بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

বিস্‌মিল্লাহির রাহ্‌মানির রাহীম

উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

নবম শ্রেণি: উচ্চতর গণিত (অধ্যায়-9.1)

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

Lecture HM-26

মূলদ ও অমূলদ সূচক

যেকোনো সূচকভিত্তিক অংকের ক্ষেত্রে দুইটা বেসিক জিনিস জানা প্রয়োজন:

- স্ট্রাকচারঃ ভিত্তি ও সূচক

যেকোনো সূচকভিত্তিক অংকে একটি ভিত্তি থাকে, ও একটি সূচক থাকে, যা নির্ণয় করে ভিত্তিটি কত সংখ্যক বার গুণ হয়েছে

- সূচকের স্বাধীনতা

সূচকীয় সংখ্যাটা স্বাধীন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, যেকোনো মূলদ, অমূলদ, ধনাত্মক, ঋণাত্মক, যেকোনো কিছু

a^n

সূচক

ভিত্তি

সুত্র ফিরে দেখা

If a∈R and n∈N,

$$a^1 = a, \boxed{a^{n+1} = a^n . a}$$

If a∈R and m,n∈N,

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

If a∈R, a≠0 and m,n∈N, m≠n,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad when\ m > n$$

$$or \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad when\ m < n$$

If a∈R and m,n∈N,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

If a,b∈R and n∈N,

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

If a∈R and a≠0

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, when\ n∈N$$

D1. $a^1 = a$

D2. $a^n = \underbrace{a . a . \ldots a}_{n\text{-সংখ্যক}}$

From D2,

$a^{n+1} = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n+1 \text{ সংখ্যক}}$

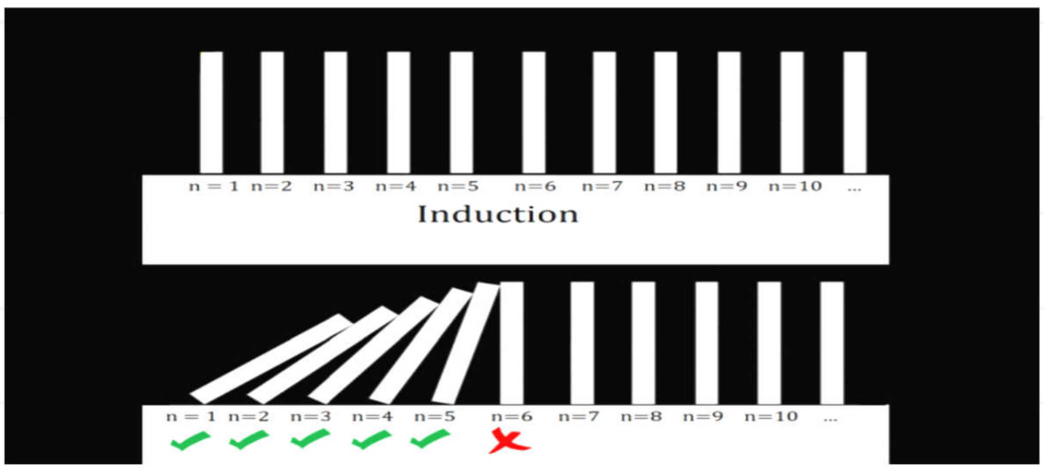
$= \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{n\text{-সংখ্যক } a} \times a$

$= a^n . a$

গাণিতিক আরোহ বিধি

• বিধি:

যদি কোনো গাণিতিক বিবৃতি একক মানের জন্য সত্য প্রমাণিত হয়, এবং যদি কোনো সাধারণ মানের জন্য সত্য ধরে নিলে বিবৃতিটা তার পরবর্তী মানের জন্যও সত্য প্রমাণিত হয়, তাহলে তা যেকোনো মানের জন্য সত্য স্বীকার করে নিতে হবে।



গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি

মোট তিনটি

- উপযুক্ত চলকের মান 1 ধরে নিয়ে বিবৃতি সত্য প্রমাণ করা
- চলকটির মান k হলেও বিবৃতিটা সত্য, এমন ধরে নেওয়া
- চলকটির মান k+1 ধরে বিবৃতিটা সত্য প্রমাণ করা

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Step-1: $n=1$ → "True"

Step-2: $n=k$ → "True"

Step-3: $n=k+1$ → "True"

1, 2, 3, 4, ...

