দ্বাদশ শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : M-09

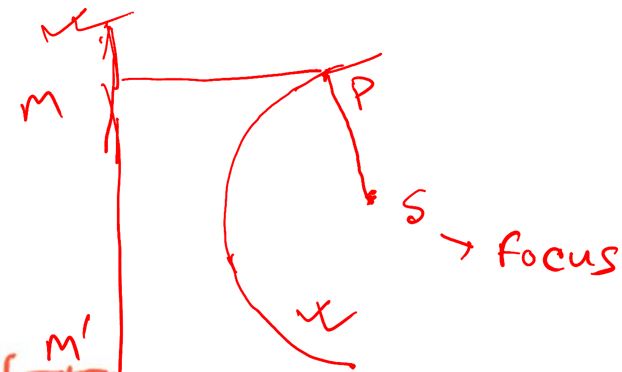
অধ্যায় ০৬ : কনিক

উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার
www.udvash.com

কনিক

কোন সমতলে একটি স্থির বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে যেসব বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত একটি স্থির ধ্রুব সংখ্যা, সেসব বিন্দুর সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথকে কনিক বলে।

এই স্থির বিন্দুটিকে উপকেন্দ্র , নির্দিষ্ট রেখাকে দ্বিকাক্ষ বা নিয়ামক রেখা এবং স্থির অনুপাতটিকে উৎকেন্দ্রিকতা (e) বলা হয়।



$$\frac{SP}{PM} = e$$

Poll Question-01

নীচের কোনটি সঞ্চারপথ নির্দেশ করে? (x এবং y চলক)

(a) $x = y$

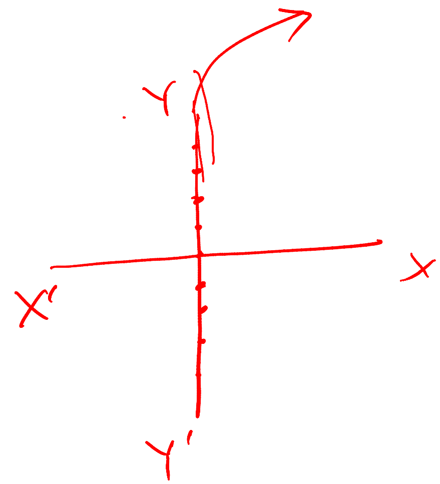
(b) $ax = 0$

(c) $x^2 + y^2 = a^2$

(d) All

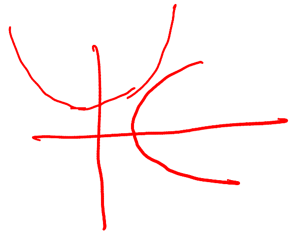
$ax = 0$

$x = 0$

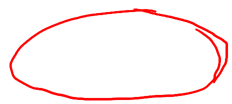


$$\frac{SP}{PM} = e$$

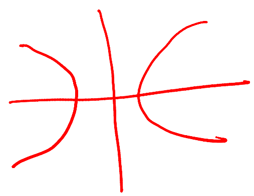
$e = 1 \Rightarrow$ পরাবৃত্ত



$0 < e < 1 \Rightarrow$ উপবৃত্ত

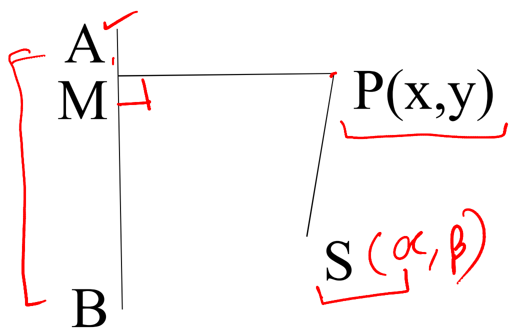


$e > 1 \Rightarrow$ অধিবৃত্ত



কনিকের সাধারণ সমীকরণ

মনে করি, কোন সমতলে একটি কনিকের ফোকাস (স্থির বিন্দু) S(α, β) এবং নিয়ামক রেখা (নির্দিষ্ট রেখা) $AB: lx + my + n = 0$ । কনিকটির উপরিস্থ যেকোন বিন্দু P(x,y) এবং PM, AB এর উপর লম্ব হলে কনিকের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{SP}{PM} = e.$



