour} = 16.18\ \text{min}$

বরুণ মাঝির ক্ষেত্রে,

সময়, $t_b = \frac{d}{u \sin\alpha} = \frac{2}{8 \sin 90°}$

$= \frac{2}{8}\text{h}$

$= 15\ \text{min}$



$\therefore t_b < t_a$ অর্থাৎ বরুণ মাঝির কম সময় লাগবে।

02. **500 m প্রস্থের একটি নদীতে 6 kmh^{-1} বেগে স্রোত প্রবাহিত হচ্ছে। এই নদীটি মাহীর ও নিধি প্রতিযোগিতার উদ্দেশ্যে সাঁতার কেটে পার হওয়ার সিদ্ধান্ত নিলো। মাহীর 10kmh^{-1} বেগে স্রোতের সাথে α কোণে এবং নিধি 9 kmh^{-1} বেগে স্রোতের সাথে লম্বভাবে সাঁতার কাটতে শুরু করল।** **[Ctg.B'22]**

(গ) α কোণের মান কত হলে মাহীর সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে? ৩

(ঘ) উদ্দীপক অনুসারে কে জিতবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

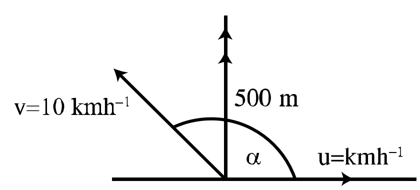
সমাধান

গ. এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 6\ \text{kmh}^{-1}$

মাহীরের বেগ, $v = 10\ \text{kmh}^{-1}$

স্রোত ও মাহীরের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$

লব্ধি কোণ, $\theta = 90°$



আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \Rightarrow \tan 90° = \frac{1}{0} = \frac{10\sin\alpha}{6 + 10\cos\alpha}$

$\Rightarrow 6 + 10\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{10}\right) \Rightarrow \alpha = 126.89°$

সুতরাং স্রোতের সাথে 126.89° কোণে সাঁতার কাটলে মাহীর সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌঁছাতে পারবে।

ঘ. 'গ' হতে পাই, $\alpha = 126.89°$

মাহীরের বেগ, $v_m = 10\ \text{kmh}^{-1} = \frac{10 \times 1000}{3600} = 2.78\ \text{ms}^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $d = 500\text{m}$

নদীর প্রস্থ বরাবর মাহীর বেগের উপাংশ

$\therefore v_m \sin\alpha = 2.78 \sin 126.89° = 2.2234$

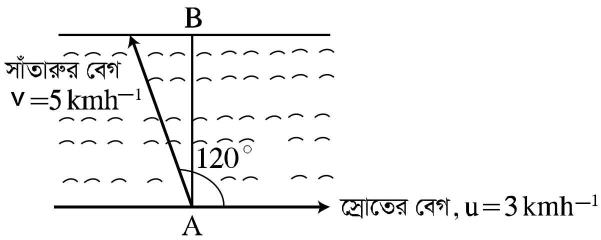
আমরা জানি, $d = v_m \sin\alpha \times t_m; t_m = \frac{d}{v_m \sin\alpha} = \frac{500}{2.2234} \therefore t_m = 224.825 \approx 3.75\ \text{min}$

মাহীরের প্রয়োজনীয় সময়, $t_m = 3.75\ \text{min}$

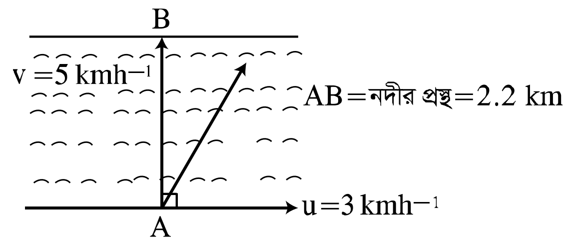
আবার, নিধির বেগ, $v_n = 9\ \text{kmh}^{-1} = 2.5\ \text{ms}^{-1}$

নিধির নদীপার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t_n = \frac{d}{v_n} = \frac{500}{2.5} = 200\ \text{s} = 3.33\ \text{min} \therefore t_m > t_n$ অর্থাৎ, নিধি জিতবে।

03. [CB'22]



চিত্র : ১



চিত্র : ২

2.2 km প্রস্থের একটি নদীতে স্রোতের বেগ **3 kmh^{-1}**। সাঁতার প্রতিযোগিতায় নদী পাড়ি দেওয়ার লক্ষ্যে প্রথম সাঁতারু **5 kmh^{-1}** বেগে চিত্র-১ অনুসারে এবং দ্বিতীয় সাঁতারু একই বেগে চিত্র-২ অনুসারে সাঁতার আরম্ভ করল।

(গ) প্রথম সাঁতারুর লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) উক্ত সাঁতার প্রতিযোগিতার ফলাফল গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর । ৪

সমাধান

গ. স্রোতের বেগ, $u = 3kmh^{-1}$

সাঁতারুর বেগ, $v = 5kmh^{-1}$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120°}$

$= 4.36\ kmh^{-1}$

সাঁতারুর লব্ধি বেগ, $R = 4.36\ kmh^{-1}$

ঘ. প্রথম সাঁতারুর নদী পার হতে সময়,

$t_1 = \dfrac{d}{v\sin\alpha}$

$= \dfrac{2.2}{5\sin 120°} = 0.508h$

এখানে,
$d = 2.2\ km$
$v = 5kmh^{-1}$
$\alpha = 120°$

২য় সাঁতারুর নদী পার হতে সময়,

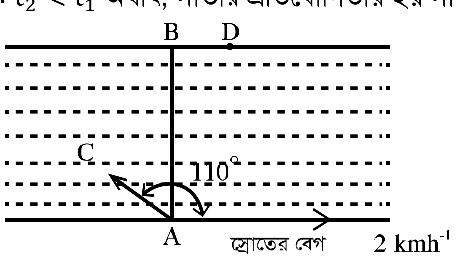
$t_2 = \dfrac{d}{v\sin\alpha'}$

$\therefore t_2 = \dfrac{2.2}{5\sin 90°} = 0.44h$

$d = 2.2\ km$
$v = 5kmh^{-1}$
$\alpha' = 90°$

$\therefore t_2 < t_1$ অর্থাৎ, সাঁতার প্রতিযোগিতায় ২য় সাঁতারু বিজয়ী হবে।

04. [Din.B'22]



চিত্রে স্রোতের নদীতে একজন লোক এক পাড় হতে অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য **4 kmh^{-1}** বেগে **AC** বরাবর নৌকা চালানো শুরু করে। সে অপর পাড়ে **D** বিন্দুতে পৌঁছে। **BD = 0.5 km**, নদীর প্রস্থ = **AB**।

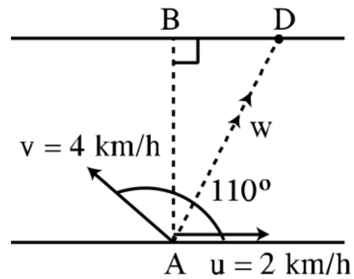
(গ) নদীর প্রস্থ **AB** নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) **AC** বরাবর নৌকা চালানো শুরু করলে অপর পাড়ে পৌঁছতে যে সময় লাগে একই বেগে **AB** বরাবর নৌকা চালানো শুরু করলে অপর পাড়ে পৌঁছতে তার চেয়ে কম নাকি বেশি সময় লাগবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক উত্তরের সপক্ষে মতামত দাও। ৪

সমাধান

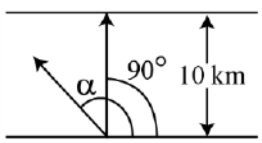
গ.

নৌকার বেগ, $v = 4\ kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 2\ kmh^{-1}$
নদীর সাথে নৌকার বেগের কোণ, $\alpha = 110°$



নদীর প্রস্থ বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $= AB$
নদী বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব $= BD$
নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ $= 4\sin 110° + 2\sin 0° = 3.75877$
নদী বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ $= 4\cos 110° + 2\cos 0°$
$= 0.63192\ ms^{-1}$
নির্দিষ্ট t সময়ে যেকোনো দিকে অতিক্রান্ত দূরত্ব ঐ দিকে বেগের উপাংশের সমানুপাতিক।
$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{3.75877}{0.63192}$
$\Rightarrow AB = 5.948174 \times BD = 5.948174 \times 0.5\ km\ [BD = 0.5\ km]$
$\therefore AB = 2.974\ km$

ঘ. AC বরাবর চালালে অপর পাড়ে যেতে সময় লাগে, $t_1 = \frac{d}{v\sin\alpha}$
প্রথমক্ষেত্রে, $v = 4\ kmh^{-1}$
$\alpha = 110°$
$d = 2.974\ km$
তাহলে, $t_1 = \frac{2.974}{4 \cdot \sin 110°} = 0.79\ h$
আবার, AB বরাবর নৌকা চালালে স্রোত ও নৌকার মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90°$।
এখন নদী পার হতে সময় t_2 হলে, $t_2 = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{2.974}{4 \cdot \sin 90°} = 0.7435\ h$
সুতরাং, AC বরাবর নদী পার হতে AB পথের চেয়ে বেশি সময় লাগবে। অর্থাৎ, নৌকাটি AB পথে রওনা করলেই দ্রুততর সময়ে অপর পাড়ে পৌঁছাতে পারবে।

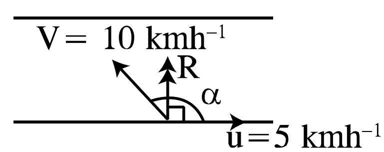
05. 

[DB'21]

10km প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদীতে স্রোতের বেগ $5kmh^{-1}$। প্রথম মাঝি $10kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে α কোণে এবং ২য় মাঝি $10kmh^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে লম্বভাবে নদী পার হতে যাত্রা করল।
(গ) α কোণের মান কত হলে ১ম মাঝি সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে? ৩
(ঘ) কোন মাঝি নদীর অপর পাড়ে আগে পৌঁছাতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

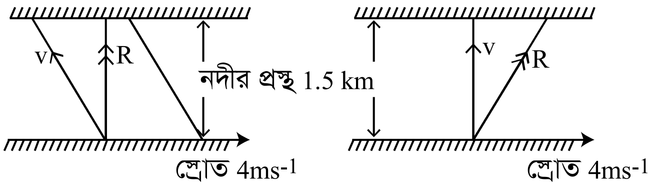
সমাধান

গ. লব্ধি $(\vec{R})$ স্রোত $(\vec{u})$ এর সাথে $90°$ কোণে কাজ করে।



সুতরাং, $\tan 90° = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha} \therefore u + v\cos\alpha = 0$
$\Rightarrow \cos\alpha = \left(-\frac{u}{v}\right) = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$
$\therefore \alpha$ এর মান $120°$ হলে ১ম মাঝি সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

ঘ. ১ম মাঝির নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= v\sin\alpha = 10\ kmh^{-1} \times \sin 120° = 8.66\ kmh^{-1}$
$\therefore$ ১ম মাঝির পার হতে সময়, $t_1 = \frac{10\ km}{8.66\ kmh^{-1}} = 1.1547\ h$
আবার, ২য় মাঝির নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= 10\ kmh^{-1} \times \sin 90° + 5\ kmh^{-1} \times \sin 0°$
$= (10 + 0)\ kmh^{-1} = 10\ kmh^{-1}$
$\therefore$ ২য় মাঝির প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \frac{10\ km}{10\ kmh^{-1}} = 1h \therefore t_2 < t_1$
$\therefore$ ২য় মাঝি আগে পৌঁছাতে পারবে।

06. 