1 2 3 4 5...

উদাহরণ (আরোহ পদ্ধতি)

- সূত্র-২

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

এখানে চলক (variable) নিই n কে,

Step-1: So if, n=1, then,

$$a^m . a^1$$
$$= a^m . a$$
$$= a^{m+1}\ [formula\ 1]$$

অর্থাৎ n=1 এর জন্য এটা সত্য।

Step-2: এবার ধরে নিই, n=k এর জন্যও এটা সত্য,

অর্থাৎ, $a^m . a^k = a^{m+k}$

Step-3: এখন ধরি, n=k+1, তাহলে,

$$a^m . a^{k+1}$$
$$= a^m . (a^k . a)\ [formula\ 1]$$
$$= (a^m . a^k) . a$$
$$= a^{m+k} . a\ [from\ step\ 2]$$
$$= a^{m+k+1}\ [formula\ 1]$$

অর্থাৎ এটা n=k+1 এর জন্যও সত্য

সুতরাং, এটা n এর সব মানের জন্য সত্য

n=1 হলে,

$LHS = a^m . a^n$

$= a^m . a^1 = a^m . a = a^{m+1}$

$RHS = a^{m+n} = a^{m+1} = LHS$

$n = k \Rightarrow \boxed{a^m . a^k = a^{m+k}}$

$\Rightarrow a^m (a^k . a) = a^{m+k} . a$

$\Rightarrow a^m (a^k . a) = a^{m+k} . a$

$\Rightarrow a^m . a^{k+1} = a^{m+k} . a$

$\Rightarrow a^m . a^{(k+1)} = a^{m+(k+1)}$

n=k+1

Formula,

$a^m . a^{k+1} = a^{m+k+1}$

উদাহরণ (আরোহ পদ্ধতি)

Example 4

If m,n∈N , then,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, when\ a \neq 0$$

এখানে তিনটা কেস আছে

Case:1- যখন m>n, তাহলে

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ [formula\ 3]$$

Case:2- যখন m<n, তাহলে

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\ [formula\ 3]$$

$$= a^{-(n-m)}\ \left[a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right]$$

$$= a^{m-n}$$

Case:3- যখন m=n, তাহলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m-n}$$

অর্থাৎ, m,n এর যেকোনো মানের জন্য $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & ;\ m>n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & ;\ m<n \end{cases}$$

$$\left[\ a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-\cancel{n}+\cancel{n}}\right.$$

$$\left.\Rightarrow a^{m-n} \cdot a^n = a^m\ \right]\ m>n$$

$$\Rightarrow a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\left[\ a^{n-m} \cdot a^m = a^{n-\cancel{m}+\cancel{m}}\right.$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

$$\Rightarrow \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

মূলের আলোচনা

The structure of root considered as this thing,

If $x^n = a$

Then x will be called the nth root (n−তম মূল) of a [only if n∈N, and n>1]

x can be written as $\sqrt[n]{a}$.

Some points to be noted:

- If a>0 and n∈N, n>1, then there are two cases. If n is odd(বিজোড়), then the nth root will be simply $\sqrt[n]{a}$. But if n is even(জোড়), then there will be two nth roots for a. One is $\sqrt[n]{a}$, and another is $-\sqrt[n]{a}$
- If a<0 and n∈N, n>1, then there are two cases again. If n is odd, then the nth root will be $-\sqrt[n]{a}$. But if n is even, there is no nth root for a.

Relation between root and exponent:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$n = k+1$

$\Rightarrow LHS = (a^m)^{k+1}$

$RHS = a^{m(k+1)}$

$x^n = a$

$x = \sqrt[n]{a}$

$n =$ জোড়

$x = +\sqrt[n]{a}$

$-\sqrt[n]{a}$

$n =$ বিজোড়

$x = \sqrt[n]{a}$

$x = 4$

$x = \pm 2$

$a^n \cdot a = a^{n+1}$

$x^n = a$

$x = \pm\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{a}$

F.4: $(a^m)^n = a^{mn}$

$n = 1 \Rightarrow LHS = (a^m)^1 = a^m$

$RHS = a^{m.1} = a^m = LHS$.