$\frac{SP}{PM} = e$

$SP = e.PM$

$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = e.\frac{|lx+my+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$

বা, SP = e . PM

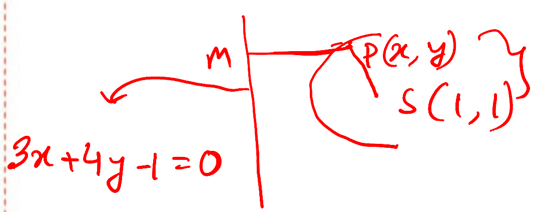
বা, $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = e\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}$

বা, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$

গাণিতিক সমস্যা

(1,1) উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ দ্বিকাক্ষ রেখা বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। তার অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$e = 1$



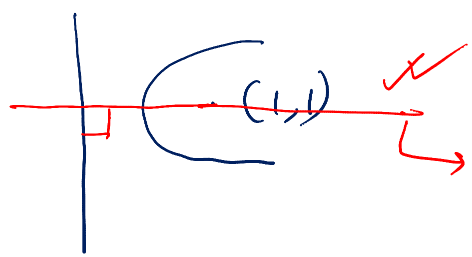
$SP = PM$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{(3x+4y-1)^2}{25}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1 = \frac{9x^2+16y^2+1-6x-8y+24xy}{25}$

$\Rightarrow 16x^2+9y^2-24xy-44x-42y+49=0$



$4x-3y+k=0 \rightarrow (1,1)$

$4.1-3.1+k=0 \Rightarrow k=-1$

$4x-3y-1=0$

কনিকের সাধারণ সমীকরণ

কনিকের সাধারণ সমীকরণকে $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ আকারে লিখা যায়।

(i) $a = b$ এবং $h = 0$ হলে, কনিকটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করবে।

(ii) $ab = h^2$ হলে, কনিকটি একটি পরাবৃত্ত নির্দেশ করবে।

(iii) $ab - h^2 > 0$ হলে, কনিকটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করবে।

(iv) $ab - h^2 < 0$ হলে, কনিকটি একটি অধিবৃত্ত নির্দেশ করবে।

Poll Question-02

K এর মান কত হলে সমীকরণটি $2x^2+2y^2+2Kxy+3x+4y+5=0$ পরাবৃত্ত হবে?

(a) 2

(b) -2

(c) $a\&b$ ✗

(d) $None$ ✓

$K^2 = 2 \cdot 2$

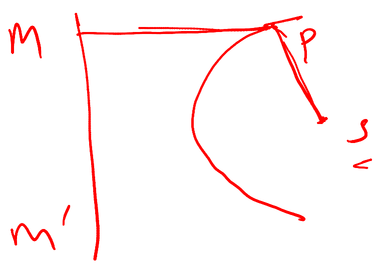
$K^2 = 4$

$K = \pm 2$

পরাবৃত্ত

কোন সমতলে একটি স্থির বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথকে পরাবৃত্ত বলে।

পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ $y^2 = 4ax$:



