একাদশ শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

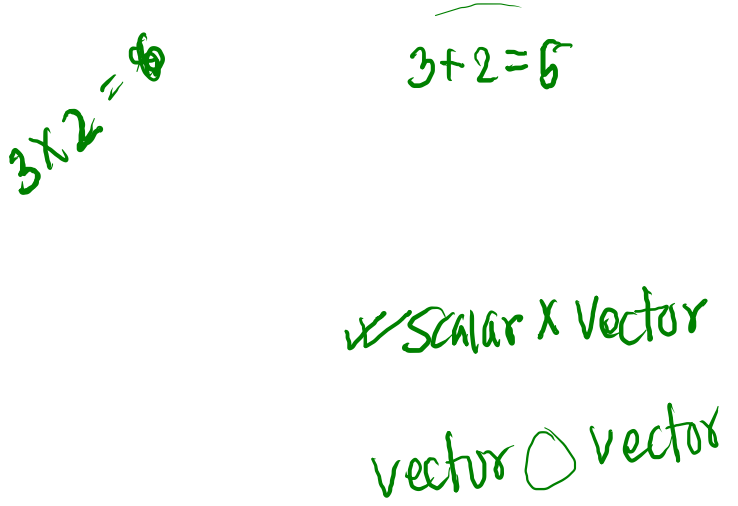
পদার্থবিজ্ঞান

লেকচার : P-04

অধ্যায় ০২ : ভেক্টর

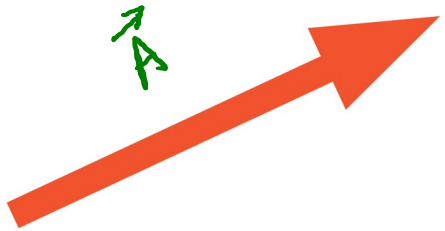
আলোচ্য বিষয়াবলি

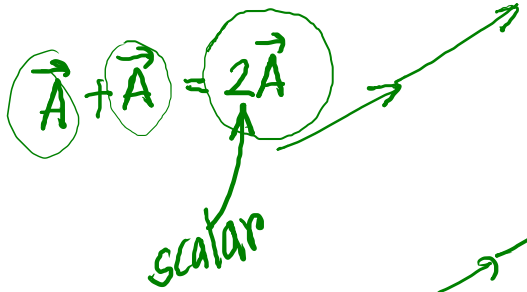
- ভেক্টর গুণন
- ডট গুণন
- ডট গুণনের ধর্মাবলী
- ক্রস গুণন
- ক্রস গুণনের ধর্মাবলী



ভেক্টরের গুণন

(১) স্কেলার রাশি দ্বারা গুণন





$m\vec{A}$

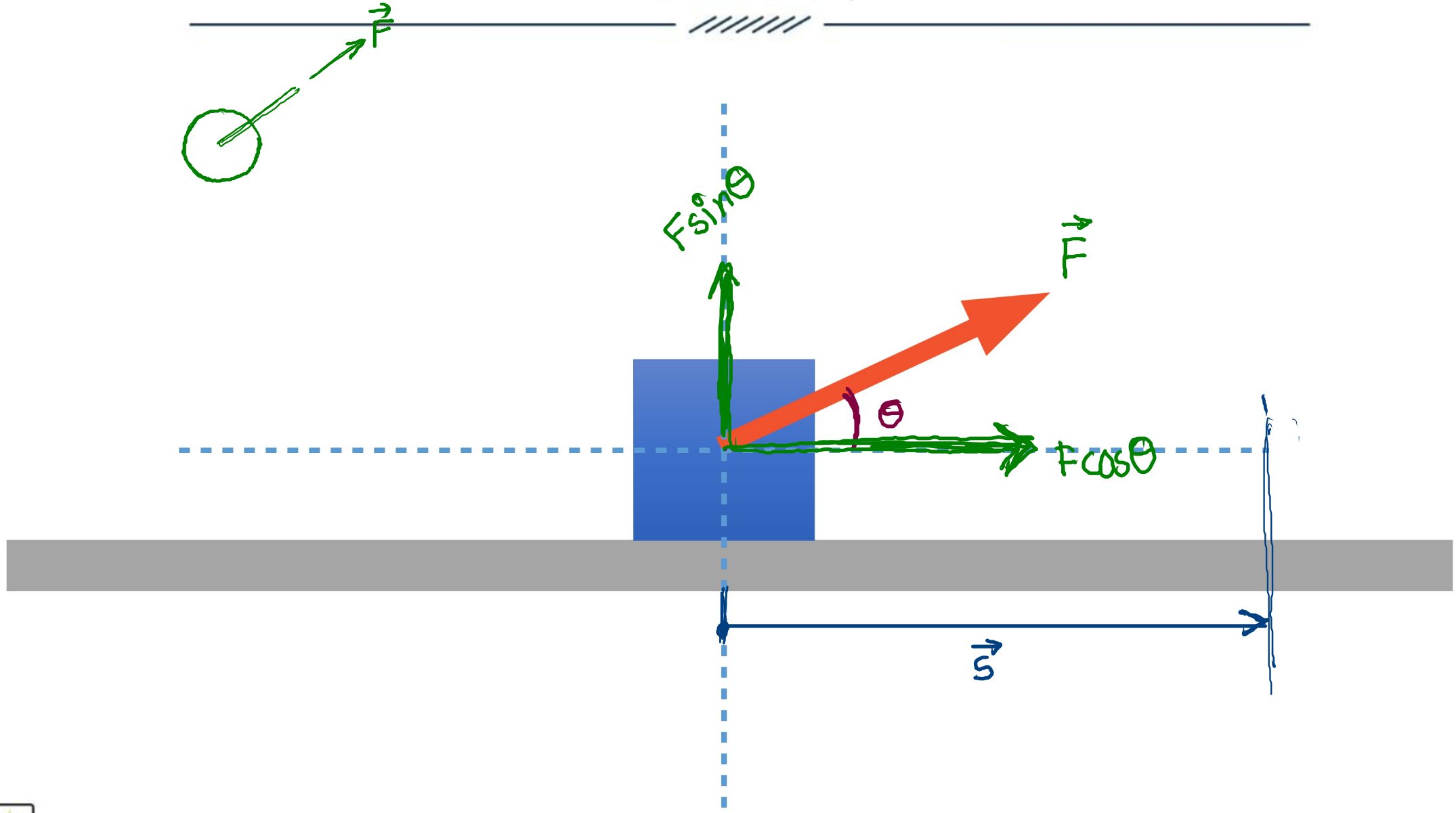
ভেক্টরের গুণন

(২) ভেক্টর রাশি দ্বারা গুণনঃ

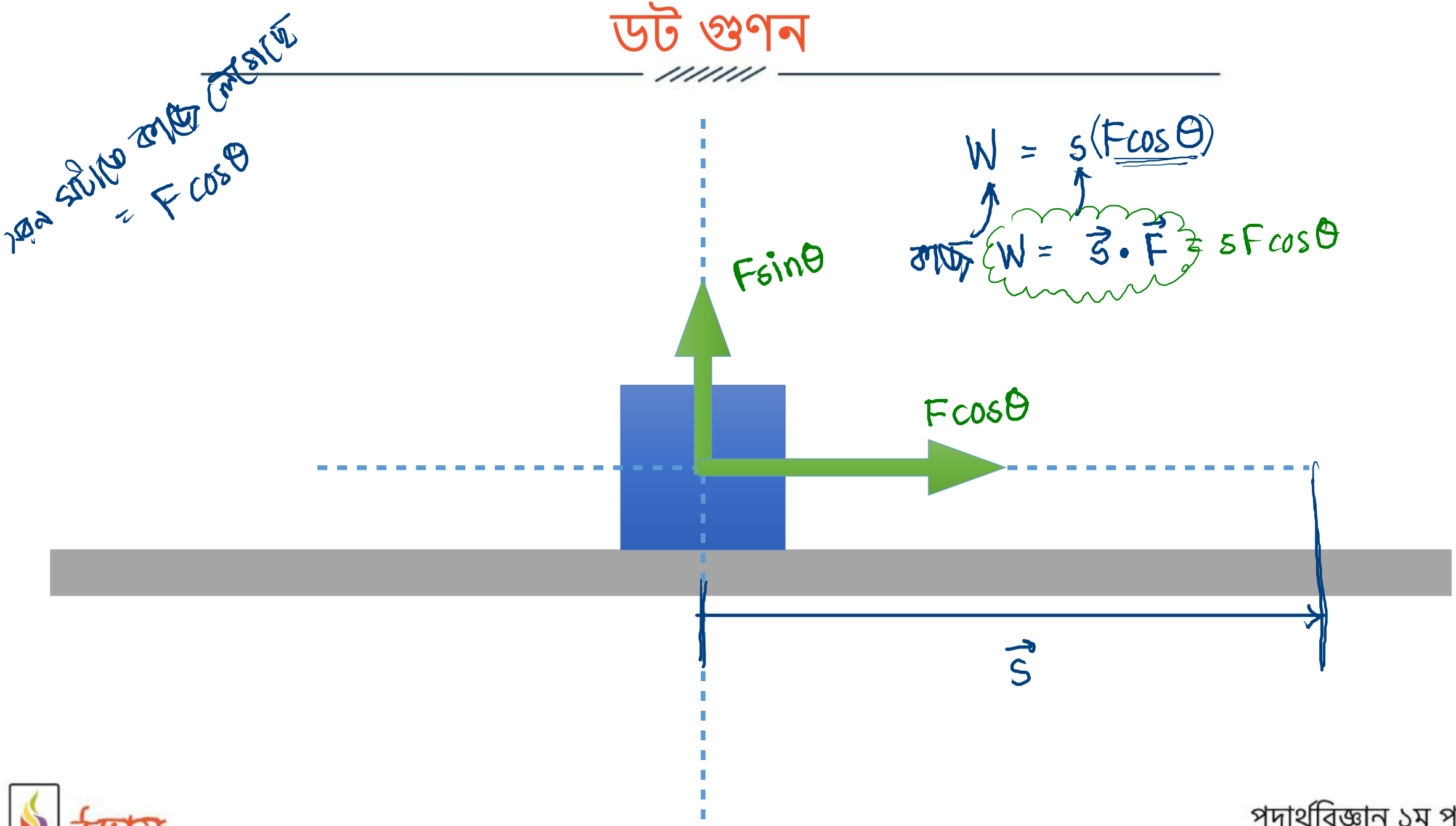
$3 \times 2 = 6$

- ডট গুণন → $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- ক্রস গুণন → $\vec{A} \times \vec{B}$

ডট গুণন



ডট গুণন

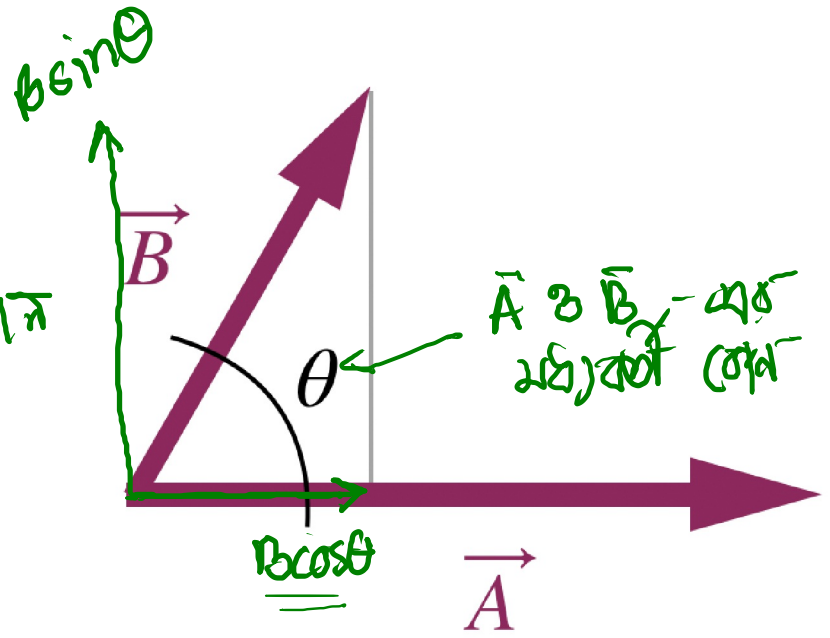

$W = s(F\cos\theta)$
কাজ
$W = \vec{s} \cdot \vec{F} = sF\cos\theta$
$F\sin\theta$
$F\cos\theta$
$\vec{s}$

ডট গুণন

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ → scalar

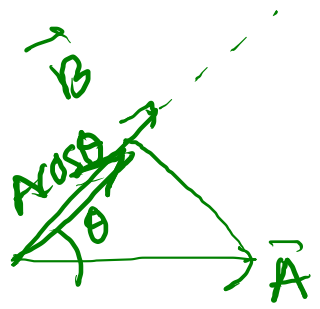
$= A(B\cos\theta)$

$\vec{A}$ ভেক্টরের মান $\vec{A}$-এর দিকে $\vec{B}$ এর উপাংশের মান



$= B(A\cos\theta)$

$\vec{B}$-এর মান $\vec{B}$-এর দিকে $\vec{A}$ এর উপাংশের মান

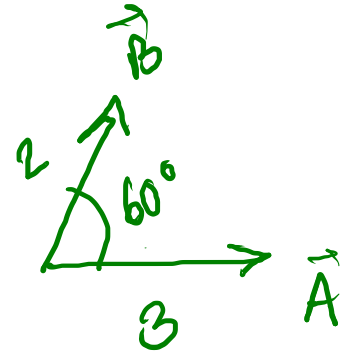


$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

$$= 3 \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= 3$$

$=$ ← scalar



$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

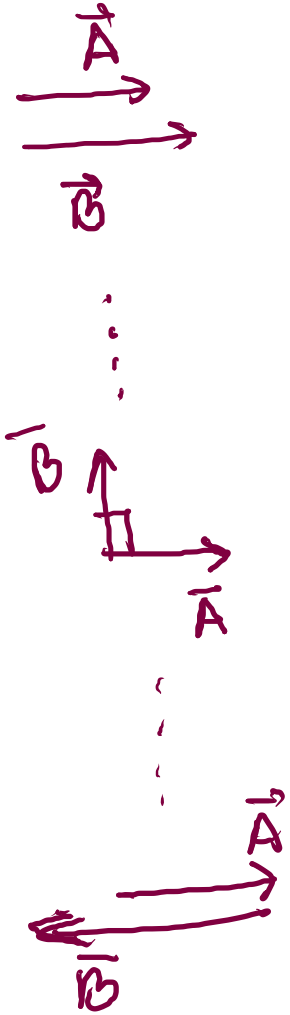
মাত্রের গুনফল

Vector দুইটির অন্তর্ভুক্ত সমকোণ

$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ → scalar · $\vec{C}$ → $m\vec{C}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$ → scalar · $\vec{C}$

θ	$\cos\theta$	
0°	1	100% সমকোণ
90°	0	0% সমকোণ
180°	-1	100% সমকোণ



আয়ত একক ভেক্টরের ডট গুণন

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1\times1\times\cos 0^\circ = 1$

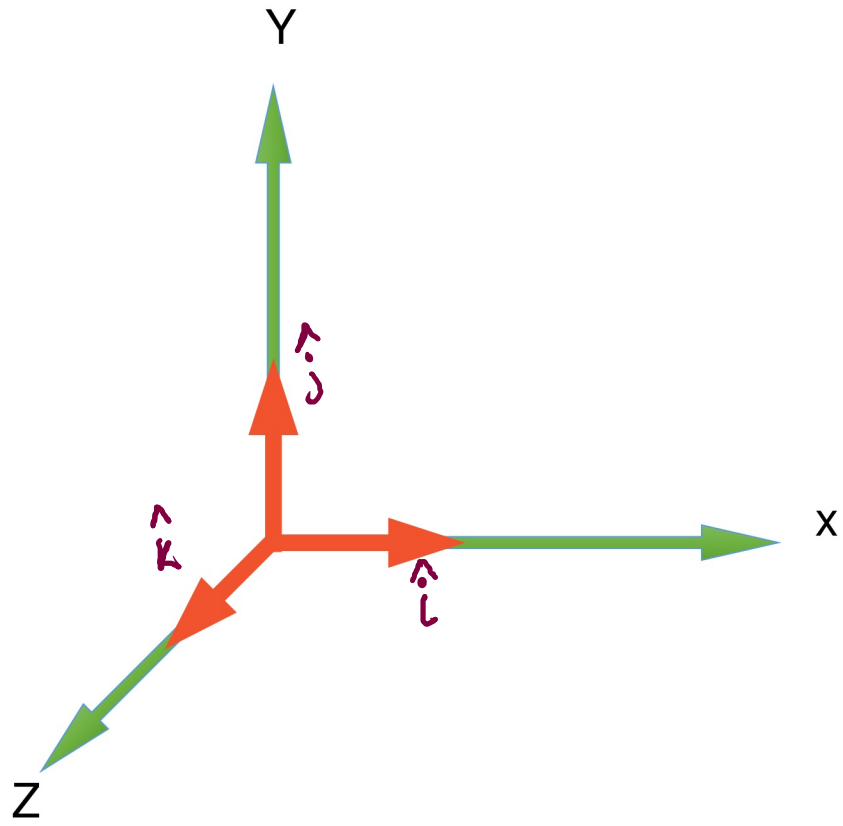
$\hat{j}\cdot\hat{j} = 1\times1\cos 0^\circ = 1$

$\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 1\times1\times\cos 90^\circ = 0$

$\hat{j}\cdot\hat{i} = 0$

$\hat{k}\cdot\hat{j} = 0$



উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের ডট গুণন

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{i} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} + A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j} + A_x\hat{i}\cdot B_z\hat{k}$$

$$+ \text{ - - - - -}$$

$$+ \text{ - - - - -}$$

$$= A_xB_x + 0 + 0$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{B} = 1\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 + 6 - 4$

$= 5$

Poll Question - 01

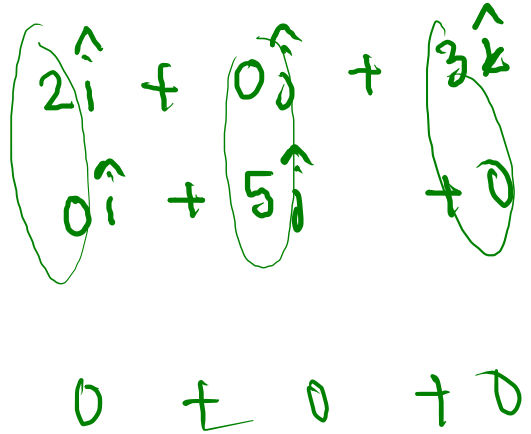
$2\hat{\imath} + 3\hat{k}$ ও $5\hat{\jmath}$ ভেক্টর দুটির ডট প্রোডাক্টের মান কত?

(a) 15

(b) 17

(c) 10

(d) 0



ডট গুণনের ধর্মাবলি

(১) বিনিময় সূত্র

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta$

(২) বণ্টন সূত্র

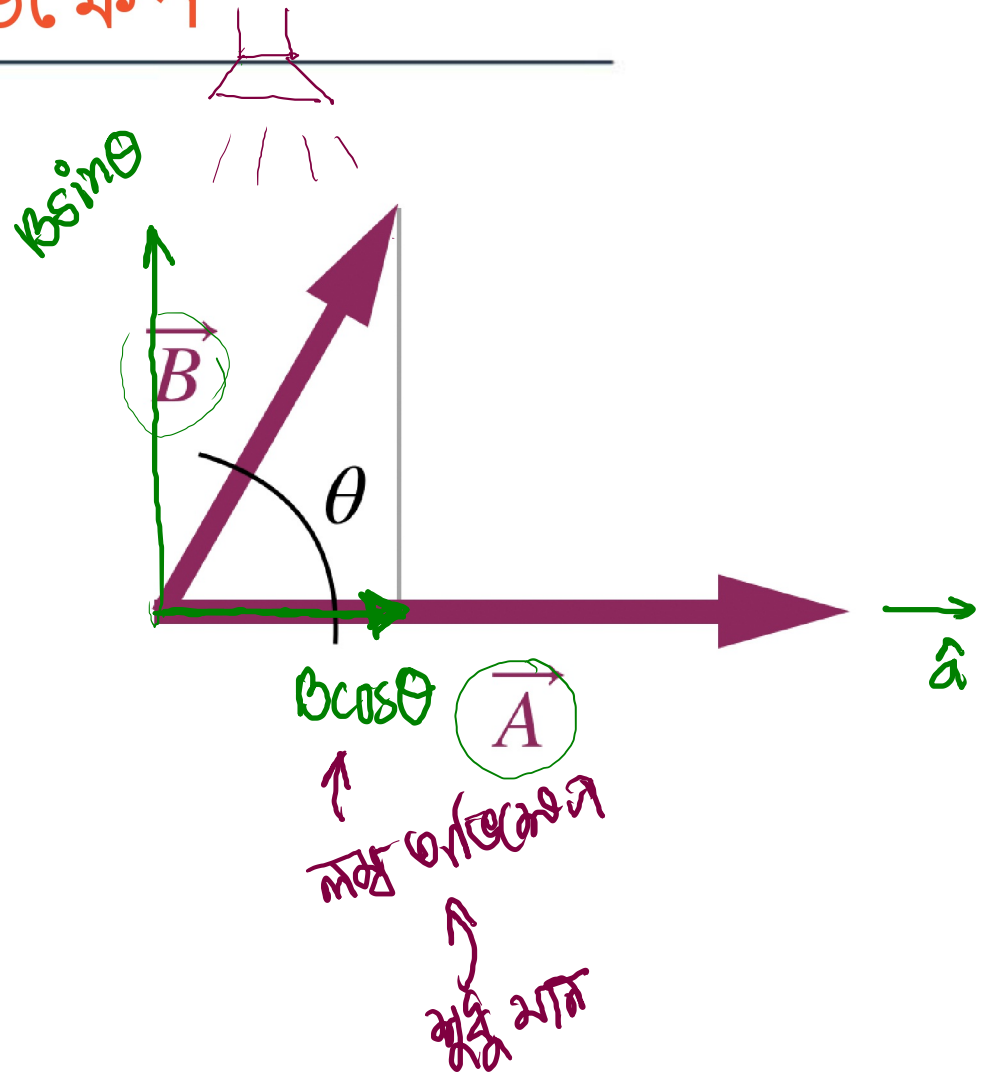
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

উপাংশ ও লম্ব অভিক্ষেপ

$\vec{A}$ এর $\vec{B}$ লম্ব অভিক্ষেপ $= B\cos\theta$

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর উপাংশ $= B\cos\theta\,\hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$



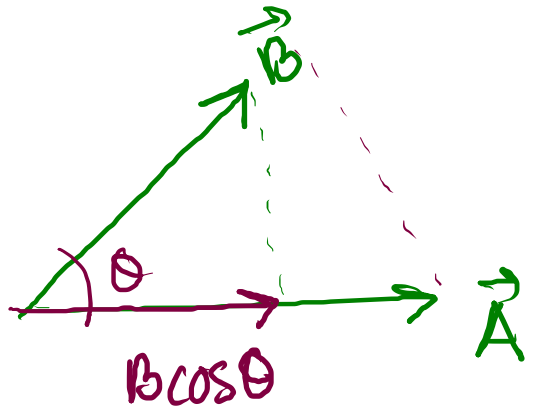
Vector = মান × একক ভেক্টর

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

$B\cos\theta$

$\therefore * B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}$

← এখানে $\vec{B}$ এর $\vec{A}$ এর উপর অভিক্ষেপ নির্ণয় করার জন্য ডট দেয়া হয়



$\vec{B}$ -এর দিকে $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}$

Practice Problem

$\bar{A} = 3\hat{\imath} + m\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ এবং $\bar{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ ভেক্টরদ্বয় লম্ব হলে m = ?

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

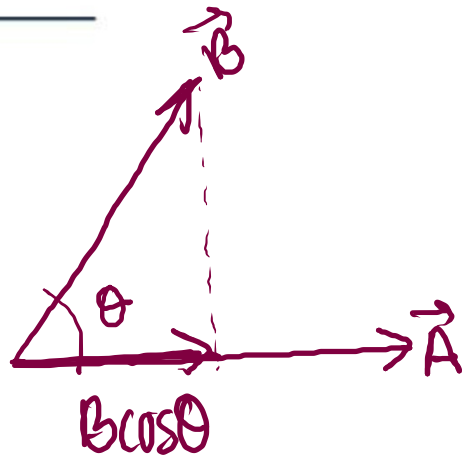
$\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6 + 3m + 0 = 0$

$m = -2$ (Ans)

Practice Problem

$\bar{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\bar{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + k$



(a) A এর উপর B এর লম্ব অভিক্ষেপ ও উপাংশ নির্ণয় করো।

(b) ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

লম্ব অভিক্ষেপ $B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \frac{8+12+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$

উপাংশ $B\cos\theta\,\hat{a} = 4\hat{a}$

$= \frac{16}{5}\hat{i} + \frac{12}{5}\hat{j}$

$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{4\hat{i}+3\hat{j}}{5} = \frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$

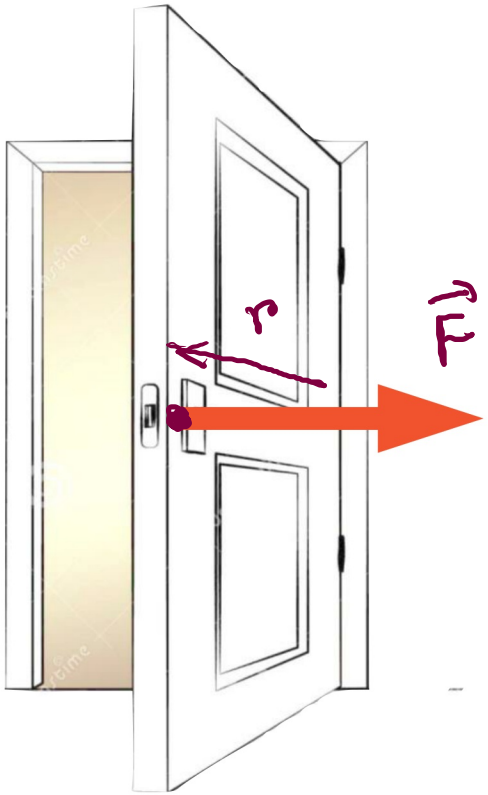
$\bar{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\bar{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + k$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

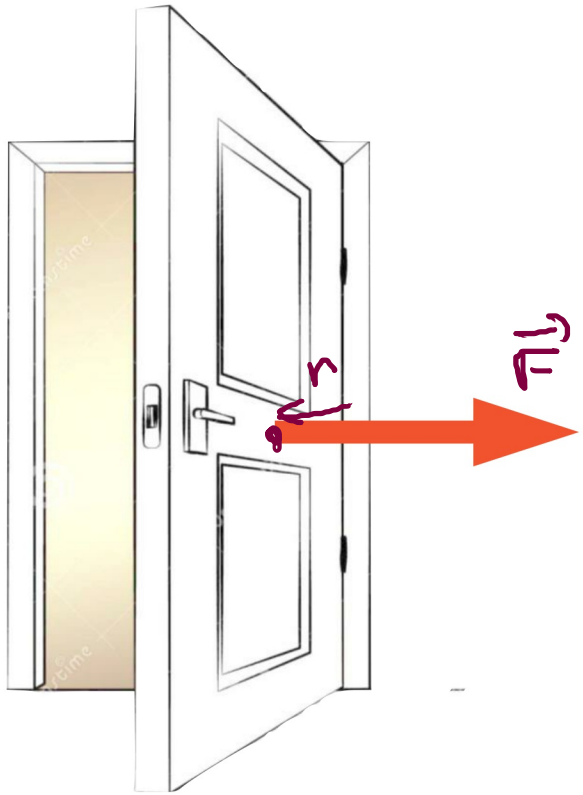
$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{20}{5\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 29.2^0$$

ক্রস গুণন



A



B

ক্রস গুণন

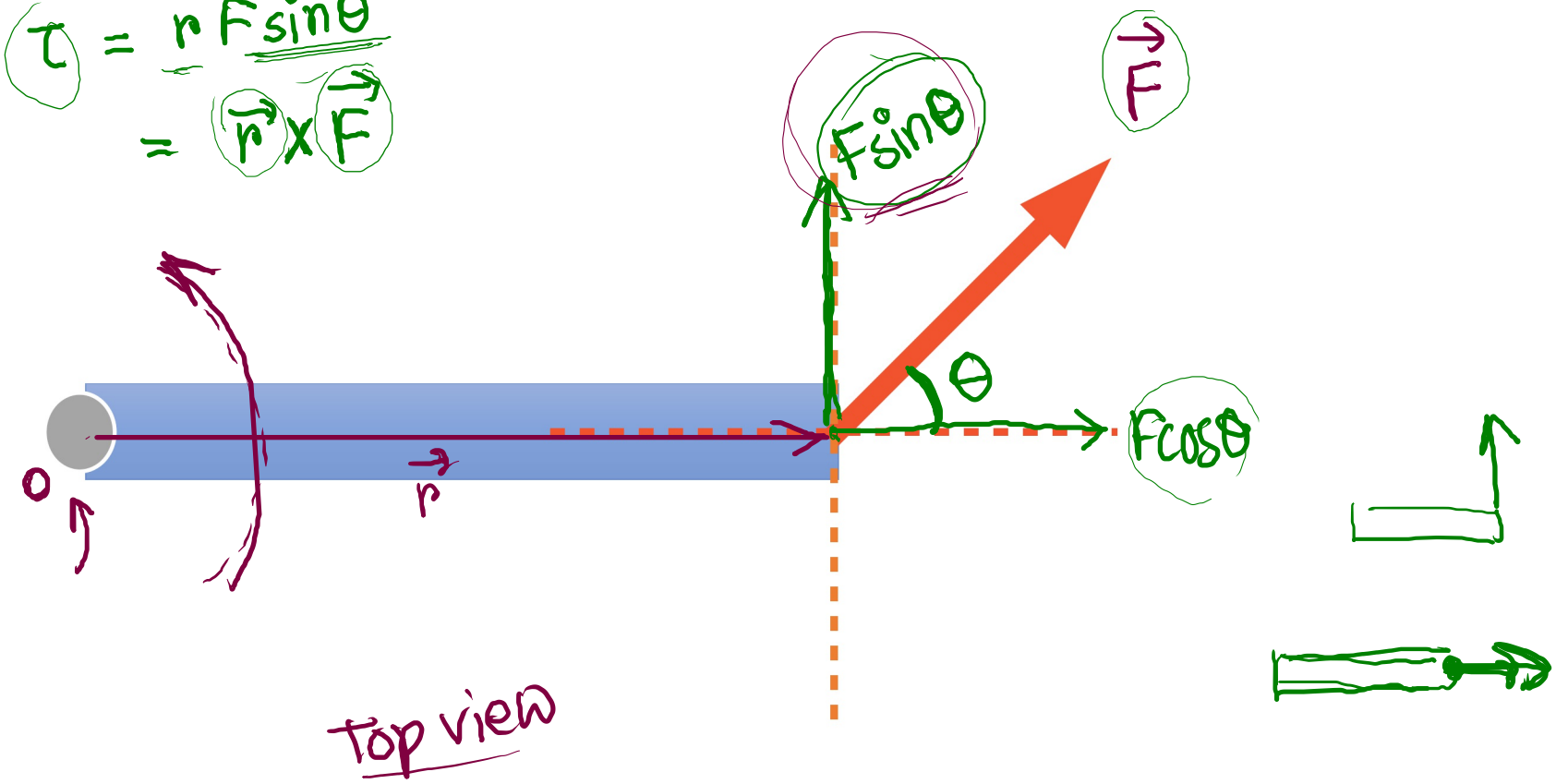
$\tau \propto r$

Tau

$\tau \propto F\sin\theta$

$\tau = rF\sin\theta$

$= \vec{r} \times \vec{F}$



$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ (scalar)

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$ (vector)

↖ লম্ব

Cross Product-এর মান

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$

মানের গুনফল

vector দুইটির তলটির ক্ষেত্রফল

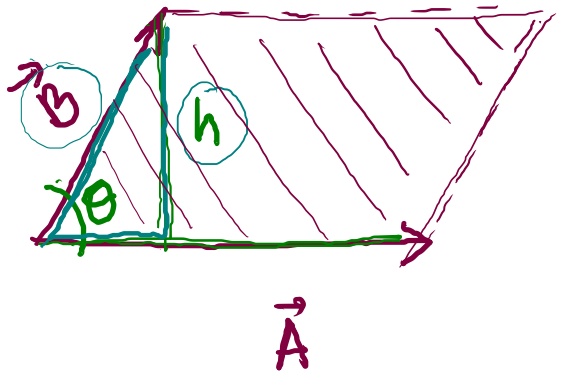
θ	$\sin\theta$	
$0°$	0	0% লম্ব
$90°$	1	100% লম্ব

সামান্তরিকের Area = ভূমি × উচ্চতা

$= A \quad h$

$= AB\sin\theta$

$= |\vec{A} \times \vec{B}|$



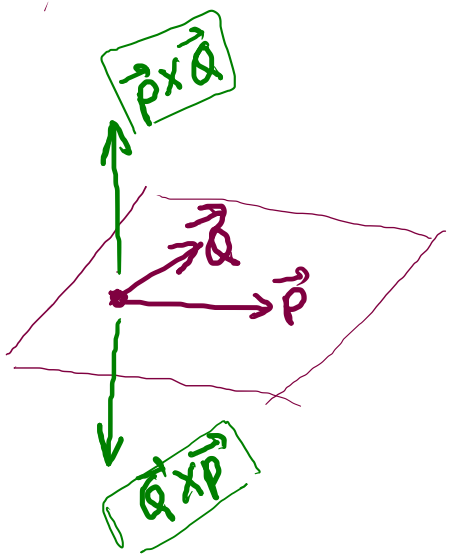
$\sin\theta = \frac{h}{B}$

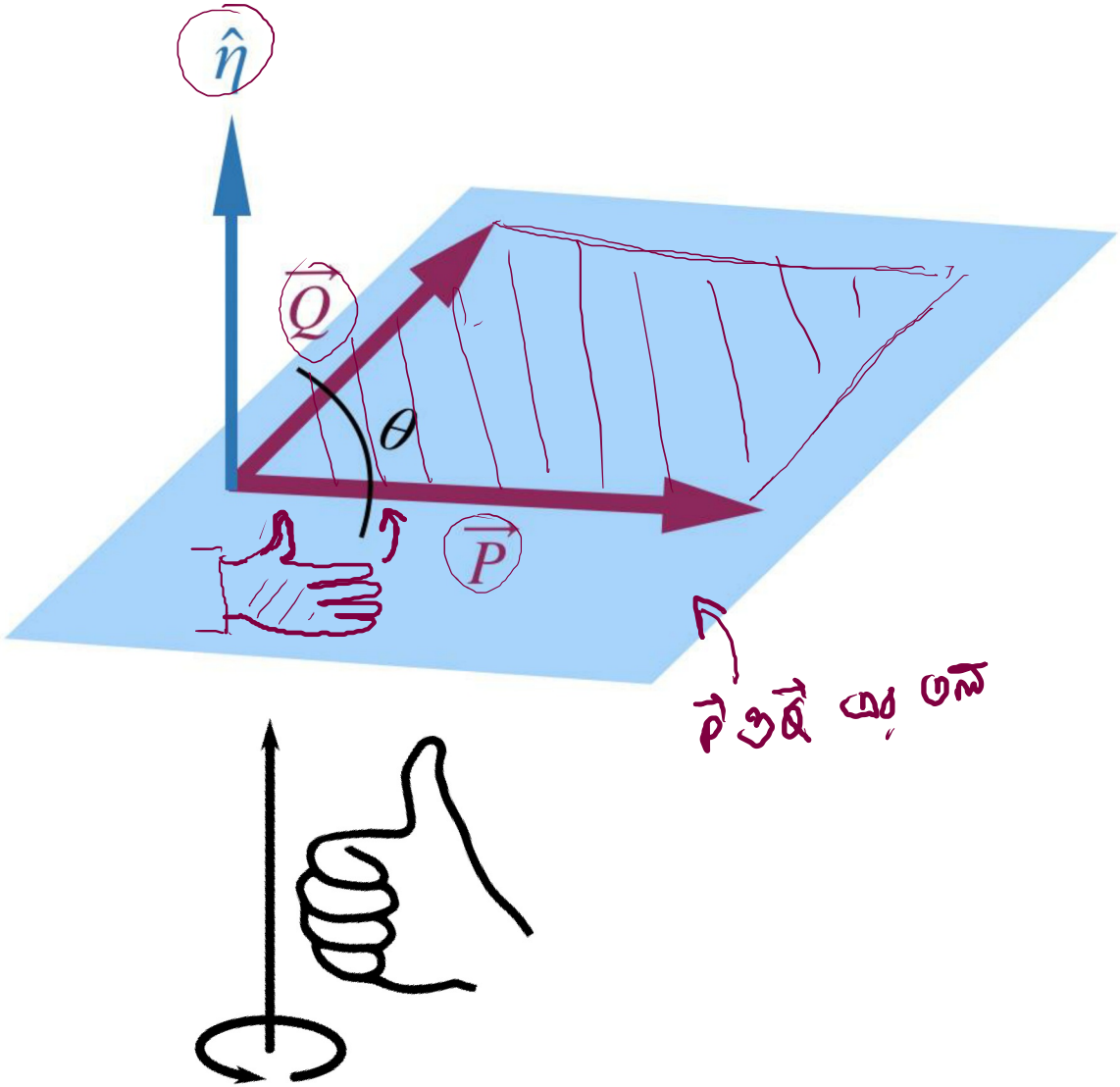
$h = B\sin\theta$

ক্রস গুণন

$\vec{P} \times \vec{Q} = PQ\sin\theta\,\hat{n}$

↳ ডান





$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর তল

$\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$

$\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

↳ মান সমান

↳ দিক বিপরীত

Poll Question - 02

দুটি ভেক্টরের মান যথাক্রমে 5 ও 10 একক। এদের ক্রস প্রোডাক্টের সর্বোচ্চ মান কত?

(a) 15

(b) 25

(c) 50

(d) বলা সম্ভব নয়

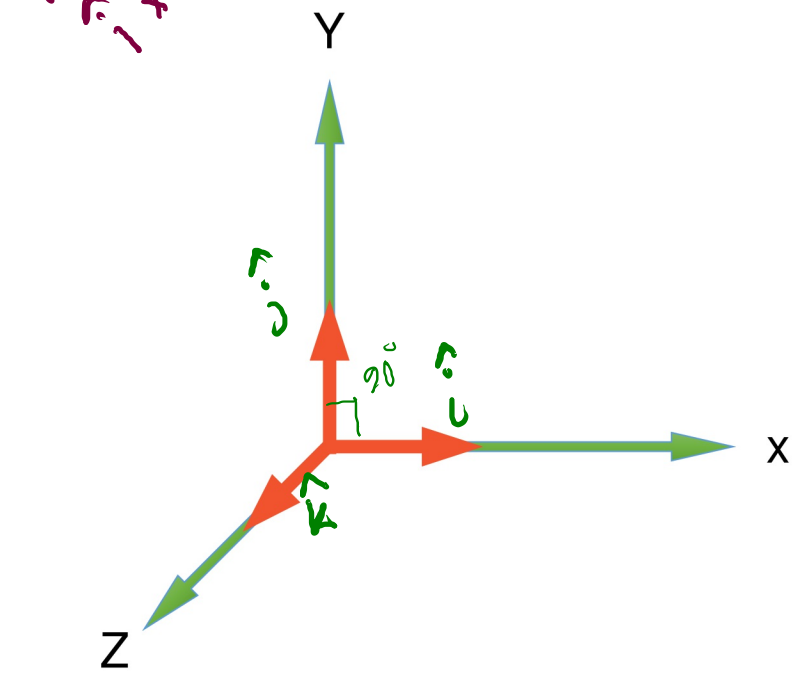
$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta$

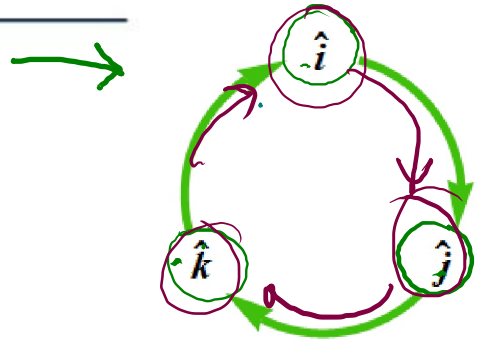
$= 50 \times 1$

আয়ত একক ভেক্টরের ক্রস গুণন

$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta$

$\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ$





$\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 1 \times \sin 0^\circ = 0$

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$

$\hat{k} \times \hat{k} = 0$

$\hat{i} \times \hat{j} = 1 \times 1 \times \sin 90^\circ \hat{k}$

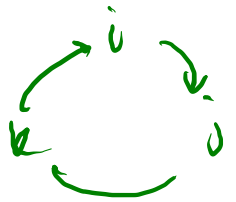
$= \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

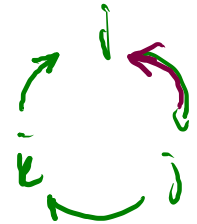
$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$



$\hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k}$

$\hat{k} \times \hat{i} = +\hat{j}$



$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের ক্রস গুণন

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ $\quad \vec{B} = \text{- - - -}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$= A_xB_x\hat{i} \times \hat{i} + A_x\hat{i} \times B_y\hat{j} + A_x\hat{i} \times B_z\hat{k}$

H.W

$= 0 + A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - B_x A_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Poll Question - 03

$3k \times 5j = ?$

(a) 15

(b) 15i

(c) -15i

(d) 0

$3\hat{k} \times 5\hat{j}$

$= 15\ \hat{k} \times \hat{j}$

$= -15\hat{i}$

* লম্ব হওয়ার শর্ত : $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos 90^\circ = 0$

* সমান্তরাল " " : $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin 0^\circ \hat{n} = 0$

Practice Problem

$A = 6i + mj - 10k$ এবং $B = -3i + j + 5k$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে $m = ?$

$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

$0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & m & -10 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow (5m + 10)\hat{i} - (30 - 30)\hat{j} + (6 + 3m)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$5m + 10 = 0 \longrightarrow m = -2$

$0 = 0$

$6 + 3m = 0 \longrightarrow m = -2$

$\therefore m = -2$

Q:

$A = 6i + mj - 10k$ এবং $B = +3i + j + 5k$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে m

$5m - 10 = 0 \rightarrow m = +2$

$6 + 3m = 0 \rightarrow m = -2$

Ans: $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হওয়া সম্ভব না!!!

Practice Problem

দুটি ভেক্টরের ডট প্রোডাক্টের মান 3 একক ও ক্রস প্রোডাক্টের মান 10 একক। এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

$\bar{A} \cdot \bar{B} = 3 = AB\cos\theta$ ——(1)

$|\bar{A} \times \bar{B}| = 10 = AB\sin\theta$ ——(2)

(2)÷(1) $\frac{AB\sin\theta}{AB\cos\theta} = \frac{10}{3}$

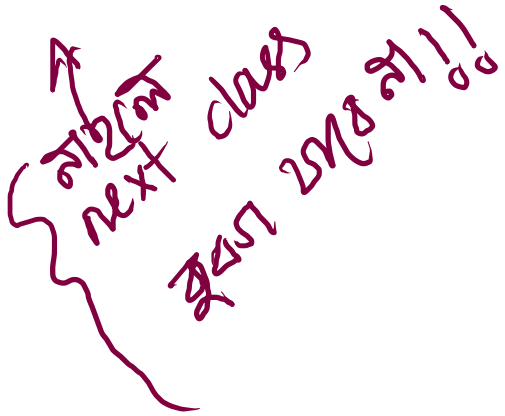
$\tan\theta = \frac{10}{3}$ ⇒ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{3}\right)$

$= 73.3^\circ$

Resource:
ক্যালকুলাসের অ-আ-ক-খ (চমক হাসান)

Must !!!

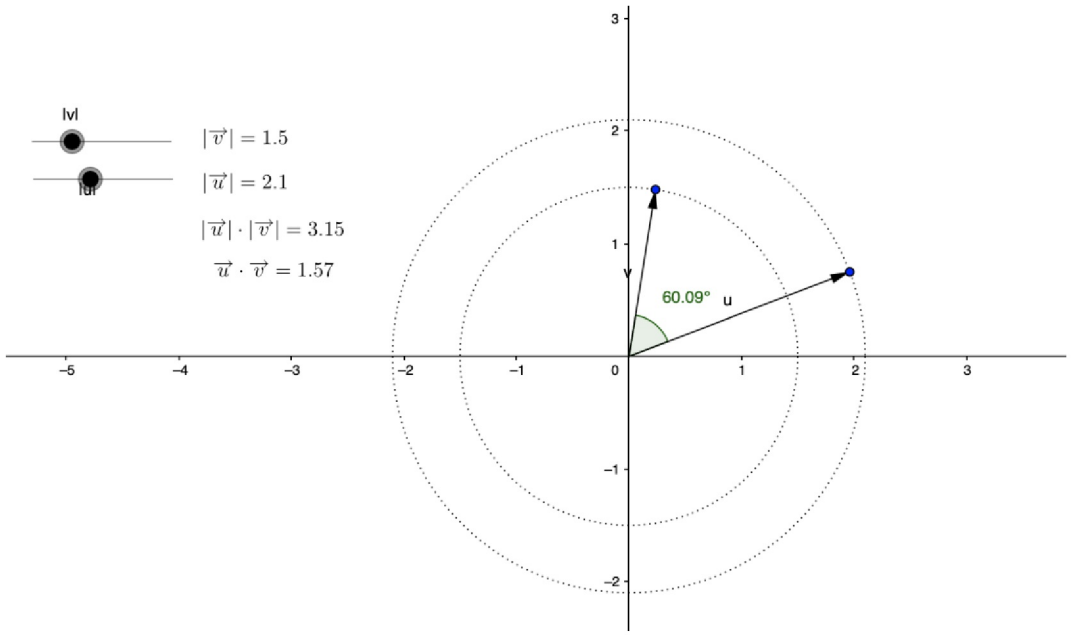
https://www.youtube.com/playlist?list=PL8586BC0C4A8EB968

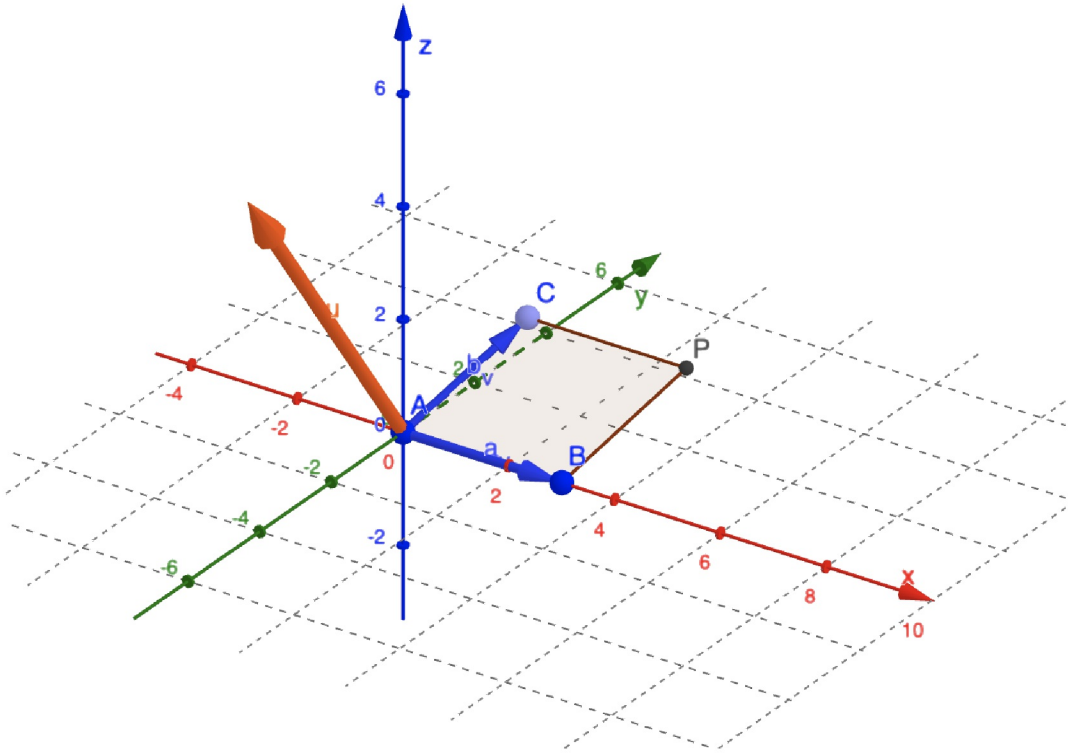


Resources:

https://www.geogebra.org/m/ya845Car

https://www.geogebra.org/m/psMTGDgc





না বুঝে মুখস্থ করার অভ্যাস প্রতিভাকে ধ্বংস করে।