$n = k \Rightarrow (a^m)^k = a^{mk}$

$(a^m)^k \cdot a^m = a^{mk} \cdot a^m$

a^m

$\Rightarrow (a^m)^{k+1} = a^{mk+m}$

$\Rightarrow (a^m)^{k+1} = a^{m(k+1)}$

F.5: $(a.b)^n = a^n . b^n$

অংক নিয়ে কিছু টিপস

- $If\ a^{x} = 1, where\ a > 0\ and\ a \neq 1, then\ x = 0$
- $If\ a^{x} = 1, where\ a > 0\ and\ x \neq 0, then\ a = 1$
- $If\ a^{x} = a^{y}, where\ a > 0\ and\ a \neq 1, then\ x = y$
- $If\ a^{x} = b^{x}, where \frac{a}{b} > 0\ and\ x \neq 0, then\ a = b$

$x \to 0$

$a^x = 1;\ a > 0, a \neq 1$

$\square^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$a^x = 1,\ x \neq 0,\ a > 0$

$a = 1$

$a^x = a^y$

$x = y$

$a^x = b^x$

$a = b$

$x^2 = 4$

$\Rightarrow x = +\sqrt{4} = +2$

$-\sqrt{4} = -2$

$\boxed{\sqrt{4} = \cancel{\pm 2}}$

$x^2 = 4,\ x = 2, -2$

$2 \times 2 = 4$

$(-2)(-2) = 4$

$x^3 = 8,\ x = 2$

$2 \times 2 \times 2 = 8$

$(-2)(-2)(-2) = -8$

উল্লাস উন্মেষ
শিক্ষা পরিবার

Example 11

If $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^{x}$*, then what is the value of* x? (x এর মান কত?)

$\frac{3}{2}\cdot x = x\cdot\frac{3}{2}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x^{x\sqrt{x}}$

$x^{x\cdot\sqrt{x}}$

$=(x^x)^{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow (x^x)^{\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$

$\Rightarrow (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}})^x$

$\Rightarrow (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^{1+\frac{1}{2}})^x$

$\Rightarrow (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^{3/2})^x$

$\Rightarrow (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^x)^{3/2}$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x = \frac{9}{4}$ $x = \frac{9}{4}$

$(2)^3 = (2)^{\boxed{3}}$

$(x^{3/2})^x$

$= x^{\frac{3}{2}x}$

$= (x^{x\cdot\frac{3}{2}})$

$= (x^x)^{3/2}$

$x^{3/2\, x}$

$x\cdot\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2}$

Example 13

$$\text{Prove that, } \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} = 1$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$LHS = \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$$

$$= \left(x^{b-c}\right)^{b+c} \times \left(x^{c-a}\right)^{c+a} \times \left(x^{a-b}\right)^{a+b}$$

$$= x^{(b-c)(b+c)} \times x^{(c-a)(c+a)} \times x^{(a-b)(a+b)}$$

$$= x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2} \cdot x^{a^2-b^2}$$

$$= x^{\cancel{b^2}-\cancel{c^2}+\cancel{c^2}-a^2+a^2-\cancel{b^2}} = x^0 = 1 = R.H.S$$

Example 14

If $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ and $abc = 1$, then show that, $x + y + z = 0$.

$a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^{\frac{1}{x}} = k$

$\Rightarrow \left(a^{\frac{1}{x}}\right)^{x} = k^{x}$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{x} \cdot x} = k^{x}$

$\Rightarrow \boxed{a = k^{x}}$ ... (i)

$\boxed{b = k^{y}}$ ... (ii)

$\boxed{c = k^{z}}$ ... (iii)

(i) × (ii) × (iii) ⇒

$\underbrace{a \cdot b \cdot c} = \underbrace{k^{x} \cdot k^{y} \cdot k^{z}}$

$\Rightarrow abc = k^{x+y+z}$

$\Rightarrow 1 = k^{x+y+z}$

$\Rightarrow k^{x+y+z} = 1$

$\therefore x + y + z = 0$

$b^{\frac{1}{y}} = k$

$\left(b^{\frac{1}{y}}\right)^{y} = k^{y}$

$b = k^{y}$

Example 15

Simplify:

$$\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}+\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}+\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$$

$$\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}$$

$$=\frac{a^{-y}}{a^{-y}(1+a^{y-z}+a^{y-x})}$$

$$=\frac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-y+y-z}+a^{-y+y-x}}$$

$$=\frac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}}$$

$$a^{-y}\cdot a^{y-z}$$

$$=a^{-y+y-z}=a^{-z}$$

$$=\frac{a^{-y}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}+\frac{a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}+\frac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$$