$e = 1 \Rightarrow SP = PM$

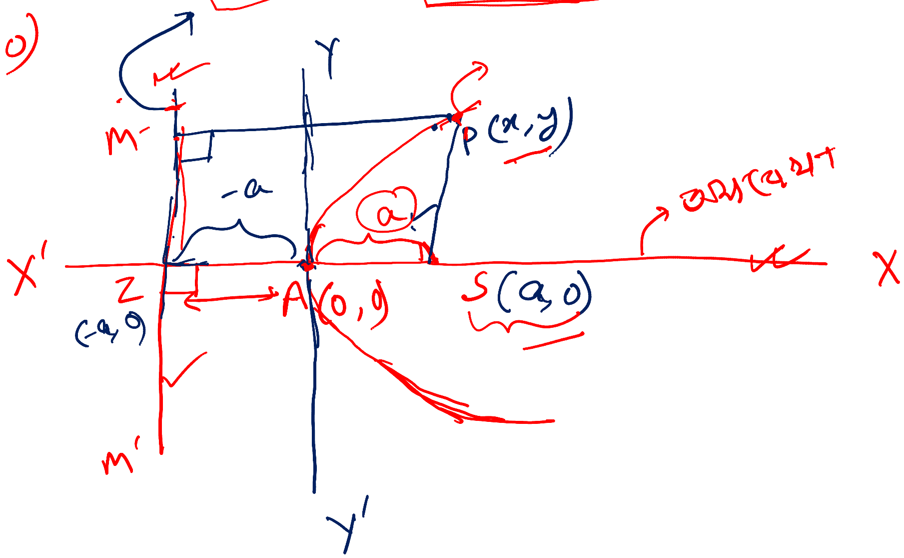
$x = -a \Rightarrow x + a = 0$

$A \equiv (0, 0)$

S

M

M'



$SP = PM \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x+a|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$

$\Rightarrow (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

$\Rightarrow y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = 4ax}$

কনিক সংক্রান্ত সংজ্ঞা

অক্ষরেখাঃ উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত যে রেখাটি নিয়ামকরেখার উপর লম্ব তাকে কনিকের অক্ষরেখা বলা হয়।

শীর্ষবিন্দুঃ অক্ষরেখা কনিককে যে বিন্দুতে বা বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাকে বা তাদেরকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়।

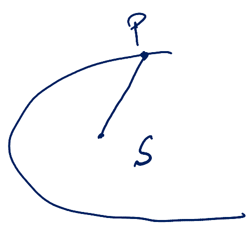
নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুঃ নিয়ামকরেখা কনিকের যে বিন্দু বা বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাকে বা তাদের কে নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু বলা হয়।

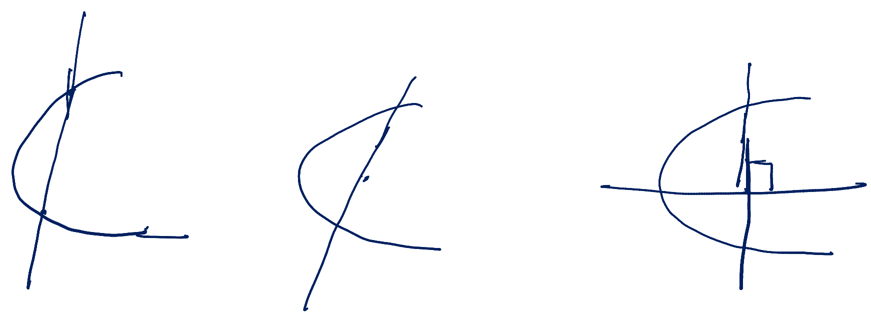
কনিক সংক্রান্ত সংজ্ঞা

উপকেন্দ্রিক দূরত্বঃ উপকেন্দ্র থেকে কনিকের যেকোন বিন্দুর দূরত্বকে উপকেন্দ্রিক দূরত্ব বা ফোকাস দূরত্ব বলা হয়।

উপকেন্দ্রিক জ্যাঃ কনিকের যে জ্যা কনিকের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে তাকে উপকেন্দ্রিক জ্যা বলা হয়।

উপকেন্দ্রিক লম্বঃ উপকেন্দ্রিক জ্যা অক্ষের উপর লম্ব হলে তাকে কনিকের উপকেন্দ্রিক লম্ব বলা হয়।





Poll Question-03

$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের নিয়ামকরেখার সমীকরণ কোনটি?(a>0)