চিত্র-ক চিত্র-খ [RB'21]

[উভয় চিত্রে v = নৌকার বেগ = 6ms^{-1}; R = লব্ধি বেগ]

(গ) চিত্র 'ক' থেকে লব্ধি বেগ **R** নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) কোন চিত্রানুসারে নদী পার হতে কম সময় লাগবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

গ. চিত্র 'ক' তে লব্ধি স্রোতের বেগ, $\vec{u}$ এর সাথে 90° কোণে ক্রিয়া করছে,

$\therefore \tan 90° = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha} \Rightarrow u + v\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{4}{6} \therefore \alpha = 131.81°$

এখন, লব্ধিবেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = 4.47\ \text{ms}^{-1}$

বিকল্প:

লব্ধিবেগ, $R = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4.47\ \text{ms}^{-1}$ $[v = 6\ \text{ms}^{-1};\ u = 4\ \text{ms}^{-1}]$

ঘ. 'গ' হতে প্রাপ্ত, চিত্র 'ক'-এ নৌকা এবং স্রোতের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 131.81°$

চিত্র 'ক' তে নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ, $v\sin\alpha + u\sin(0°) = R = 4.47\ \text{ms}^{-1}$

$\therefore$ পার হতে সময়, $t_1 = \frac{1500\ \text{m}}{4.47\ \text{ms}^{-1}} = 335.57\text{s}$

আবার, চিত্র-(খ) তে, নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= v\sin(90°) + u\sin(0°) = 6\ \text{ms}^{-1}$

$\therefore$ পার হতে সময়, $t_2 = \frac{1500\ \text{m}}{6\ \text{ms}^{-1}} = 250\text{s}$

$\because t_2 < t_1$

$\therefore$ চিত্র-'খ' অনুসারে নদী পার হতে কম সময় লাগবে।

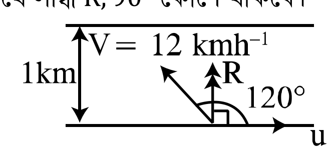
07. **শান্ত একটি কলেজের ছাত্র। তার বাড়ির পাশ দিয়ে 1km প্রশস্ত একটি নদী প্রবাহিত। বাড়ির সোজাসুজি অপর পাড়ে তার কলেজ। একদিন সকালে সে ক্লাস শুরু হওয়ার 5 মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে 12 kmh^{-1} বেগে একটি নৌকায় কলেজের উদ্দেশ্যে রওনা হলো।** [Ctg.B'21]

(গ) নদীতে স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) শান্ত কি যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

গ. এখন, স্রোতের সাথে 90° পথে ঠিক সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌঁছাবে। স্রোতের বেগ $\vec{u}$ এর সাথে লব্ধি $\vec{R}$, 90° কোণে থাকবে।

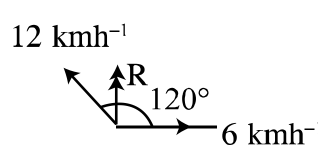


$\tan 90° = \frac{v\sin 120°}{u+v\cos 120°} \Rightarrow u + v\cos 120° = 0$

$\Rightarrow u = -v\cos 120° = -12\ \text{kmh}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ স্রোতের বেগ $= 6\ \text{kmh}^{-1}$, যা তীর বরাবর প্রবাহিত।

ঘ.

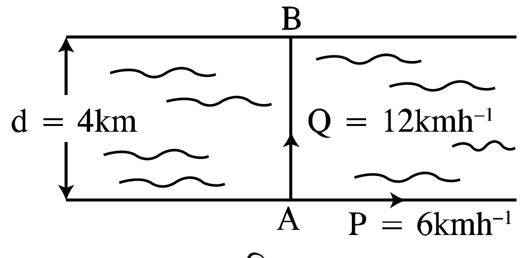


লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{(12)^2 + (6)^2 + 2\times 12\times 6\cos 120°}\ \text{kmh}^{-1} = 6\sqrt{3}\ \text{kmh}^{-1}$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় সময় $= \frac{1\ \text{km}}{6\sqrt{3}\ \text{kmh}^{-1}} = 0.096225\text{h} = 5.7735\ \text{min}$

$\therefore$ 5 মিনিটের বেশি সময় লাগবে, শান্ত যথাসময়ে উপস্থিত হতে পারবে না।

08. **4 km** প্রস্থ একটি নদীর পাড়ের **‘A’** বিন্দু হতে **$12\ kmh^{-1}$** বেগে একটি নৌকা নদীর অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। একজন লোক নৌকা চলার শুরু হতে অপর পাড়ে **‘B’** বিন্দুতে **20** মিনিট অপেক্ষা করে চলে গেল। নদীতে স্রোতের বেগ **$6\ kmh^{-1}$**। **[SB’21]**



চিত্র

(গ) নৌকার লব্ধি বেগের মান নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) উদ্দীপকে অপেক্ষমান লোকটির সাথে নৌকার সাক্ষাৎ হবে কিনা? গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

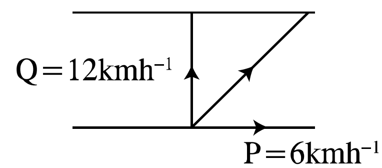
সমাধান

গ.

লব্ধি বেগের মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{6^2 + 12^2 + 2 \times 6 \times 12\cos 90°}$

$= 6\sqrt{5}\ kmh^{-1}$



ঘ. অপর পাড়ে যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় $t = \frac{d}{Q\sin\alpha} = \frac{4km}{12\sin 90°} = \frac{1}{3}\text{hour} = 20\text{ minutes}$

∴ অপেক্ষমান লোকটির সাথে নৌকার সাক্ষাৎ হবে।

09. রবিনদের বাড়ির সামনে **1000m** প্রশস্ত একটি নদী স্রোতঃস্বিনী প্রবাহিত। বাড়ির সোজাসুজি নদীর ঠিক অপর পাড়ে তার কলেজ। একদিন সকালে সে ক্লাস শুরু হওয়ার ঠিক **10** মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে **120°** কোণে **$10\ kmh^{-1}$** বেগের একটি নৌকায় কলেজের উদ্দেশ্যে রওনা দিলো এবং সোজা অপর পাড়ে গিয়ে কলেজে পৌঁছালো। **[**নদীর পাড় হতে কলেজের দূরত্ব নগণ্য বিবেচনা করতে হবে।**]** **[JB’21]**

(গ) উদ্দীপক অনুসারে নদীতে স্রোতের বেগ কত? ৩

(ঘ) রবিন কি যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

সমাধান

গ.

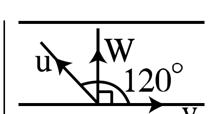
সোজা অপর পাড়ে পৌঁছানোর জন্য,

$\tan 90° = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow v = -u\cos\alpha = -10\cos 120° = 5\ kmh^{-1}$

∴ স্রোতের বেগ $= 5\ kmh^{-1}$



নৌকার বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগ $= v$

$\alpha = 120°$

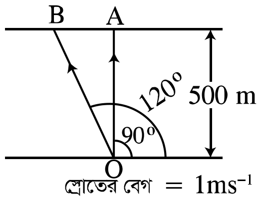
ঘ.

রবিনের অপর পাড়ে পৌঁছাতে সময়, $t = \frac{d}{u\sin\alpha}$

$\therefore t = \frac{1km}{(10\sin 120°)\ kmh^{-1}} = 0.11547h = 6.93\ min$

∴ রবিন সঠিক সময়ে পৌঁছাতে পারবে।

$d = 1000m = 1km$

10. 

[CB'19]

OB বরাবর, করিমের বেগ = $8\ ms^{-1}$

OA বরাবর রহিমের বেগ = $7.5\ ms^{-1}$

(গ) করিম কত বেগে অপর পাড়ে পৌঁছাল? নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) রহিম ও করিমের মধ্যে কে আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

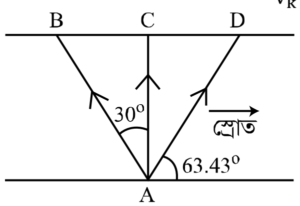
সমাধান

গ. স্রোতের বেগ, $u = 1\ ms^{-1}$; করিমের বেগ, $v = 8\ ms^{-1}$; $\alpha = 120°$

তার লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha} = 7.55\ ms^{-1}$ (**Ans.**)

ঘ. রহিমের ক্ষেত্রে সময়, $t_r = \frac{d}{v_r} = \frac{500}{7.5} = 66.67\ s$ [যেখানে, $d = 500\ m$]

করিমের ক্ষেত্রে সময়, $t_k = \frac{d}{v_k \sin\alpha} = \frac{500}{8\sin 120°} = 72.169\ s$ ∴ রহিম আগে অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

11. 

চিত্রানুযায়ী একটি নদী **31km** প্রশস্ত। দুটি ইঞ্জিন চালিত বোট আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য A হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল, যাদের একটি **AB** বরাবর অপরটি **AC** বরাবর। প্রথমটি আড়াআড়ি পার হয়ে **C** বিন্দুতে পৌঁছালেও দ্বিতীয়টি **D** বিন্দুতে পৌঁছায়। [স্রোতের বেগ $9kmh^{-1}$] [Ctg.B'17]

(গ) উদ্দীপক হতে নৌকার অভিন্ন বেগ হিসাব কর। ৩

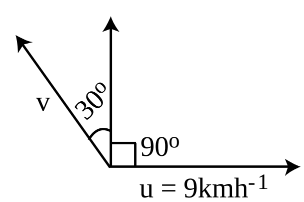
(ঘ) নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পাড়ে পৌঁছায় কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ, $u = 9\ kmh^{-1}$

মনে করি, নৌকার বেগ = v

প্রথম নৌকাটি v বেগে স্রোতের সাথে 120° কোণে যাত্রা শুরু করলে লব্ধি বেগ স্রোতের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।



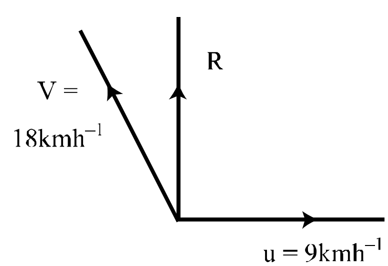
$\therefore \tan 90° = \frac{v\sin 120°}{u + v\cos 120°} \Rightarrow u + v\cos 120° = 0 \Rightarrow u + \left(-\frac{1}{2}\right)v = 0$

$\Rightarrow v = 2u = 18kmh^{-1}$

ঘ. স্রোতের বেগ, $u = 9\ kmh^{-1}$

নৌকার বেগ, $v = 18\ kmh^{-1}$ [(গ) হতে]

১ম নৌকার ক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ নদীর প্রস্থ বরাবর।



∴ লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 120°}$

$= \sqrt{18^2 + 9^2 + 2 \times 9 \times 18 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 15.59\ kmh^{-1}$

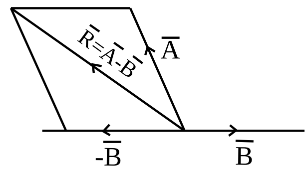
∴ নদী পার হতে সময় = $\frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{লব্ধি বেগ}} = \frac{31}{15.59}hr = 1.989\ hr$

২য় নৌকার ক্ষেত্রে, নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগ = $18\ kmh^{-1}$

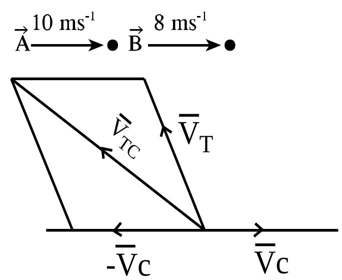
∴ নদী পার হতে সময় = $\frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{প্রস্থ বরাবর বেগ}} = \frac{31}{18}hr = 1.722\ hr$। সুতরাং ২য় নৌকাটি দ্রুত ঐ পাড়ে পৌঁছায়।

Type-05: ভেক্টর বিয়োগ ও আপেক্ষিক বেগ

Concept:



আপেক্ষিক বেগ হচ্ছে প্রকৃতপক্ষে ভেক্টর বিয়োগের একটি বাস্তব উদাহরণ।
প্রথমে আমরা ভেক্টর বিয়োগ সম্পর্কে একটু ধারণা নেই।
ধরা যাক, দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$। এখন $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ কে বিয়োগ করতে হবে।
ধরি, $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ কে বিয়োগ করে প্রাপ্ত ভেক্টর $\vec{R}$। $\therefore\ \vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
অর্থাৎ $\vec{A}$ এর সাথে $-\vec{B}$ যোগ করতে হবে। $\vec{B}$ যদি আমরা উল্টিয়ে দেই অর্থাৎ এর direction যদি 180° ঘুরিয়ে দেই তাহলে $-\vec{B}$ পাওয়া যাবে। চিত্র থেকে আমরা আরও ভালভাবে জিনিসটি বুঝতে পারব।



- একটি গাড়ির বেগ $\vec{v}_C$ ও একটি ট্রাকের বেগ $\vec{v}_T$। এখন গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ $\vec{v}_{TC}$ নির্ণয়ের জন্য আমাদের ট্রাকের বেগ $\vec{v}_T$ থেকে গাড়ির বেগ $\vec{v}_C$ বিয়োগ করতে হবে।
অর্থাৎ, $\vec{v}_{TC} = \vec{v}_T - \vec{v}_C$, লক্ষ্য রাখতে হবে যে এটা ভেক্টর বিয়োগ, শুধু ট্রাকের বেগের সংখ্যামান থেকে গাড়ির বেগের সংখ্যামান বিয়োগ করলেই চলবে না, অবশ্যই তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের বিষয়টি বিবেচনা করতে হবে।

সতর্কতা!
যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ বের করতে হবে তার বেগকেই ভেক্টর বিয়োগ করতে হবে। অর্থাৎ, তাকে উল্টা করে লব্ধি বের করতে হবে।

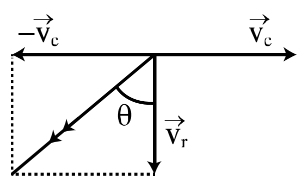
গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. কোনো একদিন $\mathbf{10\ ms^{-1}}$ বেগে খাড়াভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। এ সময় একজন ব্যক্তি $\mathbf{20\ ms^{-1}}$ বেগে গাড়ি চালিয়ে যাচ্ছিলেন। **[SB'22]**

(গ) গাড়ি চালক বৃষ্টির বেগ কত পরিলক্ষিত করবেন? ৩

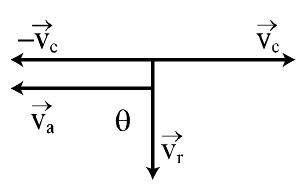
(ঘ) যদি গাড়ির গতির বিপরীত দিকে $\mathbf{25\ ms^{-1}}$ বেগে বায়ুপ্রবাহ চলে তবে ঐ ব্যক্তি দুই ক্ষেত্রে বৃষ্টি বেঁকে পড়ার পরিমাপ একই পরিলক্ষিত করবেন কি? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত উপস্থাপন কর। ৪

সমাধান



গ. বৃষ্টির বেগ, $|\vec{v}_r| = 10\ ms^{-1}$
ব্যক্তির গাড়ির বেগ, $|\vec{v}_c| = 20\ ms^{-1}$
গাড়িচালক বৃষ্টির বেগ পরিলক্ষিত করবেন, $\vec{v}_{rc} = \vec{v}_r - \vec{v}_c$
$= \vec{v}_r + (-\vec{v}_c)$
$|\vec{v}_{rc}| = \sqrt{|\vec{v}_r| + |\vec{v}_c|} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}\ ms^{-1} = 22.36\ ms^{-1}$

$\tan\theta = \frac{|\vec{v}_c|}{|\vec{v}_r|} = \frac{20}{10} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2) \Rightarrow \theta = 63.43°$
$\therefore$ গাড়িচালক বৃষ্টির বেগকে $22.36\ ms^{-1}$ বেগে উলম্বের সাথে 63.43° কোণে পড়তে দেখবে।



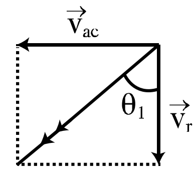
ঘ. বৃষ্টির বেগ, $|\vec{v}_r| = 10\ ms^{-1}$
ব্যক্তির গাড়ির বেগ, $|\vec{v}_c| = 20\ ms^{-1}$
বায়ু প্রবাহ, $|\vec{v}_a| = 25\ ms^{-1}$
গাড়ির বিপরীত বেগ ও বায়ু প্রবাহের লব্ধি, $\vec{v}_{ac} = \vec{v}_a + (-\vec{v}_c)$
$= (25 + 20)\ ms^{-1} = 45\ ms^{-1}$
$\therefore$ বর্তমানে গাড়ির চালক বৃষ্টির বেগ পরিলক্ষিত করবে, $\vec{v}_{r(ac)} = \vec{v}_r + \vec{v}_{ac}$

$= \sqrt{|\vec{v}_r|^2 + |\vec{v}_{ac}|^2}$

$= \sqrt{10^2 + (45)^2} = 46.1 \text{ ms}^{-1}$

$\therefore \tan\theta_1 = \frac{|\vec{v}_{ac}|}{|\vec{v}_r|} = \frac{45}{10} = 4.5$

$\Rightarrow \theta_1 = 77.47°$



'গ' হতে পাই, পূর্বে গাড়ি চালকের বৃষ্টি বেঁকে পড়ার কোণ ছিল উলম্বের সাথে 63.43°। পরবর্তীতে যখন গাড়ির গতির বিপরীত দিকে 25 ms^{-1} বেগে বায়ুপ্রবাহ চলে তখন বৃষ্টি বেঁকে পড়ার বেগ হয় উলম্বের সাথে 77.47°। অর্থাৎ দুই ক্ষেত্রে বৃষ্টি বেঁকে পড়ার পরিমাণ একই হবে না।

02. ঘণ্টায় **40 km** বেগে পূর্ব দিকে চলমান একটি গাড়ির চালক উত্তর দিকে ঘণ্টায় তার বেগের দ্বিগুণ বেগে একটি ট্রাক চলতে দেখল। [পূর্ব দিক ধনাত্মক **x**-অক্ষ ও উত্তর দিক ধনাত্মক **y**-অক্ষ বিবেচনা করা হলো।] **[DB'19]**

(গ) ট্রাকটি প্রকৃতপক্ষে কোন দিকে চলছিল? ৩

(ঘ) ট্রাক ও গাড়িটির প্রকৃত বেগ যে তলে অবস্থিত তার উল্লম্ব দিকে একটি ভেক্টর নির্ণয় করা সম্ভব কিনা? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে দেখাও। ৪

সমাধান

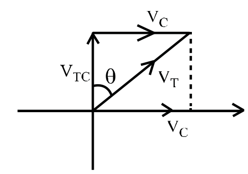
গ. মনে করি, ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে চলছিল।

গাড়ির প্রকৃতবেগ, $v_c = 40 \text{ kmh}^{-1}$; গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের আপেক্ষিক বেগ,

$v_{TC} = 80 \text{ kmh}^{-1}$

$\vec{v}_{TC} + \vec{v}_C = \vec{v}_T \therefore v_T^2 = v_{TC}^2 + v_C^2 \Rightarrow v_T = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5} \text{ kmh}^{-1}$

$\therefore \tan\theta = \frac{v_C}{v_{TC}} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.565°$



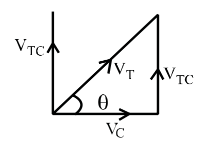
অর্থাৎ, ট্রাকটি $40\sqrt{5} \text{ kmh}^{-1}$ বেগে উত্তর দিকের সাথে 26.565° কোণে পূর্বদিকে চলছিল।

ঘ. এখানে, $v_{TC} = 80 \text{ kmh}^{-1}$; $v_C = 40 \text{ kmh}^{-1}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{TC}}{v_C}\right) = \tan^{-1}\frac{80}{40} = 63.435° \Rightarrow \vec{v}_T = \vec{v}_{TC} + \vec{v}_C \therefore \vec{v}_T = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5}$

প্রকৃতবেগকে উপাংশে প্রকাশ করে পাই, $\vec{v}_C = 40\cos 0°\ \hat{i} + 40\sin 0°\ \hat{j} = 40\ \hat{i} + 0\ \hat{j}$

$\vec{v}_T = 40\sqrt{5}\cos 63.435° + 40\sqrt{5}\sin 63.435° = 40\hat{i} + 80\hat{j}$



উল্লম্বদিকে ভেক্টর $\vec{N}$ হলে, $\vec{N} = \vec{v}_C \times \vec{v}_T = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 40 & 0 & 0 \\ 40 & 80 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(40 \times 80) = 3200\hat{k}$

অর্থাৎ তলের লম্বদিকে একটি ভেক্টর নির্ণয় করা সম্ভব এবং এটি $3200\hat{k}$

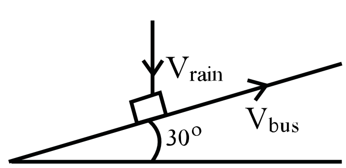
03. **30°** কোণে আনত একটি পাহাড়ের ঢাল বেয়ে **72 kmh^{-1}** সমবেগে একটি বাস ওপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি **6 ms^{-1}** সমবেগে খাড়া নিচে পড়তে শুরু করলো। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন অনুভূমিকভাবে বায়ুপ্রবাহ শুরু হলো। **[RB'19]**

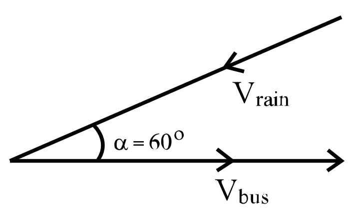
(গ) শুরুতে বাসচালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) বায়ুপ্রবাহের দরুন বাসচালক খাড়া নিচের দিকে বৃষ্টি পড়তে দেখলে বায়ু প্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

গ.





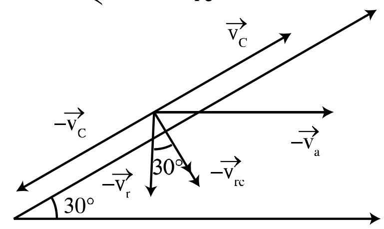
$v_{rain} = 6\text{ms}^{-1}, v_{bus} = 20\text{ms}^{-1}$

$\therefore w = \sqrt{v_{rain}^2 + v_{bus}^2 + 2v_{rain} \cdot v_{bus}\cos\alpha} = \sqrt{6^2 + 20^2 + 2 \times 6 \times 20 \times \cos 60°} = 2\sqrt{139} \text{ ms}^{-1}$ **(Ans.)**

$\tan\theta = \frac{v_{rain}\sin\alpha}{v_{bus} + v_{rain}\cos\alpha} = \frac{6 \times \sin 60°}{20 + 6\cos 60°} \therefore \theta = 12.73°$

অনুভূমিকের সাথে $= (30° + 12.73°)$ কোণ করে $= 42.73°$ **(Ans.)**

ঘ. গাড়ির বেগ $\vec{v}_c$, বৃষ্টির মূলবেগ $\vec{v}_r$, বায়ুপ্রবাহের বেগ $\vec{v}_a$, বায়ুপ্রবাহের উপস্থিতিতে গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টি বেগ $\vec{v}_{rc}$



$v_c = 72\ kmh^{-1} = 20\ ms^{-1}, v_r = 6\ ms^{-1}$
$\vec{v}_{rc} = (\vec{v}_r + \vec{v}_a) - \vec{v}_c = \vec{v}_r + \vec{v}_a + (-\vec{v}_c)$
$\vec{v}_{rc}$ এর লম্ব বরাবর (অর্থাৎ, পাহাড়ের ঢাল বরাবর) উপাংশ নিয়ে পাই,
$v_a \cos 30° - v_c - v_r \sin 30° = 0 \Rightarrow v_a \cos 30° = 20 + 6 \sin 30°$
$\therefore v_a = 26.56\ ms^{-1}$
বায়ু প্রবাহের দিক অনুভূমিকভাবে বাসের দিকে।

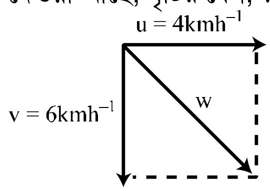
04. কোনো এক বৃষ্টির দিনে নাফিসা জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে **6 kmh^{-1}**বেগে পতিত হচ্ছে। নাফিসা লক্ষ করল, রাস্তায় একজন লোক **4 kmh^{-1}** বেগে হাঁটছে এবং অপরজন **8 kmh^{-1}** বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। তাদের উভয়ের ছাতা ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা। **[RB'17]**

(গ) উদ্দীপকে হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত? ৩

(ঘ) হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একইরকমভাবে বাঁকানো নয়- নাফিসার পর্যবেক্ষণটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

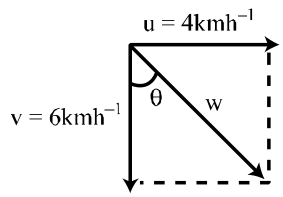
গ. দেওয়া আছে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ kmh^{-1}$, লোকের বেগ, $u = 4\ kmh^{-1}$



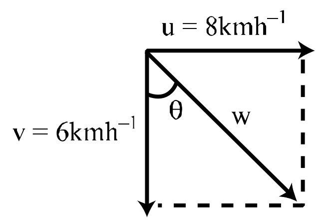
$\therefore$ লব্ধি বেগ, $W = \sqrt{u^2 + v^2} = 2\sqrt{13} kmh^{-1}$

ঘ.

দেওয়া আছে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ kmh^{-1}$
হেঁটে চলন্ত লোকের ক্ষেত্রে, $u = 4kmh^{-1}$
$\therefore$ উলম্বের সাথে কোণ, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33.69°$



সাইকেলে চলন্ত লোকের ক্ষেত্রে,
দেওয়া আছে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ kmh^{-1}$, সাইকেলের বেগ, $u = 8\ kmh^{-1}$
$\therefore$ উলম্বের সাথে কোণ, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13°$
$\therefore$ হেঁটে চলন্ত লোক ও সাইকেলে চলন্ত লোকের ছাতা একইরকমভাবে বাঁকানো নয়।

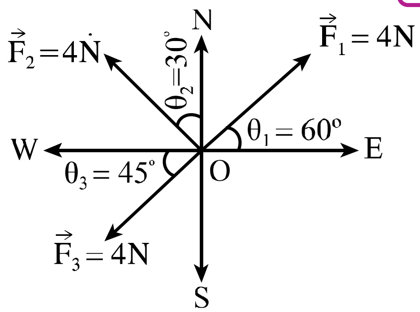


Type-06: দুইয়ের অধিক ভেক্টরের লব্ধি

➲ **Concept:**

দুটি ভেক্টর দেওয়া থাকলে এদের লব্ধি নির্ণয় করা সহজ। কিন্তু যদি তিনটি বা চারটি বা পাঁচটি ভেক্টর দেওয়া থাকে, তবে এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে উপাংশের দ্বারা। যেমন: P_1, P_2, P_3 ভেক্টর তিনটি **x** অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ কোণ উৎপন্ন করে এবং এদের লব্ধি R যদি θ কোণ উৎপন্ন করে তবে,
$R\cos\theta = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_2 + P_3\cos\theta_3 \dots\dots\dots (i)$
অর্থাৎ, লব্ধির x উপাংশ প্রতিটি ভেক্টরের x উপাংশের যোগফলের সমান হবে। অনুরূপভাবে লব্ধির y উপাংশ প্রতিটি ভেক্টরের y উপাংশের যোগফলের সমান হবে।
$\therefore R\sin\theta = P_1\sin\theta_1 + P_2\sin\theta_2 + P_3\sin\theta_3 \dots\dots\dots (ii)$
তাহলে, $(i)^2 + (ii)^2 = (R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2$
$\therefore (ii) \div (i) = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta$
শেষকথা, প্রশ্নে যদি x অক্ষ (axis) বলা না থাকে তাহলে, যে কোন একটি Vector এর দিক কে x অক্ষ ধরব, এবং এর সাথে লম্ব দিক হবে y অক্ষ।

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. 

[BB'22]

চিত্রে তিনটি সমতলীয় ভেক্টর O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল রয়েছে।

(ঘ) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ও $\vec{F}_3$ ভেক্টর তিনটির মিলিত ফল কোন দিকে ক্রিয়া করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মন্তব্য কর। ৪

সমাধান

ঘ. $\vec{F}_1 = F_1 \cos 60° \hat{i} + F_1 \sin 60° \hat{j} = 4 \cos 60° \hat{i} + 4 \sin 60° \hat{j} = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$

$\vec{F}_1 = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$; $\vec{F}_2 = -2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$

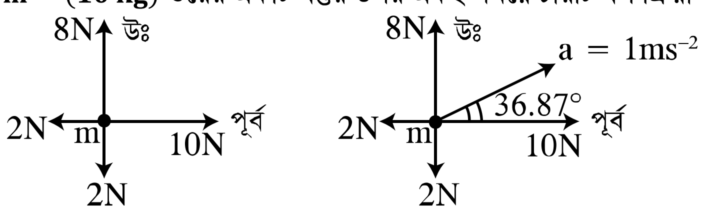
$\vec{F}_3$ ভেক্টরটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $180° + 45° = 225°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \vec{F}_3 = 4 \cos 225° \hat{i} + 4 \sin 225° \hat{j} = -2\sqrt{2}\hat{i} - 2\sqrt{2}\hat{j}$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -2\sqrt{2}\hat{i} + (4\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\hat{j}$

$\therefore$ x-অক্ষের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণ $= 180° - \tan^{-1}\left|\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right| = 124.6°$

02. m = (**10 kg**) ভরের একটি বস্তুর উপর একই সময়ে চারটি বল ক্রিয়া করছে, যা ১ নং চিত্রে দেখানো হলো- [SB'21]



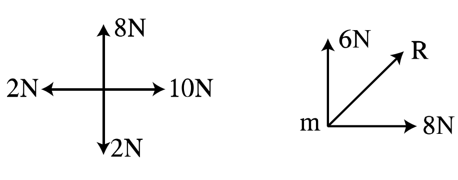
চিত্র-১ চিত্র-২

(গ) ১ নং চিত্রে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বলের মান কত? ৩

(ঘ) ১ নং চিত্রের আলোকে ২ নং চিত্রের সঠিকতা যাচাই কর। ৪

সমাধান

গ.



চিত্র-১ চিত্র-২

নিট বলের মান $R = \sqrt{(10-2)^2 + (8-2)^2} = 10$ N

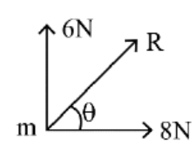
ঘ. গ হতে প্রাপ্ত, R = 10N

$\therefore ma = 10 \Rightarrow 10 \times a = 10 \Rightarrow a = 1$ ms^{-2}

আবার, $\tan\theta = \frac{6}{8} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \theta = 36.87°$

$\therefore$ ১ নং চিত্রের আলোকে ২ নং চিত্র সঠিক।

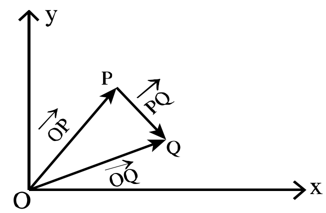


Type-07: অবস্থান ভেক্টর নির্ণয়

ধরা যাক, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z)। তাহলে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর: $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

আবার, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ হলে, P এর সাপেক্ষে Q এর অবস্থান-

$\overrightarrow{PQ} =$ শেষ অবস্থান $-$ আদি অবস্থান $= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$



গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দু **O(0, 0, 0), P(2, 4, 2)** এবং **Q (2, −4, −4)**। **[DB'22]**

(গ) $\overrightarrow{PQ}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, $O\,(0, 0, 0), P\,(2, 4, 2), Q\,(2, -4, -4)$

এখন, $\overrightarrow{OP} = (2-0)\hat{i} + (4-0)\hat{j} + (2-0)\hat{k} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{OQ} = (2-0)\hat{i} + (-4-0)\hat{j} + (-4-0)\hat{k} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

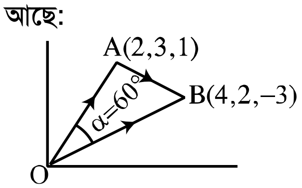
অতএব, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k} - 2\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$= -8\hat{j} - 6\hat{k}$

$\overrightarrow{PQ}$ এর মান, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$

02. নিম্নের চিত্রে দুটি বিন্দু **A** ও **B** স্থানাংক দেয়া আছে: **[BB'17]**



(গ) **AB** সংযোগকারী ভেক্টরের মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

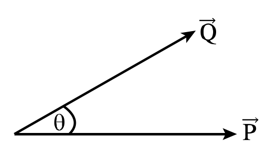
$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$

Type-08: ভেক্টরের ডট গুণন

Concept:

- P ও Q দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে এদের ডট গুণ $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$
- $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$
- $\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$ হলে, $\vec{P}.\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z.$



অভিক্ষেপ নির্ণয়:

- $P\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{Q}$ এবং $Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P}$
- $P\cos\theta$ হল $\vec{P}$ এর অভিক্ষেপ $\vec{Q}$ এর উপর
- $Q\cos\theta$ হল $\vec{Q}$ এর অভিক্ষেপ $\vec{P}$ এর উপর

লক্ষণীয়: অভিক্ষেপ হল একটি স্কেলার রাশি।

♦ উপাংশ নির্ণয়:

➢ $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ = ($\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ) × ($\vec{P}$ এর দিকে একক ভেক্টর)

$$= (Q\cos\theta) \times \left(\frac{\vec{P}}{P}\right) = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} \times \frac{\vec{P}}{P}$$

লক্ষণীয়: উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি।

দুটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত	ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়
$\vec{P}$, $\vec{Q}$ লম্ব হলে $\vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$	$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$

সতর্কতা!

♦ লম্ব অভিক্ষেপ একটি স্কেলার রাশি।

♦ উপাংশ একটি ভেক্টর।

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\hat{j}$ এবং $(\hat{i}+\hat{j})$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RB'22]**

(a) 0° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: (b); ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \cos^{-1}\left\{\frac{(\hat{j})\cdot(\hat{i}+\hat{j})}{|\hat{j}|\cdot|\hat{i}+\hat{j}|}\right\} = \cos^{-1}\left(\frac{0+1}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

02. $\vec{A} = \hat{i}, \vec{B} = 2\hat{i}+\hat{k}, \vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ- **[SB'22]**

(a) 25.12° (b) 26.57° (c) 90.67° (d) 180.25°

সমাধান: (b); ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(\hat{i})\cdot(2\hat{i}+\hat{k})}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}\right\}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2+0}{1\cdot\sqrt{5}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26.57°$$

03. $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i}-2\hat{j}$। m এর মান কত হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব? **[JB'22]**

(a) −3 (b) $-\frac{3}{2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) 3

সমাধান: (d); ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$\Rightarrow (2\hat{i}+3\hat{j})\cdot(m\hat{i}-2\hat{j}) = 0 \Rightarrow 2m-6 = 0 \therefore m = 3$

04. $\vec{A} = 3\hat{i}+6\hat{j}$ এর উপর লম্ব কোনটি? **[CB'22]**

(a) $3\hat{i}-6\hat{j}$ (b) $3\hat{i}$ (c) $8\hat{k}$ (d) $6\hat{j}$

সমাধান: (c); $\vec{A}\cdot(8\hat{k}) = (3\hat{i}+6\hat{j})\cdot(8\hat{k}) = 0+0+0 = 0 \therefore 8\hat{k}, \vec{A}$ এর উপর লম্ব।

05. 4 একক ও 5 একক মানের দুটি ভেক্টর কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়াশীল হলে স্কেলার গুণফল হবে– **[DB'21]**

(a) 0 একক (b) 1 একক

(c) 10 একক (d) 100 একক

সমাধান: (c); $|\vec{A}| = 4, |\vec{B}| = 5$ স্কেলার গুণফল,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos60° = 4\times5\times\frac{1}{2} = 10$

06. একটি কণার উপর $\vec{F} = (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$N বল প্রয়োগ করায় কণাটির $\vec{r} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ m সরণ ঘটে। $\vec{F}$ ও $\vec{r}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[Ctg.B'21]**

(a) 48.19° (b) 51.88° (c) 81.84° (d) 84.53°

সমাধান: (b); $\frac{\vec{F}\cdot\vec{r}}{|\vec{F}||\vec{r}|} = \cos\theta \Rightarrow \theta = 51.88°$

07. $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}; \vec{B} = 6\hat{i}-m\hat{j}+4\hat{k}$, m এর মান কত হলে, ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে? **[Din.B'21][Ans: b]**

(a) 9 (b) 11 (c) 12 (d) 13

সমাধান: (b); $\vec{A}\cdot\vec{B} = 18-2m+4$

$\Rightarrow 0 = 22-2m \Rightarrow m = 11$

08. $(\hat{i}+\hat{j})\cdot\hat{k}$ -এর মান হবে- **[Ctg.B'19][Ans: c]**

(a) $\hat{i}$ (b) $\hat{j}$ (c) 0 (d) 1

সমাধান: (c); $(\hat{i}+\hat{j})\cdot\hat{k} = \hat{i}\cdot\hat{k}+\hat{j}\cdot\hat{k} = 0+0 = 0$

09. $\vec{A} = 2\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}, \vec{B} = p\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$, p-এর মান কত হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? **[Ctg.B'19]**

(a) −4 (b) −1 (c) 4 (d) 5

সমাধান: (c); ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow (2\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k})\cdot(p\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 2p-5-3 = 0 \Rightarrow p = 4$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দু $\mathbf{O(0,0,0)}$, $\mathbf{P(2,4,2)}$ এবং $\mathbf{Q\ (2,-4,-4\ )}$। [DB'22]

(ঘ) **P** ও **Q** এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে কিনা যাচাই কর। ৪

সমাধান

ঘ. দেওয়া আছে, $O\ (0,0,0), P\ (2,4,2), Q\ (2,-4,-4)$

এখন, P ও Q এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে,

$\overrightarrow{OP} = (2-0)\hat{i} + (4-0)\hat{j} + (2-0)\hat{k} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{OQ} = (2-0)\hat{i} + (-4-0)\hat{j} + (-4-0)\hat{k} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

ধরি, $\overrightarrow{OP} = \overline{A}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \overline{B}$

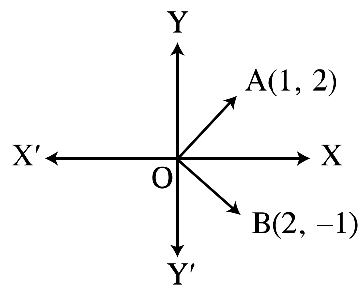
পরস্পর লম্ব হলে, $\overline{A}\cdot\overline{B} = 0$ হতে হবে।

$\overline{A}\cdot\overline{B} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right)\cdot(2\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4 - 16 - 8 = -20$

যেহেতু, $\overline{A}\cdot\overline{B} \neq 0$, তাই P ও Q এর অবস্থান ভেক্টর পরস্পর লম্ব নয়।

02. চিত্রটি লক্ষ কর এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: [JB'22]



(ঘ) উদ্দীপকের $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ এবং $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব কিনা- গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

সমাধান

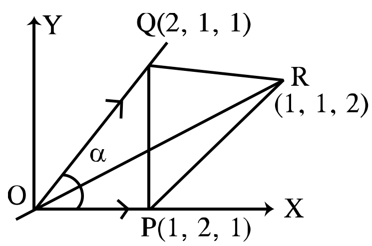
ঘ. $\overrightarrow{OA} = (1-0)\ \hat{i} + (2-0)\hat{j} = \hat{i} + 2\hat{j}$

$\overrightarrow{OB} = (2-0)\hat{i} + (-1-0)\hat{j} = 2\hat{i} - \hat{j}$

এখন, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \left(\hat{i} + 2\hat{j}\right)\cdot\left(2\hat{i} - \hat{j}\right) = 2 - 2 = 0$

যেহেতু $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ এর dot গুণন 0, তাই তারা পরস্পর লম্ব।

03. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\mathbf{P(1,2,1\ )}$ ও $\mathbf{Q(2,1,1)}$। বিন্দু দুটির জন্য সৃষ্ট অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ ও $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$। অবস্থান ভেক্টরদ্বয়কে সন্নিহিত বাহু ধরে সামান্তরিক অঙ্কন করলে **R** বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\mathbf{R(\ 1,1,2)}$ হয়। [MB'22]



(গ) $\boldsymbol{\alpha}$ কোণের মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\overrightarrow{OP} = (1-0)\hat{i} + (2-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OQ} = (2-0)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (1-0)\hat{k} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2 + 2 + 1 = 5$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

আমরা জানি, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 33.56°$

$\therefore$ α কোণের মান 33.56°।

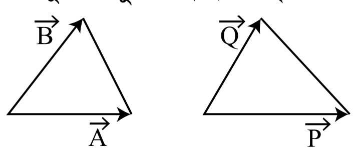
04. $\vec{\mathbf{A}} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{\mathbf{B}} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{\mathbf{C}} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ **[RB'21]**

(গ) $\vec{\mathbf{C}}$ বরাবর $\vec{\mathbf{B}}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান

গ. $\vec{C}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $|\vec{B}|\cos\theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4+4-1}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (**Ans.**)

05. $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে। $\vec{\mathbf{P}}$ ও $\vec{\mathbf{Q}}$ ভেক্টরদ্বয় অপর একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে, যেখানে $\vec{\mathbf{P}} = 3\vec{\mathbf{A}}$ এবং $\vec{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}$। **[Ctg.B'21]**



(গ) $\vec{\mathbf{A}}$ ও $\vec{\mathbf{B}}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{(2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}) \cdot (\sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 2 + 3}\sqrt{3 + 3^2 + 4}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3 \times 4} = 0.931 \therefore \theta = 21.424°$

06. নিচে তিনটি ভেক্টর দেওয়া আছে: **[BB'21]**

$\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{\mathbf{C}} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

(গ) $\vec{\mathbf{A}}$ এবং $\vec{\mathbf{C}}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? ৩

সমাধান

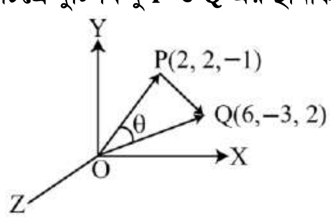
গ. $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\,;\, \vec{C} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}\,;\; C = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

$\vec{A} \cdot \vec{C} = 8 + 6 - 12 = 2$

$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{\mathbf{AC}} = \frac{2}{29} \Rightarrow \theta = 86.045°$ (**Ans.**)

07. চিত্রে দুটি বিন্দু **P** ও **Q** এর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ ও $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ যথাক্রমে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করছে। **[JB'21]**



(গ) $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ ও $\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\boldsymbol{\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\,;\ OP = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

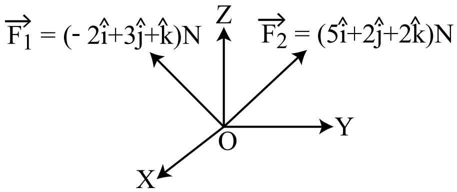
$\overrightarrow{OQ} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}\,;\ OQ = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| \cos\theta \Rightarrow (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 3 \times 7 \times \cos\theta$

$\Rightarrow 12 - 6 - 2 = 21\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4}{21} = 79.019°$

$\therefore \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $79.019°$ (**Ans.**)

08. **[CB'21]**



চিত্রে $\vec{F}_1$ ও $\vec{F}_2$ বলদ্বয় **O** বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

(ঘ) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ও $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ পরস্পর লম্ব কিনা যাচাই কর। ৪

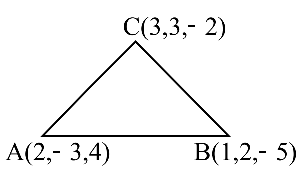
সমাধান

ঘ. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}\,;\ \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -7\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = -21 + 5 - 3 = -19$

$\because (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ এবং $(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ এর ডট গুণফল 0 নয়। তাই এরা পরস্পর লম্ব নয়।

09. চিত্রটি লক্ষ কর এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: **[Din.B'21]**



(গ) $\angle$**BAC** কোণ নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

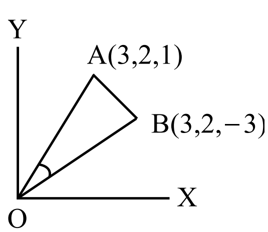
গ. $\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 9\hat{k}\,;\ AB = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-9)^2} = \sqrt{107}$

$\overrightarrow{AC} = \hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}\,;\ AC = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{73}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\angle BAC$

$\Rightarrow -1 + 30 + 54 = \sqrt{107}\,\sqrt{73}\cos\angle BAC \Rightarrow \angle BAC = 20.094°$

10. **[MB'21]**



(গ) উদ্দীপকের আলোকে $\angle$**AOB** নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\overrightarrow{OA} = \vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

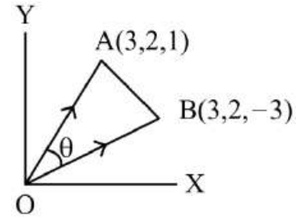
$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 9 + 4 - 3 = 10$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{10}{\sqrt{14\times22}}$

$\theta = 55.264°$

$\therefore \angle AOB = 55.264°$



11. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\mathbf{P(1,2,-1)}, \mathbf{Q(-2,1,1)}$ এবং $\mathbf{R(3,1,-2)}$, যেখানে, $\vec{P}, \vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে। **[JB'19]**

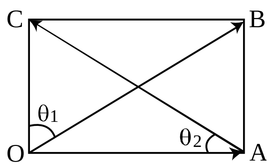
(গ) $\vec{P}$ -এর ওপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. এখানে, $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\,;\vec{Q} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

Q এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{-2+2-1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

12. নিচের চিত্র অনুসারে **OABC** একটি আয়তক্ষেত্র। এর **OA** এবং **OB** বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে। **[DB'17]**



(ঘ) উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2 এর মধ্যে কোনটি বড় তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর। ৪

সমাধান

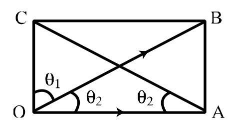
ঘ. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta_2 \Rightarrow (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta_2$

$\Rightarrow 2 + 6 - 2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} \cdot \cos\theta_2$

$\Rightarrow 6 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{6}{\sqrt{6}.\sqrt{17}} \Rightarrow \theta_2 = 53.55°$

$\therefore \theta_1 = 90° - \theta_2 = 36.45°$

সুতরাং, $\theta_2 > \theta_1$



Type-09: দিক কোসাইন

Concept:

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হলে ভেক্টরটির x, y, z অক্ষ বরাবর দিক কোসাইন,

cos (ঐ অক্ষের সাথে $\vec{A}$ এর কোণ) = ঐ অক্ষ বরাবর ভেক্টরের উপাংশ ÷ ভেক্টরের মান

$\therefore \cos\theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_x = \cos^{-1}\frac{A_x}{|\vec{A}|} \quad \left[|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\right]$

$\cos\theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_y = \cos^{-1}\frac{A_y}{|\vec{A}|}$ এবং $\cos\theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \Rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\frac{A_z}{|\vec{A}|}$

এখানে θ_x, θ_y এবং θ_z হচ্ছে x, y, z অক্ষের সাথে $\vec{A}$ যে কোণগুলো তৈরি করে এবং $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\,\hat{j}$ ভেক্টরটি y-অক্ষের সাথে কত কোণে ক্রিয়াশীল? **[DB'22]**

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: (b); y-অক্ষের সাথে কোণ,

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{3})^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 30°$$

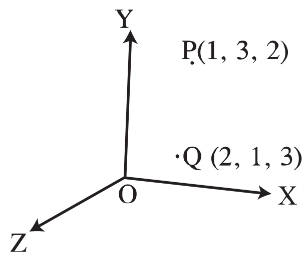
02. Y- অক্ষের সাথে $\vec{r} = 4\hat{i} - 4\hat{k}$ ভেক্টরের উৎপন্ন কোণ হবে – **[Din.B'17]**

(a) 0° (b) 45°
(c) 90° (d) 180°

সমাধান:(c); $\vec{r}\cdot\hat{j} = |r|\cos\theta$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. 

[Din.B'22]

চিত্রের **P** ও **Q** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$.

(ঘ) $\vec{P} + \vec{Q}$ ও $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় **+Y** অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে কিনা? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। 8

সমাধান

ঘ. দেওয়া আছে, $\vec{P} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{P} + \vec{Q} = (1+2)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (2+3)\hat{k} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

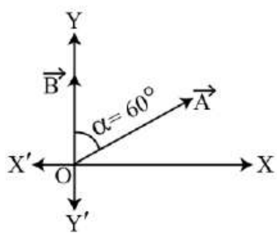
$\vec{P} - \vec{Q} = (1-2)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (2-3)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{P} + \vec{Q}$ ভেক্টরটি +Y-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান θ_1 হলে,

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}\right) = 55.55°$

আবার, $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরটি +Y-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান θ_2 হলে, $\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}\right) = 35.264°$

$\vec{P} + \vec{Q}$ ও $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় যথাক্রমে +y-অক্ষের সাথে 55.55° এবং 35.264° কোণ উৎপন্ন করে যাদের মান সমান নয়। অর্থাৎ, ভেক্টরদ্বয় +Y-অক্ষের সাথে একই পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে না।

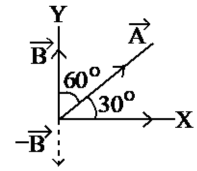
02. 

[Din.B'21]

চিত্রে $|\vec{A}| = 5N$ ও $|\vec{B}| = 8N$

(ঘ) $(\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টরটি **X** অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? প্রয়োজনীয় চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। 8

সমাধান



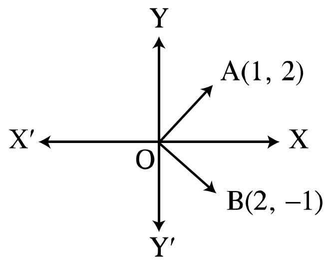
ঘ. $\vec{B} = 8\hat{j}\,;\vec{A} = 5\cos 30°\,\hat{i} + 5\sin 30°\,\hat{j}$

$\vec{A} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{5}{2}\hat{j} \therefore \vec{A} - \vec{B} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{i} - \frac{11}{2}\hat{j} = \vec{C}$

$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{49} = 7$

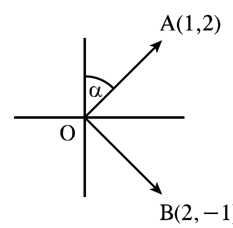
X-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta_x = \cos^{-1}\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{7} \Rightarrow \theta_x = 51.787°$

03. চিত্রটি লক্ষ কর এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: [JB'22]



(গ) উদ্দীপকের $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরটি Y অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? ৩

সমাধান



গ. এখানে, $A(1,2), O(0,0)$ এবং $B(2,-1)$

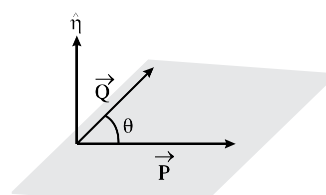
$\overrightarrow{OA} = (1-0)\,\hat{i} + (2-0)\hat{j} = \hat{i} + 2\hat{j}$

ধরি, Y অক্ষের সাথে α কোণ করে।

তাহলে, $\tan\alpha = \frac{1}{2} \therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57°$

Type-10: ভেক্টরের ক্রস গুণন

Concept:



➢ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}\times\vec{Q} = PQ\sin\theta\,\hat{\eta}$;

লক্ষণীয়: $\vec{P}\times\vec{Q} = -\vec{Q}\times\vec{P}$

◆ **তলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয়:**

➢ $\vec{A}, \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{\eta}$; [$\hat{\eta}$ একক ভেক্টরের দিক হবে $\vec{A}$ হতে $\vec{B}$ এর দিকে ডানহাতি স্ক্রু ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হবে]

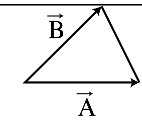
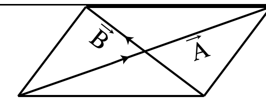
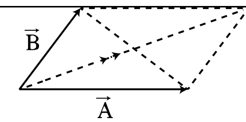
$$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{AB\sin\theta}$$

◆ **দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হওয়া:**

➢ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ তখনই হবে যখন $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ হবে।

➢ যদি দুটি ভেক্টর, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ও $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হয় তাহলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।

♦ **ক্ষেত্রফল নির্ণয়:**

➤ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$	
➤ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$	
➤ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে এ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$	

♦ **আয়তন নির্ণয়:**

➤ একটি সামান্তরিক ঘনবস্তুর বাহু তিনটি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে এর আয়তন $= \vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,.\,(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.\,(\vec{a}\times\vec{b})$

➤ যদি তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হয় তবে ঐ ঘনবস্তুর আয়তন শূন্য $(V = 0)$

$$V = \vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,.\,(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.\,(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $(\hat{i}\times\hat{j})\times(\hat{i}\times\hat{k}) = ?$ **[RB'22]**

(a) $\hat{i}$ (b) $\hat{j}$ (c) $\hat{k}$ (d) $-\hat{i}$

সমাধান: (a); $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$ ও $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$

তাহলে, $(\hat{i}\times\hat{j})\times(\hat{i}\times\hat{k}) = \hat{k}\times-\hat{j} = \hat{i}$

02. $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ আয়ত একক ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থিত সেই তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর হলো- **[Ctg.B'22]**

(a) $(\hat{j}\times\hat{k})$ (b) $(\hat{i}\times\hat{j})$ (c) $(\hat{k}\times\hat{i})$ (d) $(\hat{i}\times\hat{i})$

সমাধান: (a); $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\,;\,\hat{i}\perp\hat{j}$

এবং $\hat{i}+\hat{k};\ |\hat{i}| = \sqrt{1^2} = 1$

03. 3 N ও 4 N মানের দুটি বল একটি বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে এদের ভেক্টর গুণফলের মান হবে- **[Ctg.B'22]**

(a) 0 N (b) 5 N (c) 7 N (d) 12 N

সমাধান: (d); ধরি, $|\vec{P}| = 3N$ এবং $|Q| = 4N$

$\therefore \theta_{PQ} = 90^\circ \therefore |\vec{P}\times\vec{Q}| = |\vec{P}|\cdot|\vec{Q}|\sin\theta_{PQ}$

$= 3\times4\times\sin 90^\circ = 12N$

04. $\hat{j}\times(\hat{j}\times\hat{k}) =$ কত? **[SB'22, RB'21]**

(a) $-\hat{k}$ (b) 0 (c) $\hat{k}$ (d) $\hat{i}$

সমাধান: (a); $\hat{j}\times(\hat{j}\times\hat{k}) = \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$

05. $\hat{i}\cdot(\hat{k}\times\hat{j}) =$ কত? **[MB'22]**

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\hat{k}$

সমাধান: (b); $\hat{i}\cdot(\hat{k}\times\hat{j}) = -\hat{i}\cdot\hat{i} = -1\quad[\hat{i}\cdot\hat{i} = 1]$

06. $(\hat{j}+\hat{k})\times\hat{k} = ?$ **[DB'21]**

(a) 1 (b) $\hat{i}$ (c) $\hat{j}$ (d) $\hat{k}$

সমাধান: (b); $\hat{j}\times\hat{k}+\hat{k}\times\hat{k} = \hat{i}$

07. $\vec{A} = 5\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k}\,;\vec{B} = 15\hat{i}+m\hat{j}+9\hat{k}\,;\,m$ এর মান কত হলে $\vec{A}\parallel\vec{B}$ হবে? **[Ctg.B'21]**

(a) 15 (b) -15 (c) 16 (d) -16

সমাধান: (b); $\frac{5}{15} = \frac{-5}{m} = \frac{3}{9} \Rightarrow m = -15$

08. দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল $\sqrt{18}$ এবং ভেক্টর গুণফল $\sqrt{6}$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে– **[BB'21][Ans: d]**

(a) 120° (b) 90° (c) 60° (d) 30°

সমাধান: (d); $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = \sqrt{18}\ldots\ldots\ldots$ (i)

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta = \sqrt{6}\ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) $\div$ (i) $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,;\theta = 30^\circ$

09. $\vec{A} = 2\hat{i}+x\hat{j}-4\hat{k}$ ও $\vec{B} = y\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$। x ও y এর মান কত হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে? **[DB'19]**

(a) $x = 3, y = 4$ (b) $x = 4, y = 3$

(c) $x = 6, y = 2$ (d) $x = 12,\ y = 1$

সমাধান: (a); $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{6} = \frac{-4}{-8} \Rightarrow x = 3,\ y = 4$

10. $(\hat{i}\times\hat{k})\times(\hat{j}\times\hat{k}) = ?$ **[BB'17]**

(a) $\hat{0}$ (b) $\hat{i}$ (c) $\hat{j}$ (d) $\hat{k}$

সমাধান: (d); $(\hat{i}\times\hat{k})\times(\hat{j}\times\hat{k}) = (-\hat{j})\times\hat{i}$

$= -\hat{j}\times\hat{i} = -(-\hat{k}) = \hat{k}$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
এবং $\vec{C} = (6xy + z^3)\hat{i} - (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$. **[RB’22]**

(গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

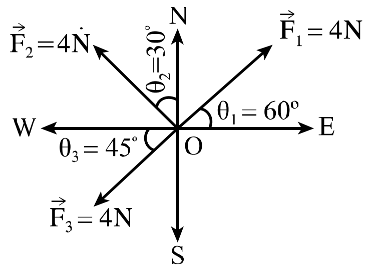
সমাধান

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্বদিকে ভেক্টর।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(4-3) - \hat{j}(4+6) + \hat{k}(-6-12) = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$$

একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{\hat{i}-10\hat{j}-18\hat{k}}{\sqrt{1^2+(-10)^2+(-18)^2}} = \frac{\hat{i}-10\hat{j}-18\hat{k}}{\sqrt{425}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{425}} - \frac{10\hat{j}}{\sqrt{425}} - \frac{18\hat{k}}{\sqrt{425}}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্বদিকে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{425}} - \frac{10\hat{j}}{\sqrt{425}} - \frac{18\hat{k}}{\sqrt{425}}$

02. 

[BB’22]

চিত্রে তিনটি সমতলীয় ভেক্টর **O** বিন্দুতে ক্রিয়াশীল রয়েছে।

(গ) $\mathbf{F_1}$ ও $\mathbf{F_2}$ ভেক্টর দুটি একটি সামান্তরিকের দু’টি বাহু নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

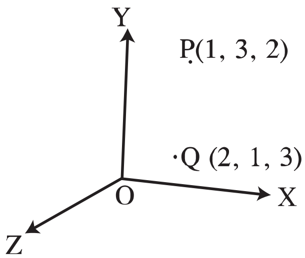
গ.