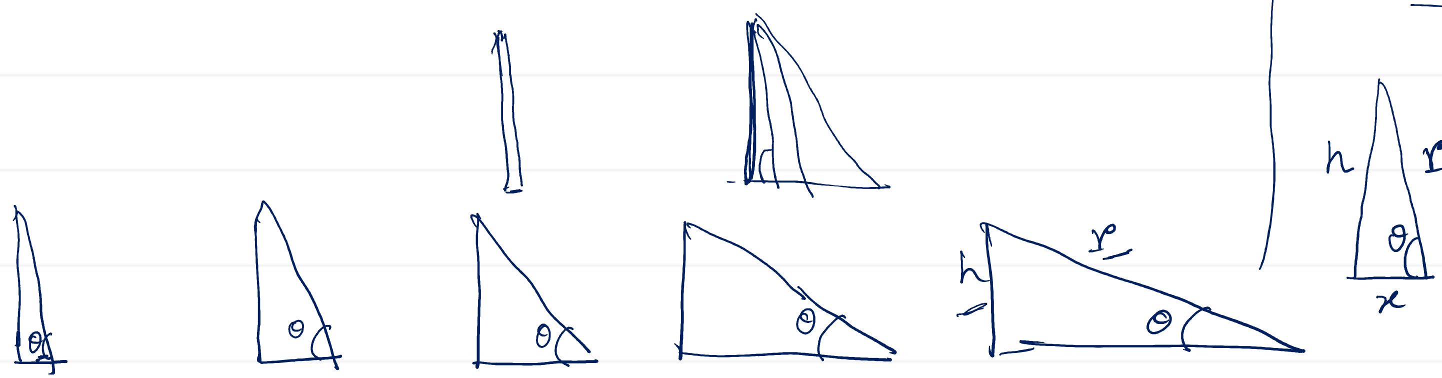
$$=\frac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}=1$$

$$a^{-y}\cdot a^{y-x}=a^{-y+y-x}$$

Example 17

$4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ (সমাধান করো)

$\sin(\theta) =$



$\theta = 90^\circ$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{h}{r} = 1$

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$\sin\theta = \frac{h}{r}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0.25}{72} = \frac{\text{Less}}{\text{greater}}$

Poll Question 01

$$\frac{a^3b^3}{a^2b^{-3}} = ?$$

(a) a (b) a^3b^6 (c) ab^6 (d) ab^0

$$\frac{a^3 b^3}{a^2 b^{-3}} = a^{3-2} \cdot b^{3-(-3)} = a^1 \cdot b^6$$

$$= ab^6$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Poll Question 02

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়?

(a) নতুন সূত্র তৈরি করতে

(b) কোন সূত্র প্রমাণ করতে

(c) কোনটিই নয়

$$2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$$

$$2^{1/3} + 2^{2/3}$$

$$2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

Poll Question 03

$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[5]{a} \times \ldots\ldots.. = ?$

(a) $(\sqrt{a})^{1\times2\times3\times..}$

✓ (b) $\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots}\right)$

(c) a

(d) 1

$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \ldots$

$= a^{\frac{1}{2}} \times a^{1/3} \times a^{1/4} \times a^{1/5} \times \ldots$

$= a^{\left(1/2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)}$

Exercise 01

যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ এবং এ থেকে প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ হলে, $b = 2$

Exercise 02

যদি $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$

$\Rightarrow (a-2) = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \quad \cdots (1)$

$\Rightarrow (a-2)^3 = \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$\Rightarrow a^3 - 3a^2.2 + 3a.2^2 - 2^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$

$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{2}{3}.3}$

$= 2^2$

$\Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = \{2^2 + 2^1\} + 3.2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(a-2)$

$\Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6 + 3.2^1(a-2)$

$\Rightarrow a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6 + 6(a-2) \quad \Rightarrow \boxed{a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0}$

Exercise 03

যদি $a^m . a^n = (a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0$

লেগে থাকো সৎভাবে,
স্বপ্ন জয় তোমারই হবে

উদ্ভাস-উন্মেষ শিক্ষা পরিবার

Thank You