(a) $x = 0$

(b) $ax = 0$

(c) $x + a = 0$

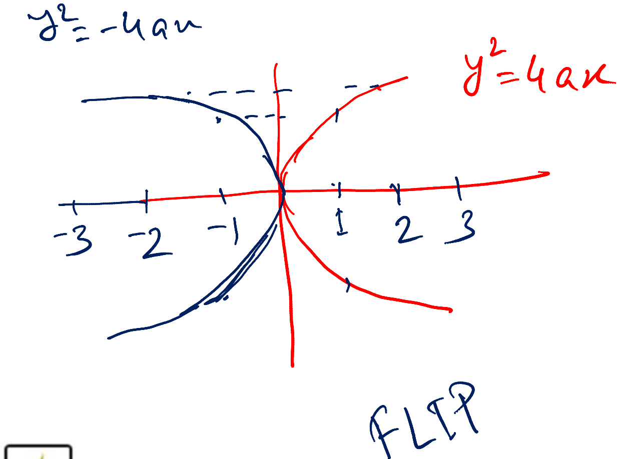
(d) $x - a = 0$

পরাবৃত্তের অন্যান্য আকৃতি

$a > 0$ হলে, $y^2 = -4ax$ পরাবৃত্তটি y অক্ষের বামদিকে x অক্ষের প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে।

$a > 0$ হলে, $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তটি x অক্ষের উপরে y অক্ষের প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে।

$a > 0$ হলে, $x^2 = -4ay$ পরাবৃত্তটি x অক্ষের নীচে y অক্ষের প্রতিসমরূপে অবস্থান করবে।