ধরি, WE → x-অক্ষ
SN → y-অক্ষ
দেওয়া আছে, $|F_1| = 4N$
$|F_2| = 4N$
x-অক্ষের সাথে F_1 এর কোণ $= 60°$
x-অক্ষের সাথে F_2 এর কোণ $= (30+90)° = 120°$

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos 60°\,\hat{i} + F_1 \sin 60°\,\hat{j}$$
$$= 4\cos 60°\,\hat{i} + 4\sin 60°\,\hat{j}$$
$$= 2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$$
$$\vec{F}_2 = F_2 \cos 120°\,\hat{i} + F_2 \sin 120°\,\hat{j}$$
$$= 4\cos 120°\,\hat{i} + 4\sin 120°\,\hat{j}$$
$$= -2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}$$

এখন, $\vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -2 & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \left(4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right)\hat{k} = 8\sqrt{3}\hat{k} \;\therefore \left|\vec{F}_1 \times \vec{F}_2\right| = 8\sqrt{3}\text{ sq. unit}$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 8\sqrt{3}$ বর্গ একক **(Ans:)**

03. 

[Din.B’22]

চিত্রের **P** ও **Q** বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$.

(গ) Δ**OPQ** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

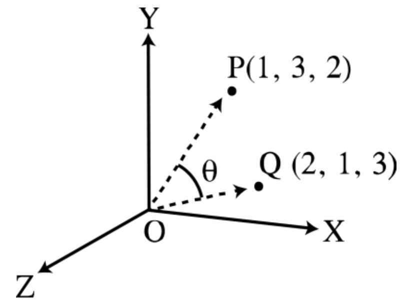
সমাধান

গ. মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $O(0,0,0)$

এখন, $\vec{P} = (1-0)\hat{i} + (3-0)\hat{j} + (2-0)\hat{k}$

$= \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{Q} = (2-0)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (3-0)\hat{k} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

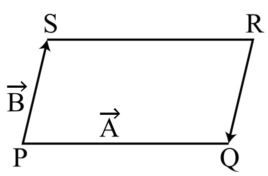


$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9-2)\hat{i} - (3-4)\hat{j} + (1-6)\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$$

$\therefore |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(7)^2 + (1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{75}$

$\therefore$ ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times (|\vec{P} \times \vec{Q}|) = \frac{1}{2} \times \sqrt{75} = 4.33$ বর্গ একক

04. $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$। **[DB'21]**



(গ) $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) উদ্দীপকের ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কিনা? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

গ. $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{B} \times \vec{A}|$ বর্গএকক

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6-16) - \hat{j}(6-8) + \hat{k}(12-6) = -10\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

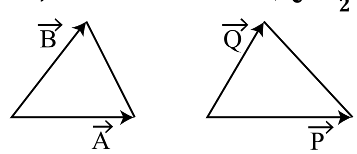
$\therefore |\vec{B} \times \vec{A}| = \sqrt{(-10)^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{35}$ $\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2\sqrt{35}$ বর্গএকক

ঘ. ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে এদের দ্বারা গঠিত ঘনবস্তুর আয়তন শূন্য হবে। 'গ' হতে পাই, $\vec{B} \times \vec{A} = -10\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

$(\vec{B} \times \vec{A}) \cdot \vec{C} = -10 + 4 + 6 = 0$

$\therefore$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা গঠিত ঘনবস্তুর আয়তন শূন্য। $\therefore$ এরা সমতলীয়।

05. $\vec{A} = 2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় অপর একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে, যেখানে $\vec{P} = 3\vec{A}$ এবং $\vec{Q} = \frac{1}{2}\vec{B}$। **[Ctg.B'21]**



(ঘ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে কোনটি অধিক জায়গা দখল করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

ঘ. প্রথম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$ বর্গএকক

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - \hat{j}(-4+3) + \hat{k}(6-\sqrt{6})$$

$= (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\hat{i} + \hat{j} + (6-\sqrt{6})\hat{k}$

$\therefore$ ১ম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$ বর্গএকক $= \frac{1}{2} \times 4.383$ বর্গএকক $= 2.19$ বর্গএকক

$\vec{P} = 3(2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}) = 6\hat{i} + 3\sqrt{2}\hat{j} - 3\sqrt{3}\hat{k}$; $\vec{Q} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(-3\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) - \hat{j}\left(-6 + \frac{9}{2}\right) + \hat{k}\left(9 - \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \therefore |\vec{P} \times \vec{Q}| = 6.57476$$

$\therefore$ ২য় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{P} \times \vec{Q}|$ বর্গএকক $= 3.2874$ বর্গএকক

$\therefore$ দেখা যায়, ২য় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ১ম ত্রিভুজ হতে বেশি।

$\therefore$ ২য় ত্রিভুজ অধিক জায়গা দখল করে।

06. নিচে তিনটি ভেক্টর দেওয়া আছে: **[BB’21]**

$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}}$

$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{5\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}}$

$\vec{\mathbf{C}} = \mathbf{4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}$

(ঘ) ভেক্টর $\vec{\mathbf{A}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}}$ পরস্পর একই দিকে ক্রিয়াশীল কিনা তা যাচাই কর। ৪

সমাধান

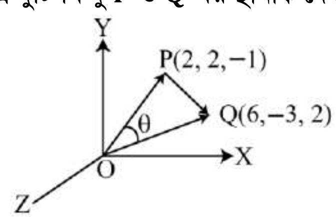
ঘ. $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$; $\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(18 + 4) - \hat{j}(12 - 20) + \hat{k}(-2 - 15) = 22\hat{i} + 8\hat{j} - 17\hat{k}$$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{22^2 + 8^2 + (-17)^2} = 3\sqrt{93} \therefore |\vec{A} \times \vec{B}| \neq 0$

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর একই দিকে ক্রিয়াশীল নয়।

07. চিত্রে দুটি বিন্দু **P** ও **Q** এর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। $\overline{\mathbf{OP}}$ ও $\overline{\mathbf{OQ}}$ যথাক্রমে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করছে। **[JB’21]**



(ঘ) $\overline{\mathbf{OP}}, \overline{\mathbf{PQ}}$ ও $\overline{\mathbf{OQ}}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থান করে কিনা গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

সমাধান

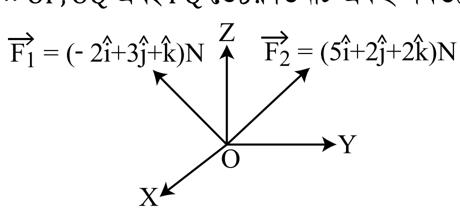
ঘ. $\overline{OP} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\overline{OQ} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (6 - 2)\hat{i} + (-3 - 2)\hat{j} + (2 + 1)\hat{k} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2(-9 + 10) - 2(18 - 8) - 1(-30 + 12) = 2 - 20 + 18 = 0$$

$\therefore \overline{OP}, \overline{OQ}$ এবং $\overline{PQ}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

08. **[CB’21]**



চিত্রে $\vec{\mathbf{F_1}}$ ও $\vec{\mathbf{F_2}}$ বলদ্বয় **O** বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

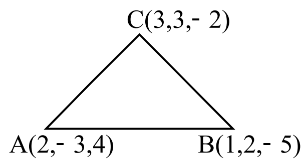
(গ) $\vec{\mathbf{F_1}} \times \vec{\mathbf{F_2}}$ বের কর। ৩

সমাধান

গ. $\overrightarrow{F_1} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})\text{N}\,;\overrightarrow{F_2} = (5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})\text{N}\,;\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(6-2) - \hat{j}(-4-5) + \hat{k}(-4-15) = 4\hat{i} + 9\hat{j} - 19\hat{k} \therefore \overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2} = 4\hat{i} + 9\hat{j} - 19\hat{k}$

09. চিত্রটি লক্ষ কর এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও: [Din.B'21]



(ঘ) $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ ও $\overrightarrow{\mathbf{CA}}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে থাকবে কি'না? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

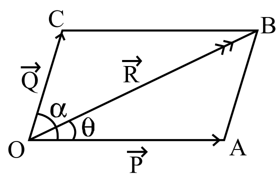
সমাধান

ঘ. $\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 9\hat{k}, \overrightarrow{BC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}, \overrightarrow{CA} = -\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

এখন $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -1(6+18) - 5(12+3) - 9(-12+1) = -24 - 75 + 99 = 0$

$\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

10. চিত্রটি লক্ষ কর: [SB'19]



$\vec{\mathbf{P}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}\,;\ \vec{\mathbf{Q}} = 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$

(ঘ) Δ**OAB** ও Δ**OBC** -এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক **OABC**-এর ক্ষেত্রফলের সমান কিনা? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

ঘ. $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$। এখানে, $\vec{P} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{R}| = 13.124$ sq. unit। আবার, ΔOCB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{R}|$

$\therefore\ \vec{Q} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -15\hat{i} + 20\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore \Delta OCB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{Q} \times \vec{R}| = 13.124$ sq. unit

সামান্তরিক OABC এর ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}| \therefore \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}| = 26.248$ sq. unit $\therefore \Delta OAB + \Delta OCB = 26.248$ sq. unit = সামান্তরিক OABC এর ক্ষেত্রফল

$\therefore \Delta OAB$ ও ΔOBC এর ক্ষেত্রলের সমষ্টি সামান্তরিক OABC এর ক্ষেত্রফলের সমান।

11. অনিক $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ দুটি ভেক্টর নিয়ে তাদের ডট ও ক্রস গুণন নির্ণয় করছিল। সে দেখলো যে, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যস্থ কোণের মান একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তন করলে তাদের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হয়। [BB'19]

(গ) $\vec{\mathbf{A}}$ ও $\vec{\mathbf{B}}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) অনিকের পর্যবেক্ষণের গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

সমাধান

গ. $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-3-2) - \hat{j}(-6+1) + \hat{k}(-4-1) = -5\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$

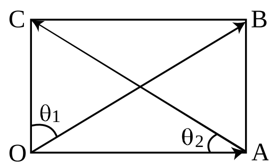
$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$ বর্গ একক।

ঘ. ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হলে, $AB\sin\theta = AB\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \therefore \theta = 45°$

এখন, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta_0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2-2+3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} \therefore \theta_0 = 70.9°$

$\therefore 70.9° - 45°$ বা $25.9°$ পরিবর্তন করলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হবে।

12. নিচের চিত্র অনুসারে **OABC** একটি আয়তক্ষেত্র। এর **OA** এবং **OB** বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{Q}} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ নির্দেশিত হয়েছে। [DB'17]



(গ) উদ্দীপক অনুসারে **ΔOAB** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$

এখন, $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4-3) - \hat{j}(2+2) + \hat{k}(-3+4) = -7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{66}$

$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\sqrt{66}$ বর্গএকক।

13. তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{\mathbf{A}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{C}} = \mathbf{x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}}$। [Ctg.B'19]

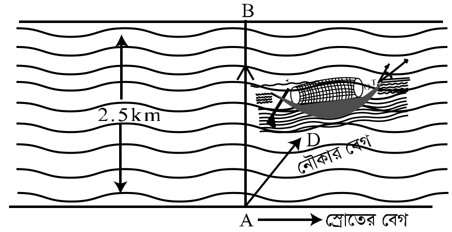
(গ) উদ্দীপকের $\vec{\mathbf{A}}$ ও $\vec{\mathbf{B}}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6-5) - \hat{j}\,(8-10) + \hat{k}(4-6) = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

14. একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী **2.5 km** প্রস্থের একটি নদীতে **A** অবস্থান হতে অন্য প্রান্তে **AD** বরাবর যাচ্ছে। [JB'17]



স্থির পানিতে নৌকার বেগ $= (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})\mathbf{ms^{-1}}$ এবং স্রোতের বেগ $= 2\hat{\mathbf{i}}\ \mathbf{ms^{-1}}$. অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটিকে **AB** বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়।

(গ) নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

সমাধান

গ. নদীর সমতলে দুইটি ভেক্টর, $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$

$\vec{B} = 2\hat{i}$ ∴ নদীর সমতলের লম্ব বরাবর ভেক্টর $= \vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6\hat{k}$$

∴ নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর $= \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{-6\hat{k}}{6} = \pm\hat{k}$

Type-11: ভেক্টর ক্যালকুলাস

Concept:

(i) ক্যালকুলাসের অন্তরীকরণের সব সূত্রই ভেক্টর অন্তরীকরণে প্রযোজ্য। যেমন:

(i) $\frac{d}{du}(\vec{P} + \vec{Q}) = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$ (ii) $\frac{d}{du}(c\vec{P}) = c\frac{d\vec{P}}{du}$; যেখানে, c একটি স্কেলার ধ্রুবক ইত্যাদি।

(ii) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক সিস্টেমে ভেক্টর ব্যবকলনীয় অপারেটর (differential operator) $\vec{\nabla}$ (নাবলা) যেখানে, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}$. এই অপারেটরের সাহায্যে আমরা স্কেলার ফিল্ড ও ভেক্টর ফিল্ডের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য (যেমন: সর্বোচ্চ পরিবর্তনের হার, ঘূর্ণনশীলতা ইত্যাদি) নির্ণয় করি।

- **গ্রেডিয়েন্ট:** ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ কোন স্থানে একটি স্কেলার ক্ষেত্র। তাহলে φ এর গ্রেডিয়েন্ট,

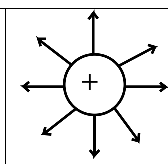
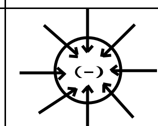
$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

  - শুধুমাত্র স্কেলার ফিল্ডের গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় করা যায়।
  - কোন স্কেলার ফিল্ডের গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ফিল্ড।
  - স্কেলার ফিল্ডের গ্রেডিয়েন্ট থেকে প্রাপ্ত ভেক্টর ফিল্ড ঐ স্কেলার ফিল্ডের সর্বোচ্চ পরিবর্তনের হারের মান ও দিক নির্দেশ করে।

- **ডাইভারজেন্স:** কোন একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x, y, z)$ এর ডাইভারজেন্সকে লেখা যায় $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ বা div $\vec{V}$ আকারে।

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

  - শুধুমাত্র ভেক্টর ফিল্ডের ডাইভারজেন্স নির্ণয় করা যায়।
  - কোন বিন্দুতে ডাইভারজেন্স ঐ বিন্দুর আশেপাশে অতিক্ষুদ্র আয়তনে input flux (অন্তর্মুখী প্রবাহ) ও output flux (বহিঃমুখী প্রবাহ) এর পার্থক্য নির্দেশ করে।

(i) Div (+ve) হলে পদার্থের আয়তন বাড়ে, ঘনত্ব কমে। (Source বুঝায়)	 ধনাত্মক ডাইভারজেন্স
(ii) Div (−ve) হলে পদার্থের আয়তন কমে, ঘনত্ব বাড়ে। (Sink বুঝায়)	 ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স
(iii) Div = 0 হলে আয়তন একই থাকে, ঘনত্বও একই থাকে। [সিলিন্ড্রিকাল বা সলিনয়ডাল বুঝায়]	 শূন্য ডাইভারজেন্স

- কার্ল: ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x,y,z) = V_1\hat{i} + V_2\hat{j} + V_3\hat{k}$ এর কার্ল, curl $\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$
  - শুধুমাত্র ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল নির্ণয় করা যায়।
  - কোন বিন্দুতে ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল ঐ বিন্দুতে ফিল্ডটির ঘূর্ণন প্রবণতা নির্দেশ করে।
  - কোন ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল আরেকটি ভেক্টর ফিল্ড।
  - কোন ভেক্টর ফিল্ডের কার্ল শূণ্য হলে ঐ ফিল্ডকে অঘূর্ণশীল (irrotational) বলা হয়।
  - কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল- এর ডাইভারজেন্স শূন্য। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0$

গাণিতিক MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\vec{V} = x^2\hat{i} - 2z\hat{j} + y\hat{k}$ হলে div $\vec{V}$ =? **[BB'22]**

(a) 2x (b) $3\hat{i}$ (c) $2x\hat{i}$ (d) $x\hat{i}$

সমাধান: (a); div $\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(x^2\hat{i} - 2z\hat{j} + y\hat{k}\right) = 2x + 0 + 0 = 2x$

02. $\vec{A} = (px+y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+3z)\hat{k}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে যদি p =? **[BB'17]**

(a) 2 (b) 4 (c) 3 (d) −4

সমাধান: (d); $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)\cdot\left((px+y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+3z)\hat{k}\right) = 0$

$\Rightarrow p + 1 + 3 = 0 \Rightarrow p = -4$

গাণিতিক CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
এবং $\vec{C} = (6xy + z^3)\hat{i} - (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$. **[RB'22]**

(ঘ) উদ্দীপকে $\vec{C}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল কিনা যাচাই কর। ৪

সমাধান

ঘ. $\vec{C}$ ভেক্টর অঘূর্ণনশীল হওয়ার জন্য Curl $\vec{C} = 0$ হবে।

এখন, Curl $\vec{C} = \vec{\nabla}\times\vec{C}$ $\left[\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right]$

$$\therefore \vec{\nabla}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ 6xy + z^3 & z - 3x^2 & 3xz^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\delta}{\delta y}(3xz^2 - y) - \frac{\delta}{\delta z}(z - 3x^2)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\delta}{\delta x}(3xz^2 - y) - \frac{\delta}{\delta z}(6xy + z^3)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\delta}{\delta x}(z - 3x^2) - \frac{\delta}{\delta y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\{(-1) - 1\} - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}\{(-6x) - 6x\} = -2\hat{i} - 0 - 12x\hat{k} = -2\hat{i} - 12x\hat{k} \neq 0$$

যেহেতু, $\vec{\nabla}\times\vec{C} \neq 0$, তাই $\vec{C}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

02. একদিন একটি অঞ্চলের তাপমাত্রা ও বাতাসের বেগ পাওয়া গেলো যথাক্রমে, **[Ctg.B'22]**
$Q = 2xy^2z^3 - 4xy$ ও $\vec{V} = (y^2\cos x + z^3)\hat{i} + (2y\sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$.

(গ) (1, – 1, 2) বিন্দুতে ঐ অঞ্চলের তাপমাত্রার গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) ঐদিন ঐ অঞ্চলের বাতাসে কোনো ঘূর্ণন ছিলো কিনা তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মত দাও। ৪

সমাধান

গ. দেওয়া আছে,

ঐ অঞ্চলের তাপমাত্রা, $Q = 2xy^2z^3 - 4xy$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}$

গ্রেডিয়েন্ট, $\vec{\nabla}Q = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right) \cdot (2xy^2z^3 - 4xy)$

$= \frac{\delta}{\delta x}(2xy^2z^3 - 4xy)\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}(2xy^2z^3 - 4xy)\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}(2xy^2z^3 - 4xy)\hat{k}$

$= (2y^2z^3 - 4y)\hat{i} + (4xyz^3 - 4x)\hat{j} + (6xy^2z^2 - 0)\hat{k}$

এখন, $(1, -1, 2)$ বিন্দুতে

$\therefore \vec{\nabla}Q(1, -1, 2) = \{2(-1)^2 \cdot 2^3 - 4(-1)\}\hat{i} + \{4 \cdot 1(-1) \cdot 2^3 - 4 \cdot 1\}\hat{j} + \{6 \cdot 1(-1)^2 \cdot 2^2\}\hat{k}$

$= 20\hat{i} - 36\hat{j} + 24\hat{k}$ **(Ans:)**

ঘ. দেওয়া আছে, ঐ দিন ঐ অঞ্চলের বাতাসের বেগ

$\vec{v} = (y^2 \cos x + z^3)\hat{i} + (2y \sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}$

বাতাসে কোণ ঘূর্ণন ছিল কিনা সেটা Curl এর উপর নির্ভর করে।

$$\therefore \text{Curl}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ y^2 \cos x + z^3 & 2y \sin x - 4 & 3xz^2 + 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}\left\{\frac{\delta}{\delta y}(3xz^2 + 2) - \frac{\delta}{\delta z}(2y \sin x - 4)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\delta}{\delta x}(3xz^2 + 2) - \frac{\delta}{\delta z}(y^2 \cos x + z^3)\right\}$

$+\hat{k}\left\{\frac{\delta}{\delta x}(2y \sin x - 4) - \frac{\delta}{\delta y}(y^2 \cos x + z^3)\right\} = \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(2y \cos x - 2y \cos x) = 0$

যেহেতু Curl $\vec{V} = 0$, তাই ঐ দিন বাতাসে কোনো ঘূর্ণন ছিল না।

03. $\mathbf{p(x, y, z) = 2xy^4 - x^2z}$ একটি স্কেলার রাশি এবং $\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{(2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{(6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z^2)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}}$ অপর একটি ভেক্টর রাশি। **[SB'22]**

(গ) $\mathbf{(2, -1, -2)}$ বিন্দুতে $\mathbf{p}$ এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) উদ্দীপকে বর্ণিত $\vec{\mathbf{A}}$ ও $\vec{\mathbf{B}}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে কোনটি সলিনয়ডাল এবং কোনটি অঘূর্ণনশীল তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর। ৪

সমাধান

গ. $p(x, y, z) = 2xy^4 - x^2z$

p এর গ্রেডিয়েন্ট, $\vec{\nabla}p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2xy^4 - x^2z)$

$= 2y^4\hat{i} - 2xz\hat{i} + 8xy^3\hat{j} - x^2\hat{k}$

$\therefore (2, -1, -2)$ বিন্দুতে Grad $p = 2 \times (-1)^4\hat{i} - 2 \times 2 \times (-2)\hat{i} + 8 \times 2 \times (-1)^3\hat{j} - 2^2\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 8\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k}$

$= 10\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k}$

ঘ. $\vec{A}$ এর Divergence $= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \{(2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}\} = 2 + 3 - 5 = 0$

$\vec{B}$ এর Divergence $= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \{(6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z^2)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}\} = 6y + 6xz$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

$\vec{A}$ এর Curl $= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & 3y+z^2 & -5z+x \end{vmatrix} = \hat{i}(-2z) - \hat{j}(1) + \hat{k}(-1) = -2z\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B}$ এর Curl $= \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy+z^3 & 3x^2-z^2 & 3xz^2-y \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-1+2z) - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(6x - 6x) = (2z-1)\hat{i}$

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর কোনোটিই অঘূর্ণনশীল নয়।

04. দেওয়া আছে, একটি ভেক্টর ক্ষেত্র- **[BB'22]**

$\vec{\mathbf{A}} = (6xy + \mathbf{z^3})\,\hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{3x^2 - z})\,\hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{3xz^2 - y})\,\hat{\mathbf{k}}$

(গ) $(\mathbf{2, 1, -1})$বিন্দুতে $\vec{\mathbf{A}}$ এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর। ৩

(ঘ) গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে দেখাও যে $\vec{\mathbf{A}}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল নাকি সংরক্ষণশীল হবে? ৪

সমাধান

গ. $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$

ভেক্টর রাশির গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় অসম্ভব।

ঘ. $\vec{A} = (6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \{(6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}\} = 6y + 0 + 6xz = 6y + 6xz$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল নয়।

$\mathrm{Curl}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy+z^3 & 3x^2-z & 3xz^2-y \end{vmatrix}$

$= (-1+1)\hat{i} - (3z^2 - 3z^2)\hat{j} + (6x - 6x)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটি সংরক্ষণশীল। **(Ans.)**

05. তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{C}} = \mathbf{x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}}$। **[Ctg.B'19]**

(ঘ) উদ্দীপকের $\vec{\mathbf{C}}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হবে কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

সমাধান

ঘ.

$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$

$= -y^2\hat{i} - z^2\hat{j} - x^2\hat{k} \;\therefore\; \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \frac{\partial}{\partial x}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-x^2) = 0 + 0 + 0 = 0$

$\therefore \vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য।