



# ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সঃ

A বর্গ ম্যাট্রিক্স

$$|A| = 0 \longrightarrow \text{ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স}$$

$$|A| \neq 0 \longrightarrow \text{অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 9 - 6 \times 6$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 9 - 7 \times 5$$

$$= 1 \neq 0$$

# Poll Question 01

k এর মান কত হলে,  $\begin{bmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$  একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হবে?

(a) 6

~~(b) -6~~

(c) 1

(d) -2

$$\begin{vmatrix} 5+k & -2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$-8(5+k) - (-2)(-4) = 0$$

$$-40 - 8k - 8 = 0$$

$$8k = -48$$

$$k = -6$$

# অনুবন্ধী (ADJOINT) ম্যাট্রিক্সঃ

কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক থেকে পাওয়া সহগুণক ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত (Transpose) ম্যাট্রিক্স কে এর অনুবন্ধী (Adjoint) ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং একে  $Adj A$  দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(i, j) \text{ তম সহগুণকের চিহ্ন} = (-1)^{i+j}$$

$$A_{11} \text{ এর সহগুণক} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (4-0) = 4$$

$$A_{21} \text{ এর সহগুণক} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(8-0) = -8$$

$$A_{23} \text{ " " " } = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -(0-0) = 0$$



# বিপরীত ম্যাট্রিক্সঃ

কোনো অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স  $A$  এর জন্য বিপরীত ম্যাট্রিক্স  $A^{-1}$  হবে যেখানে  $AA^{-1} = I.$

$A$  ম্যাট্রিক্সের জন্য প্রমাণ করা যায় যে,

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \left[ \begin{array}{c} \text{সংগত} \\ \text{Matrix} \end{array} \right]^T$$

$$|A| \neq 0$$

$A \rightarrow 3 \times 3$   
 $I_3$   
 $A \rightarrow 2 \times 2$   
 $I_2$

$$a \cdot a^{-1} = \underline{1}$$
$$x \cdot \underline{1} = x$$

$x + 0 = x$

$$A \cdot I = A$$
$$A \cdot A^{-1} = I$$



অব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স ব্যতীত বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব নেই

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

ଅନୁସୂଚୀ

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

## অনুশীলনী ১.২

30 (iv). বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8-0) - 3(10-0) +$$

$$(-1)(0+8)$$

$$= -22 \neq 0$$

$$(-1)^{1+2}$$

$$(-1)^{1+3}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{11} \text{ को सरल सूत्र } = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$A_{12} \text{ " " } = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{13} \text{ " " } = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 8) = 8$$

$$A_{21} \text{ " " } = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6$$

$$A_{22} \text{ " " } = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 2) = 2$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} \text{ का प्रतिलोम } = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+6) = -6$$

$$A_{31} \text{ " " } = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (0+4) = 4$$

$$A_{32} \text{ " " } = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(0+5) = -5$$

$$A_{33} \text{ " " } = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (8-15) = -7$$

$$\text{प्रतिलोम Matrix} = \begin{bmatrix} 8 & -10 & 8 \\ -6 & 2 & -6 \\ 4 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & -10 & 8 \\ -6 & 2 & -6 \\ 4 & -5 & -7 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -10 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-22} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -10 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$



# কাজ

বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো,

$$(i). \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii). \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

## Poll Question 02

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ হলে } A^{-1} \text{ হবে-}$$

(a)  $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$

~~(b)  $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$~~

(c)  $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 5 \times 7 = 1$$

$$A_{11} \text{ এর সঙ্গক} = +9$$

$$A_{12} \text{ " " " } = -7$$

$$A_{21} \text{ " " " } = -5$$

$$A_{22} \text{ " " " } = +4$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

ক্রেমারের রুলঃ

একঘাতী সমীকরণ জোটের সমাধানঃ

## দুই চলকবিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণঃ

$$(i) a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{---} \quad \textcircled{I}$$

$$(ii) a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{---} \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \times b_2 \rightarrow a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$$

$$\textcircled{II} \times b_1 \rightarrow a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

1st Column

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2nd Column

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

1st Column

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

2nd Column

then  $x = \frac{D_1}{D}$  and  $y = \frac{D_2}{D}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$\textcircled{I} \times a_2 - \textcircled{II} \times a_1 \quad \text{dtr}$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad D$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

## অনুশীলনী ১.২

30 (iv). নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করো,

$$4x + 3y - 2 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$4x + 3y = 2$$

$$\therefore x + 2y = 3$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$x = \frac{D_x}{D} \\ = \frac{-5}{5} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} \\ = \frac{10}{5} = 2$$



# তিন চলকবিশিষ্ট একঘাতী সমীকরণঃ

$$(i) a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$(ii) a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$(iii) a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

## Cramer's Rule for Three Equations in Three Unknowns

The solution to the system

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

is given by  $x = \frac{D_x}{D}$ ,  $y = \frac{D_y}{D}$ , and  $z = \frac{D_z}{D}$ , where

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

provided that  $D \neq 0$ .

## অনুশীলনী ১.২

30 (iv). নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করো,

$$2x + y - 2z = 10$$

$$3x + 2y + 2z = 1$$

$$5x + 4y + 3z = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-8) - 1(9-10) + (-2)(12-10) = -7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \dots = -14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 21$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$z = \frac{D_z}{D} = -3$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

# Poll Question 03

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x + y - 3z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 1 \\ x, y, z &= ? \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +(-3 - 1) = -4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 - 1) = 7$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = + (2 - 1) = 1$$

(a) 4,7,1

(b) -4,-7,-1

(c) -4,7,-1

~~(d) 4,-7,-1~~

$$x = \frac{D_x}{D} = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -7$$

$$z = \frac{D_z}{D} = -1$$

# কাজ

সমাধান করোঃ

(i).  $4x + 3y - 2 = 0$   
 $x + 2y - 3 = 0$

(ii).  $2x - 3y + 4z = 3$   
 $x + 4y - 5z = 0$   
 $5x - y + z = 5$

$$2x - y = 6$$

$$5x + 7y = 20$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$A X = C$$

$$\underline{A^{-1}A} X = \underline{A^{-1}C}$$

$$I X = A^{-1}C$$

$$X = A^{-1}C$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A$$

না বুঝে  
মুখস্থ করার  
অভ্যাস প্রতিভাকে  
ধ্বংস করে

$$X = caP \frac{V^2}{2S}$$

$$X = caP \frac{V^2}{2S}$$

$$E = mc^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার