بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

বিস্‌মিল্লাহির রাহ্‌মানির রাহীম

উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

দ্বিপদী উপপাদ্য

লেকচার : HM-07

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী রাশি (Binomial Expression):

দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল আকারে প্রকাশিত রাশিকে দ্বিপদী রাশি বলা হয়।
(

উদাহরণঃ $x + y, 3x + 2, ax + \frac{c}{dy}$

এক্ষেত্রে, দুইটি পদের গুণফল/ভাগফল আকারে প্রকাশিত রাশিকে দ্বিপদী বলা যাবে না।

উদাহরণঃ $\frac{x}{y}, xy, ax^3$

দ্বিপদী রাশি

- ♦ দ্বিপদী বিস্তৃতিতে পদ সংক্রান্ত আলোচনা:
- ➢ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে
  n অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে পদসংখ্যা $(n+1)$ টি
  n ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হলে পদসংখ্যা ∞ [এক্ষেত্রে $|x| < a$ বা $|x| > a$ এরূপ শর্ত বিবেচনা করে বিস্তৃতি করতে হবে]
- ➢ $(a+b \ldots \ldots . . r$ সংখ্যক$)^n$ এর পদসংখ্যা $^{n+r-1}C_{r-1}$
- ➢ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}.x^r$
- ➢ **মধ্যপদঃ** $(a+x)^n$ এর ক্ষেত্রে n জোড় হলে মধ্যপদ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ
  এবং n বিজোড় হলে মধ্যপদ $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$ তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ পদদ্বয় হবে।
- ➢ যদি $^nC_x = {}^nC_y$ এবং $x \neq y$ হয়, তবে $n = x + y$ হবে।
- ➢ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ ও r তম পদের অনুপাত, $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r}.\frac{x}{a}$

দ্বিপদী রাশি

- x+y
- $x - y$
- $ax + y$
- $cx - dy$

দ্বিপদী রাশি

- $x^2 + y^2$
- $x - y^3$
- $ax^2 + y^3$
- $cx^4 - dy^2$

সমাবেশ

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$^{n}C_{x} = {}^{n}C_{y} \rightarrow n = x + y$$

Poll Question 01

- কোনটি দ্বিপদী রাশি নয় (**Which one is not a binomial expression**)?

(i) $a + bx$ (ii) $b + \frac{8}{3y}$ (iii) $ab + xy + 2$ (iv) $ax^2 + \frac{cy^2}{dz^{-3}}$

দ্বিপদী রাশি

গাণিতিক আরোহ বিধিঃ

1. আরোহ বিধি ও আরোহ পদ্ধতি:
গাণিতিক আরোহ বিধি (Principle of Mathematical Induction) ঃ যদি ℕ স্বার্ভাবিক সংখ্যার সেট এবং অপর একটি সেট $S \subset \mathbb{N}$ এরূপ হয় যে $1 \in S$ এবং (ii) $m \in S$ হলে, $m + 1 \in S$ (যেখানে $m \in \mathbb{N}$) । তাহলে, $S = \mathbb{N}$, এর একটি মৌলিক স্বীকার্য। এ স্বীকার্যকে গাণিতিক আরোহ বিধি বলা হয়।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিঃ চলরাশি স্বাভাবিক সংখ্যা $n \in \mathbb{N}$ সম্বলিত কোন উক্তি যদি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং উক্তিটি $n = m \in \mathbb{N}$ এর জন্য সত্য ধরে যদি তা $n = m + 1 \in \mathbb{N}$ এর জন্যও সত্য হয়, তবে উক্তিটি সকল $n \in \mathbb{N}$

If ℕ is set of natural numbers ans ssn is such a set that, if (i) $1 \in S$ and (ii) $m \in S$ is true then $m + 1 \in S$, then $S = \mathbb{N}$ This is a fundamental postulate of ℕ. This relation is called principal of mathematical induction.

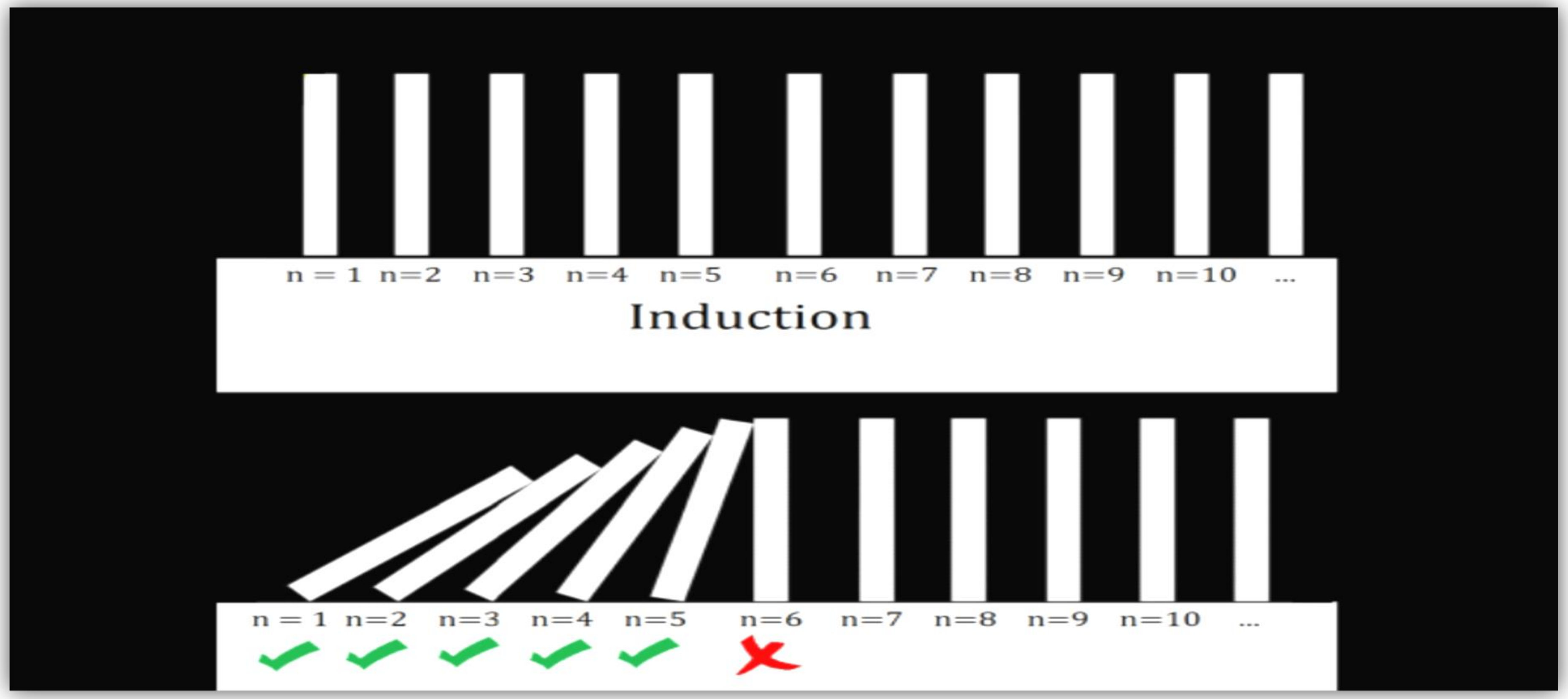
For $n \in \mathbb{N}$, If a statement is true for
(i) $n = 1$
(ii) $m = 1 \in \mathbb{N}$ after assuming that the statement is true $n = m \in \mathbb{N}$
Then the statement is true for all $n \in \mathbb{N}$

দ্বিপদী রাশি

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিঃ

দ্বিপদী রাশি

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিঃ



দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, x^3 + \ldots \ldots \ldots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \ldots \ldots \ldots + x^n$$

Isaac Newton discovered this theorem about 1665 and later stated, in 1676, with proof, the general form of the theorem (for any real number n), and a proof by john Colson was published in 1736

Sir Isaac Newton

John Colson

দ্বিপদী রাশি

Example:

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

Proof 1:

এই প্রমাণটি মূলত গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি নির্ভর (proof by induction)

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

Proof 1:

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

Proof 2:

ধর আমরা $(a+x)^2$ এর মান নির্ণয় করবে। এখন, $(a+x)^2$ মানে হল $(a+x)(a+x)$।
এই গুনটি নিম্নোক্ত ভাবে করা যায়

প্রথম $(a+x)$ হতে সম্ভাব্য পদ	দ্বিতীয় $(a+x)$ হতে সম্ভাব্য পদ	গুণফল	সিলেক্ট করার উপায়	
a	a	a^2	1	
a	x	ax	1	$2ax$
x	a	ax	1	
x	x	x^2	1	
		$a^2+2ax+x^2$		

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

Proof 2:

একই ভাবে, $(a+x)^3$ এর বিস্তারে যদি আমরা a^3 চাই, তাহলে আমাদের 3 টি a প্রয়োজন হবে। 3টি $(a+x)$থেকে 3টি সিলেক্ট করা যাবে $^3C_3$ বা 1 ভাবে। তাই এই রাশির বিস্তারে a^3 এর সহগ 1 ।

$(a+x)^3$ এর বিস্তারে যদি আমরা a^2x চাই, তাহলে আমাদের 2 টি a প্রয়োজন হবে। 3টি $(a+x)$থেকে 2টি সিলেক্ট করা যাবে $^3C_3$ বা 3 ভাবে। তাই এই রাশির বিস্তারে a^2x এর সহগ 3 ।

$(a+x)^3$ এর বিস্তারে যদি আমরা a^2x চাই, তাহলে আমাদের 1 টি a প্রয়োজন হবে। 3টি $(a+x)$থেকে 1টি সিলেক্ট করা যাবে $^3C_1$ বা 3 ভাবে। তাই এই রাশির বিস্তারে a^2x এর সহগ 3 ।

একই ভাবে, $(a+x)^3$ এর বিস্তারে যদি আমরা x^3 চাই, তাহলে আমাদের 0 টি a প্রয়োজন হবে। 3টি $(a+x)$থেকে 0টি সিলেক্ট করা যাবে $^3C_0$ বা 1 ভাবে। তাই এই রাশির বিস্তারে x^3 এর সহগ 1 ।

দ্বিপদী রাশি

দ্বিপদী উপপাদ্য (Binomial Theorem):

Proof 2:

সুতরাং

$$(a+x)^3 = a^3 + {}^3C_2a^2x + {}^3C_1a\,x^2 + \mathrm{x}^3$$

বা, $(a+x)^3 = a^3 + {}^3C_1a^2x + {}^3C_2a\,x^2 + \mathrm{x}^3$ (যেহেতু, সম্পূরক সমাবেশ অনুযায়ী ${}^3C_1 = {}^3C_2$)

অতএব, $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

অনুরূপভাবে বলা যায়,

$$(a+x)^n = an + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + \ \ldots\ldots + x^n$$

Poll Question 02

- $(a+2x)^{21}$ এর বিস্তৃতে কয়টি পদ বিদ্যমান **(How many terms there will be in expansion of** $(a+2x)^{21}$ **)?:**

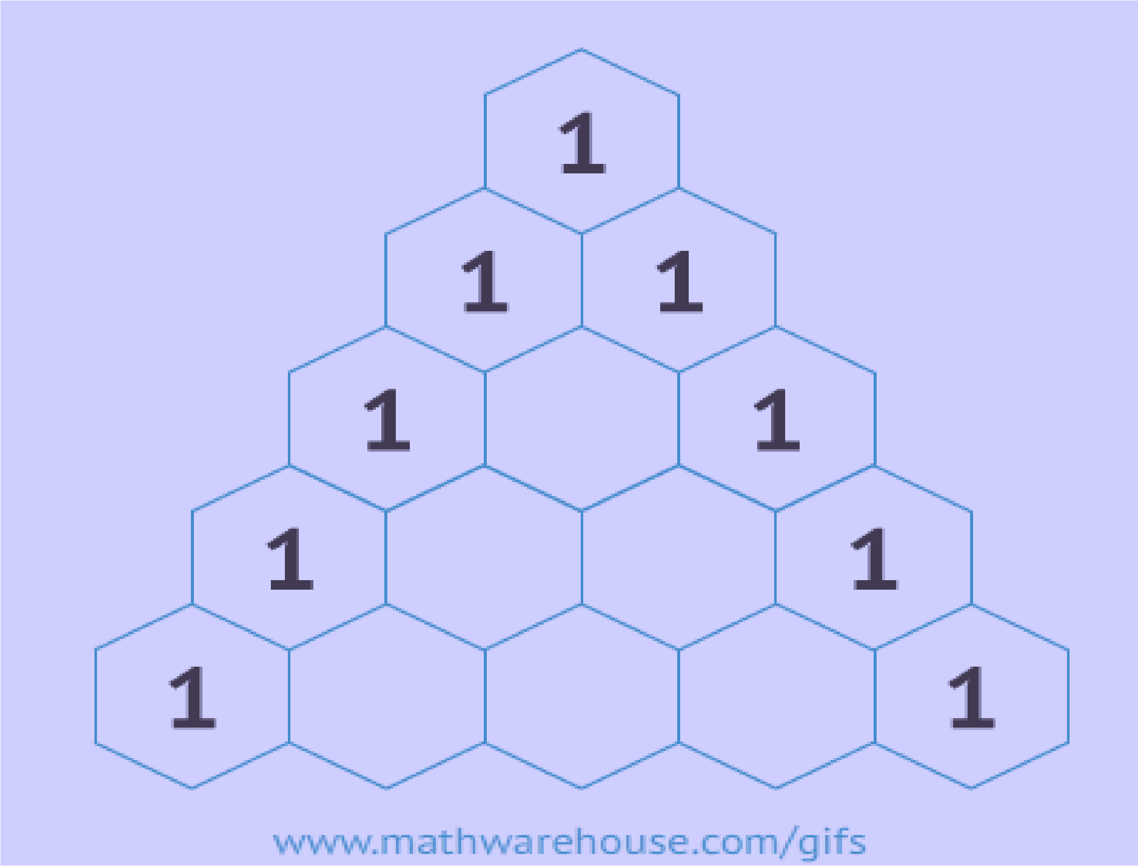
(i) 20 (ii) 21 (iii) 22 (iv) 23

দ্বিপদী রাশি

Pascal’s Triangle:

দ্বিপদী রাশি

Pascal's Triangle:



দ্বিপদী রাশি

Pascal’s Triangle:

Use:

দ্বিপদী রাশি

Pascal's Triangle:

Use:

$$(a + x)^2 = a^2 + \bigcirc ab + b^2$$

$$(a + x)^3 = a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + b^3$$

$$(a + x)^4 = a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + b^4$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

দ্বিপদী রাশি

সাধারণ পদঃ

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, x^3 + \dots \dots$$

এখানে,

১ম পদ = a^n

২য় পদ = ${}^nC_1\, a^{n-1}\, x$

৩য় পদ = ${}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2$

৪র্থ পদ = ${}^nC_3\, a^{n-3} x^3$

.

.

.

r+1 তম পদ = ${}^nC_r\, a^{n-r} x^r$

দ্বিপদী রাশি

সাধারণ পদঃ

$$T_{r+1} = {}^{n}C_{r}\, a^{n-r}\, x^{r}$$

দ্বিপদী রাশি

সমদূরবর্তী পদঃ

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, x^3 + \dots \dots \dots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \dots \dots \dots + x^n$$

$a = 1$ হলে,

$$(1 + x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \dots \dots \dots + {}^nC_r\, x^r + \dots \dots + {}^nC_{n-2}x^{n-2} + {}^nC_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

সম্পূরক সমাবেশ অনুযায়ী,

$${}^nC_1 = {}^nC_{n-1}$$

$${}^nC_2 = {}^nC_{n-2}$$

.

.

.

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

সুতরাং দ্বিতীয় রাশিটিতে, শুরুর দিক হতে এবং শেষ দিক হতে সমদূরবর্তী পদ পরস্পর সমান।

দ্বিপদী রাশি

মধ্যপদঃ

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + x)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

দ্বিপদী রাশি

মধ্যপদঃ

$(a + x)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\longrightarrow$ 2

$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\longrightarrow$ 2 , 3

$(a + x)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ $\longrightarrow$ 3

দ্বিপদী রাশি

মধ্যপদঃ

n জোড় হলে -

দ্বিপদী রাশি

মধ্যপদঃ

n বিজোড় হলে -

দ্বিপদী রাশি

মধ্যপদঃ

n জোড় হলে : $\frac{n}{2}+1$ তম পদ

n বিজোড় হলে : $\frac{n+1}{2}$ এবং $\frac{n+1}{2}+1$ তম পদ

দ্বিপদী রাশি

ক্রমিক পদের অনুপাতঃ

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^{n}C_{r}\; an^{-r}\; xr}{{}^{n}C_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}}$$

$$= \frac{n-r+1}{r}\,\frac{x}{a}$$

দ্বিপদী রাশি

১. বিস্তৃতি করঃ $(x+3y)^4$

দ্বিপদী রাশি

২. এর বিস্তৃতিতে ৭ম পদ নির্ণয় করঃ

দ্বিপদী রাশি

৩. $(2x^3 - \frac{1}{x})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করঃ

দ্বিপদী রাশি

৪. $(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2})^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ নির্ণয় করঃ

দ্বিপদী রাশি

৫. $(a+2x)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 320 হলে a এর মান নির্ণয় করঃ

দ্বিপদী রাশি

৬. $(2x^2 + \frac{k}{x^3})^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুইটি সমান হলে k এর মান নির্ণয় করঃ

দ্বিপদী রাশি

৭. মধ্যপদ নির্ণয় করঃ

(i) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{21}$

৮. $(a + 3x)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম ৩ টি পদ যথাক্রমে b , $\frac{21}{2}bx$ এবং $\frac{189}{4}bx^2$ হলে, a , b এবং n এর মান নির্ণয় কর।

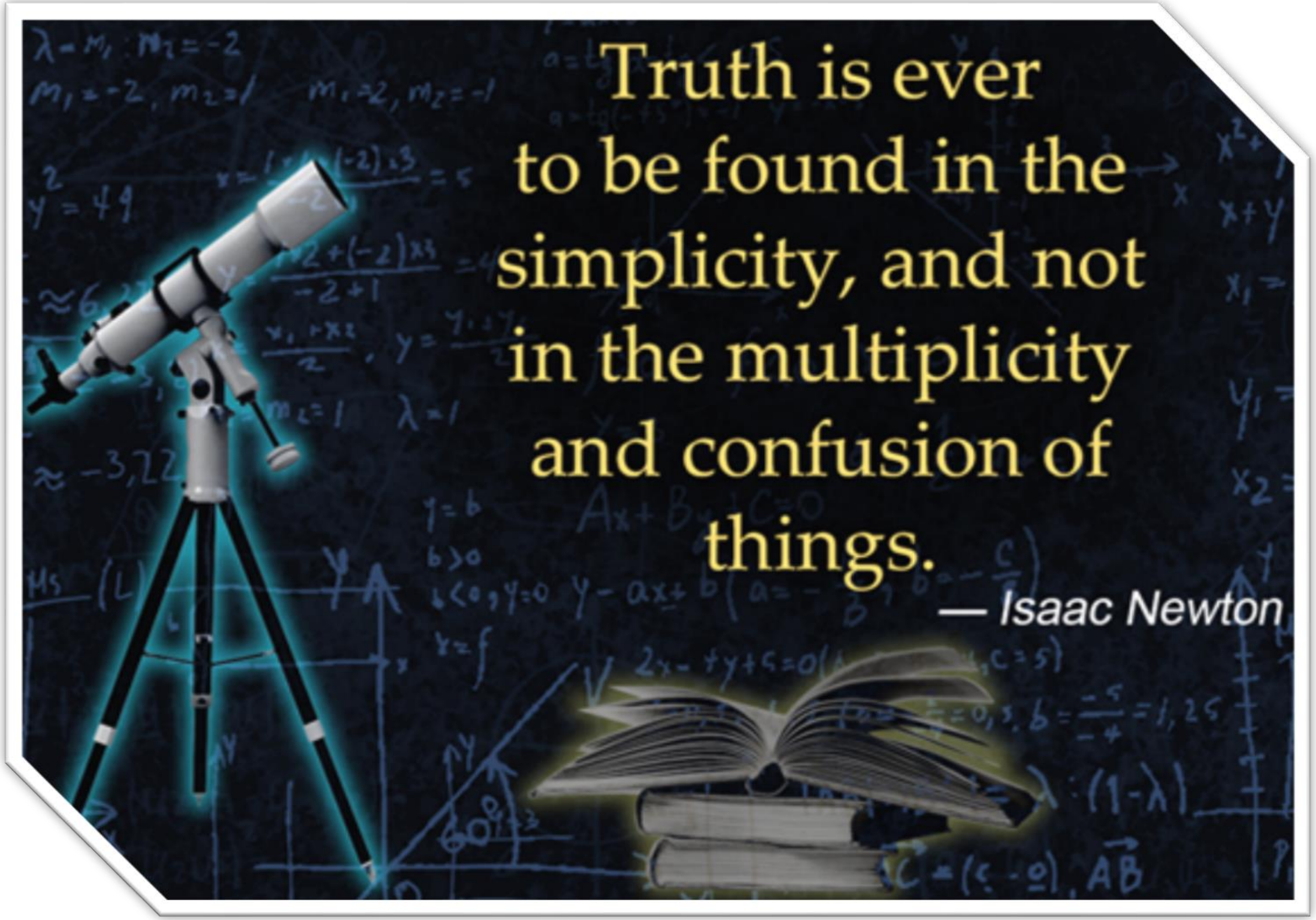
দ্বিপদী রাশি

৯. n স্বাভাবিক সংখ্যা হলে $\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে শেষ প্রান্ত হতে $(n+1)$ তম পদ নির্ণয় কর।

দ্বিপদী রাশি

১০. যদি $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে S_1 এবং S_2 যথাক্রমে বিজোড় এবং জোড় স্থানের পদগুলির সমষ্টি হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2) = S_1^{\ 2} - S_2^{\ 2}$; যেখানে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

দ্বিপদী রাশি


Truth is ever
to be found in the
simplicity, and not
in the multiplicity
and confusion of
things.
— Isaac Newton

লেগে থাকো সৎভাবে,
স্বপ্ন জয় তোমারই হবে

উদ্ভাস-উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

Thank You