$y^2 = -4ax$

$\Rightarrow y^2 = 4a(-x)$

$x = -1 \Rightarrow y = \pm 2$

$x = -2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$

$x = -3 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$

$a = 1 \Rightarrow$

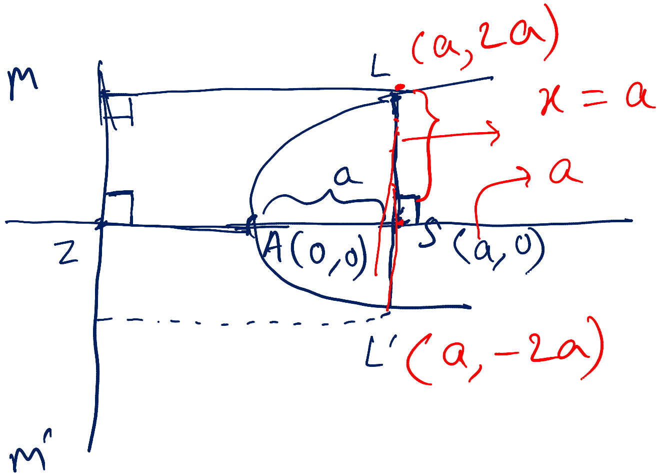
$x = 1, \quad y = \pm 2$

$x = 2, \quad y = \pm 2\sqrt{2}$

$x = 3, \quad y = \pm 2\sqrt{3}$

$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL’ $= 4|a|$



$AS = a = AZ$

$SZ = AS + AZ = a + a = 2a$

MZSL - আয়তক্ষেত্র

$LM = SZ$

$LS = LM$

$\Rightarrow LS = SZ$

$\Rightarrow LS = 2a$

$L'S = 2a$

$LL' = LS + L'S$

$= |2a + 2a|$

$= 4|a|$

Poll Question-04

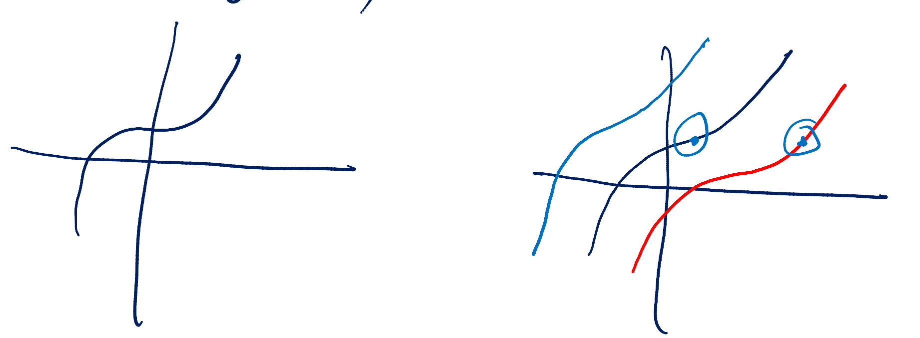
$(y-3)^2 = 4a(x-6)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু কোনটি?

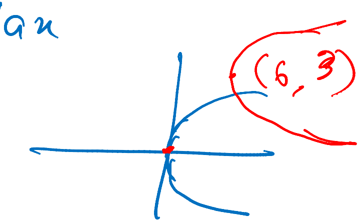
(a) (0,0)

(b) (3,6)

(c) (-3,-6)

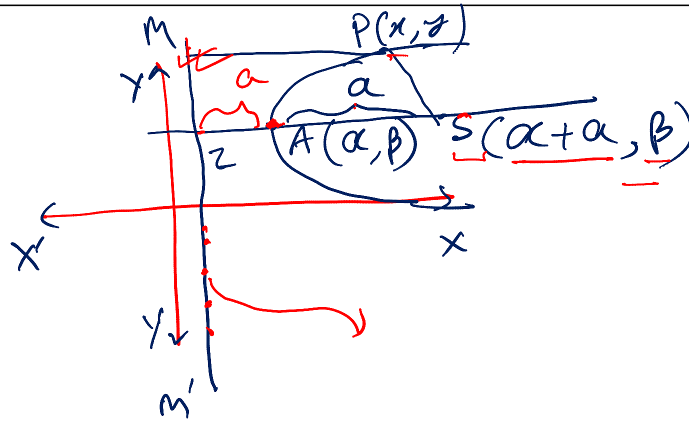
(d) (3,0)





পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (α, β) এবং x অক্ষরেখা অক্ষের সমান্তরাল হলে এর সাধারণ সমীকরণ

$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$:



MZM': $x = \alpha - a$

$x - \alpha + a = 0$

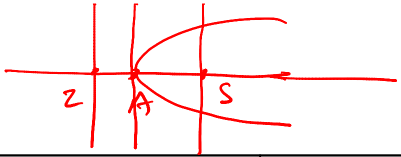
$SP = PM$

$\Rightarrow \sqrt{\{x-(\alpha+a)\}^2 + (y-\beta)^2} = \dfrac{|(x-\alpha+a)|}{\sqrt{1^2+0^2}}$

$\Rightarrow (x-\alpha-a)^2 + (y-\beta)^2 = (x-\alpha+a)^2 \Rightarrow (y-\beta)^2 = (x-\alpha+a)^2 - (x-\alpha-a)^2$

$\Rightarrow (y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

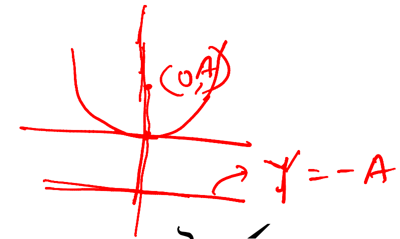
$y^2 = 4ax$



$x^2 = 4ay$

	$y^2 = 4ax$	~~$y^2 = -4ax$~~		
শীর্ষবিন্দু	$(0, 0)$			
উপকেন্দ্র	$(a, 0)$			
দ্বিকাক্ষের পাদবিন্দু	$(-a, 0)$			
অক্ষরেখা	$y = 0$			
দ্বিকাক্ষ রেখা	$x + a = 0$			
উপকেন্দ্রিক লম্ব	$x - a = 0$			
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$4\|a\|$			
উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু	$(a, \pm 2a)$			
শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$			

গাণিতিক সমস্যা



$5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও দ্বিকাক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$5x^2+30x+2y+59=0$

$\Rightarrow x^2+6x+\frac{2}{5}y+\frac{59}{5}=0$

$\Rightarrow x^2+6x+9 = 9-\frac{2}{5}y-\frac{59}{5}$

$\Rightarrow (x+3)^2 = -\frac{2}{5}(y+7)$

$\Rightarrow (x+3)^2 = 4.\left(-\frac{1}{10}\right)(y+7)$

$x+3 = X$ $\quad$ $y+7 = Y$ $\quad$ $A = -\frac{1}{10}$

$X^2 = 4AY$

শীর্ষবিন্দুঃ

$X = 0$ $\quad$ $Y = 0$

$x+3 = 0$ $\quad$ $y+7 = 0$

$x = -3$ $\quad$ $y = -7$

$(-3,-7)$

উপকেন্দ্র:

$X = 0$

$x + 3 = 0$

$x = -3$

$Y = A$

$y + 7 = -\frac{1}{10}$

$y = -\frac{71}{10}$

$\left(-3, -\frac{71}{10}\right)$

$LL' = 4|A|$

$= 4 \cdot \left|-\frac{1}{10}\right|$

$= \frac{2}{5}$

অক্ষ:

$X = 0$

$x + 3 = 0$

দিকাক্ষ:

$Y = -A$

$y + 7 = -\left(-\frac{1}{10}\right)$

$y + 7 = \frac{1}{10}$

$y + \frac{69}{10} = 0$

গাণিতিক সমস্যা

$y^2 = 4(x - 2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও দ্বিকাক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

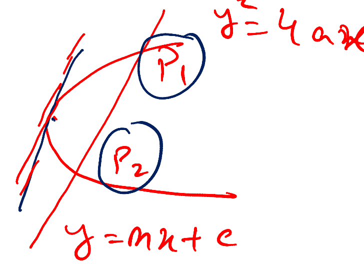
গাণিতিক সমস্যা

$y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং তা $(0,5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c এর মান নির্ণয় কর।

$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তে $y = mx + c$ সরলরেখাটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত

$$c = \frac{a}{m}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$y = mx + c$

$y^2 = 4ax$

$(mx+c)^2 = 4ax$

$\Rightarrow m^2x^2 + 2mxc + c^2 = 4ax$

$\Rightarrow m^2x^2 + (2mc - 4a)x + c^2 = 0$

$$x = \frac{-(2mc - 4a) \pm \sqrt{(2mc-4a)^2 - 4.m^2.c^2}}{2.m^2}$$

$(2mc - 4a)^2 - 4m^2c^2 = 0$

$\Rightarrow 4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 - 4m^2c^2 = 0$

$\Rightarrow 16amc = 16a^2$

$\Rightarrow c = \frac{a}{m}$

গাণিতিক সমস্যা

$lx + my + n = 0$ দেখাও যে, সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে যদি $ln = am^2$ হয়।

$y = mx + c$

$c = \frac{a}{m}$

$my = -lx - n$

$y = \left(-\frac{l}{m}\right)x \left(-\frac{n}{m}\right)$

$-\frac{n}{m} = \frac{a}{-l/m}$

$\Rightarrow ln = am^2$

Poll Question-05

$x^2 = x-y$ পরাবৃত্তে, $x = k - y$ স্পর্শক হবে যদি-

(a) $k = 1$ ✓

(b) $k = 0$

(c) $k = -1$

(d) $k = 3$

$y = k - x$

$x^2 = x - y$

$\Rightarrow x^2 = x - (k - x)$

$\Rightarrow x^2 = x - k + x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + k = 0$

$\sqrt{4 - 4.1.k} = 0$

$4 - 4k = 0$

$k = 1$

$x^2 = x - y$

$\Rightarrow x^2 - x = -y$

$\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = -y + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4.\left(-\frac{1}{4}\right)\left(y - \frac{1}{4}\right)$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে