ইঞ্জিনিয়ারিং এডমিশন প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : M-02

অধ্যায় ০২ : ভেক্টর

অধ্যায় ০৮ : ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

অধ্যায়: ০৮
ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

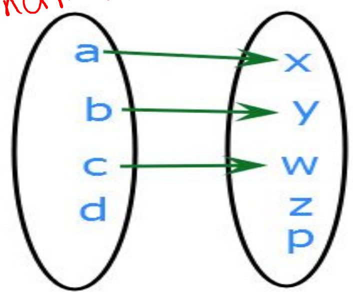
ম্যাপিং থেকে ফাংশন চিনি

MCQ

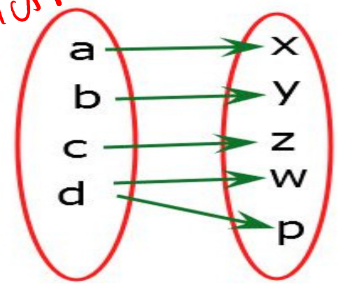
একটি input-এর একটিই output; একাধিক output নয়

একটি output-এর একাধিক input হলেও ফাংশন হয়।

function X



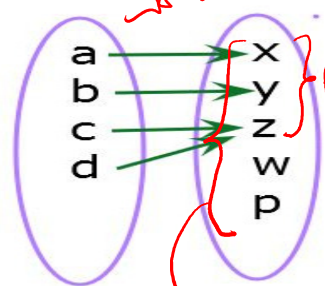
function X



সার্বিক X

function ✓

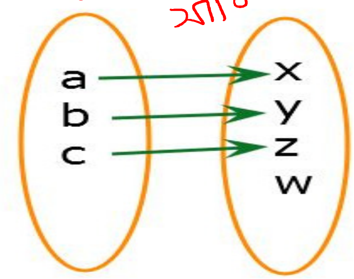
এক-এক X



f ✓

এক-এক ✓

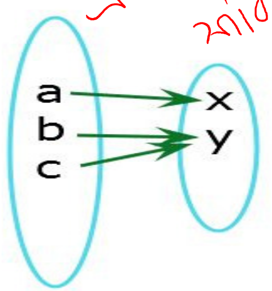
সার্বিক X



f ✓

এক-এক X

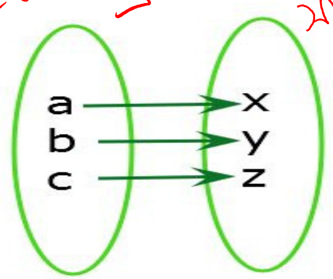
সার্বিক ✓



f ✓

এক-এক ✓

সার্বিক ✓



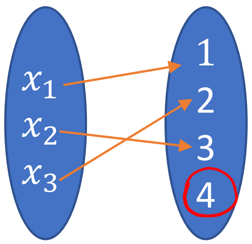
এক-এক → Output unique

সার্বিক → Range = Codomain

Poll Question 01

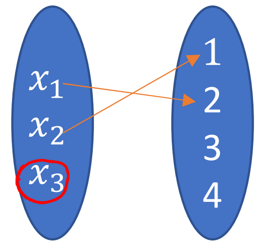
নিচের কোনটি সার্বিক ফাংশন?

(a)

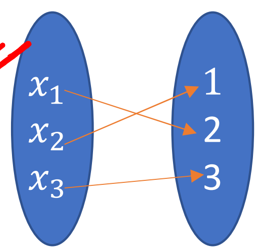


f x

(b)

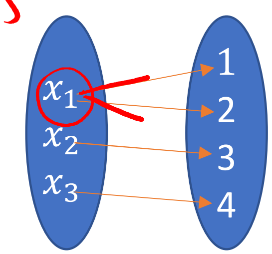


~~(c)~~



f x

(d)



MCQ

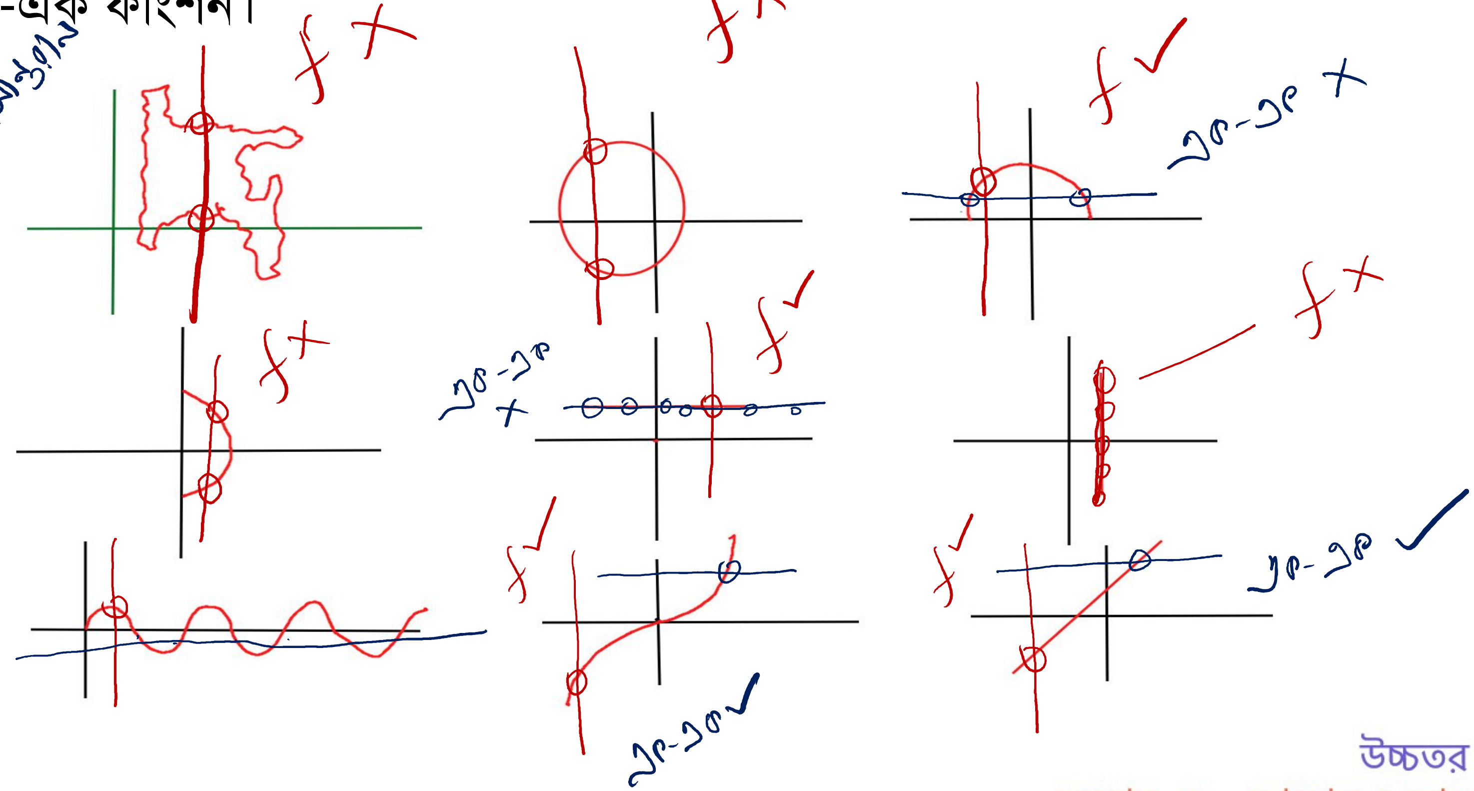
গ্রাফ থেকে ফাংশন ও এক-এক ফাংশন চিনি

y –অক্ষ বা তার সমান্তরাল রেখা যদি কোন অন্বয়ের লেখচিত্রকে শুধুমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে তা একটি ফাংশন।

x –অক্ষ বা তার সমান্তরাল রেখা যদি কোন ফাংশনের লেখচিত্রকে শুধুমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে তা একটি এক-এক ফাংশন।

function → y অক্ষের সমান্তরাল

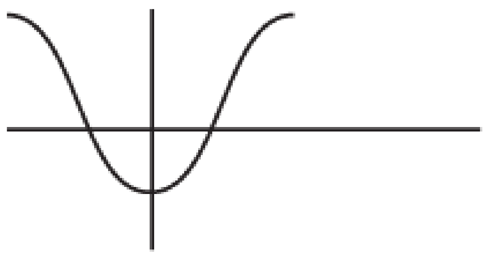
এক-এক → x অক্ষের সমান্তরাল



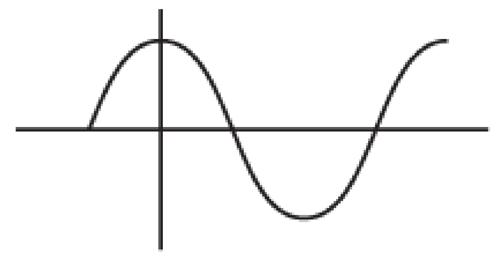
Poll Question 02

নিচের কোনটি এক-এক ফাংশন?

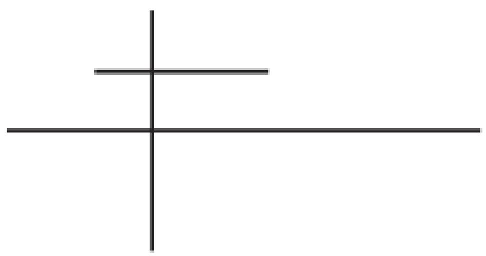
(a)



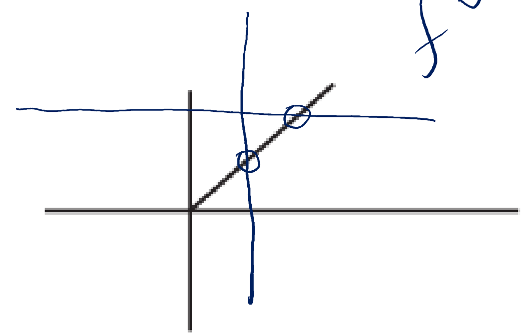
(b)



(c)



(d)



f ✓

এক-এক ✓

Domain নির্ণয়

$y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে,

x-এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য y তথা $f(x)$-এর মান বাস্তব হবে, তাদের (x-এর মানের) সেটকেই $f(x)$-এর Domain (ডোমেন) বলে।

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

$\boxed{f: A \longrightarrow B}$; $f(x) =$ জগতের যেকোন সম্পর্ক

Domain = A

Codomain = B

Previous

✱ $f: \{1,2,3\} \longrightarrow R$

$f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$

$D_f = \{1, 2, 3\}$

<u>Example:</u> $\boxed{f: R_+ \longrightarrow R}$; $f(x) = 2x + 1$

Domain = R_+

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

$f(x) = 2x + 1$

Sol^n:

$D_f = \mathbb{R}$

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{100}$

$D_f = \mathbb{R}$

① $\dfrac{c}{\square}$

② $\sqrt[c]{\square}$

③ Special function

(log, Sin, ln)

$\left.\begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{matrix}\right\}$ বাকি সবার

Domain $= \mathbb{R}$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

$$f(x) = \frac{2x+1}{5x-3}$$

Sol^{n}:

$5x - 3 \neq 0$

$5x \neq 3$

$x \neq \frac{3}{5}$

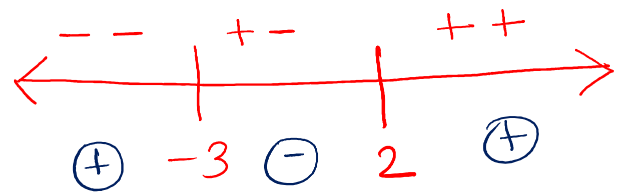
$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$

$$\frac{c}{\boxed{}}$$

$\boxed{} \neq 0$

উৎপাদক $\circledast$ + গুণফল $\circledast$

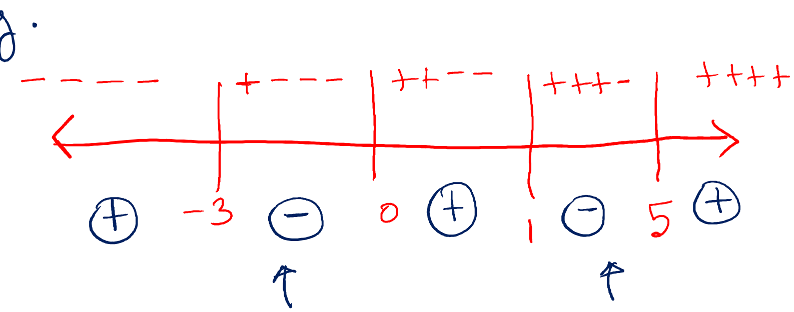
$$\underset{-3}{(x+3)}\;\underset{2}{(x-2)} \geq 0 \longrightarrow \text{Pos.}$$



$x \leq -3$ or $x \geq 2$

$(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

$$\underset{0}{x}\;\underset{1}{(x-1)}\;\underset{-3}{(x+3)}\;\underset{5}{(x-5)} \leq 0 \longrightarrow \text{neg.}$$



$-3 \leq x \leq 0$ or $1 \leq x \leq 5$

$[-3, 0] \cup [1, 5]$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

Root

Odd Root

- $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x+5}}$

$D_f = \mathbb{R}$

$2x+5 \neq 0$

$x \neq -5/2$

$D_f = \mathbb{R} - \{-5/2\}$

$\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{0} = 0$

$\sqrt[3]{-27} = -3$

Even Root

- $f(x) = \sqrt[4]{2x+5}$
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x+5}}$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -5/2$

$[-5/2, \infty)$

$2x+5 > 0$

$x > -5/2$

$(-5/2, \infty)$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{-4}$ ✗

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

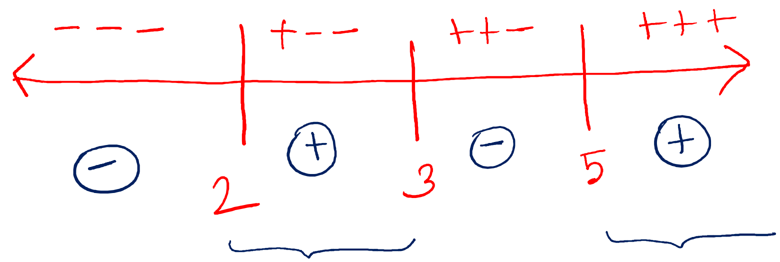
$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)}}$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)} \geq 0$$

Pos.

Sol^n:

$2 \leq x \leq 3$ or $x \geq 5$



$$\boxed{\begin{aligned} x-5 &\neq 0 \\ x &\neq 5 \end{aligned}}$$

$2 \leq x \leq 3$ or $x > 5$

$[2,3] \cup (5,\infty)$

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)}}$$

$x-5 \neq 0$ $\quad D_f = \mathbb{R}-\{5\}$

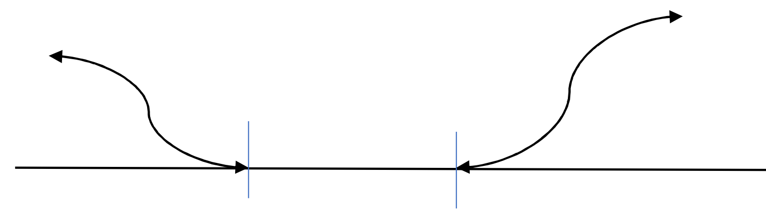
$x \neq 5$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

$f(x) = \sqrt[2]{4 - x^2}$

$f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$



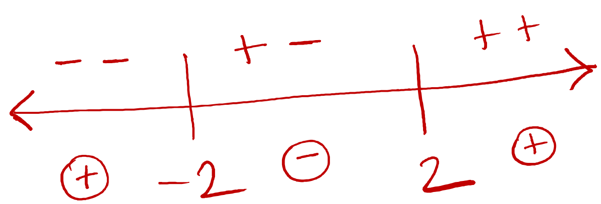
Sol^n:

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 4 \leq 0$

$(x+2)(x-2) \leq 0$ → neg.

$-2 \qquad 2$



$-2 \leq x \leq 2 \rightarrow D_f = [-2, 2]$

Poll Question 03

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ ফাংশনের Domain নির্ণয় কর।

~~(a)~~ $(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$

(b) $[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}]$

(c) $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$

(d) $[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}]$

$9 - 25x^2 > 0$

$25x^2 - 9 < 0$

$(5x+3)(5x-3) < 0$ neg.

$x = -3/5$ $\quad x = \frac{3}{5}$

$-- \quad +- \quad ++$

$+ \quad -3/5 \quad - \quad 3/5 \quad +$

$-3/5 < x < 3/5$

$(-3/5, \frac{3}{5})$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

$$f(x) = \sqrt{9x^2 - 25}$$

Sol^n:

$$9x^2 - 25 \geq 0$$

$$(3x+5)(3x-5) \geq 0 \longrightarrow \text{Pos.}$$

$-5/3$ $\quad$ $5/3$

$- \; -$ $\quad$ $+ \; -$ $\quad$ $+ \; +$

$+$ $\quad -5/3 \quad$ $-$ $\quad 5/3 \quad$ $+$

$$x \leq -5/3 \quad \text{or} \quad x \geq 5/3$$

$$(-\infty, -5/3] \cup [5/3, \infty)$$

উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

Poll Question 04

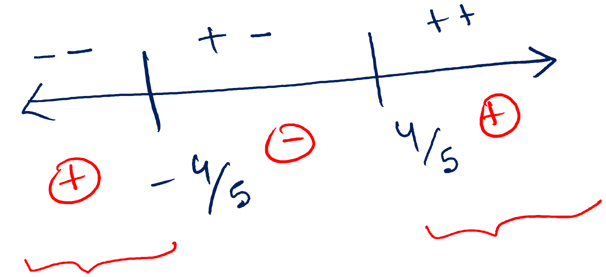
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{25x^2-16}}$ ফাংশনের Domain নির্ণয় কর।

(a) $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$

(b) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$

(c) $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \infty\right[$

(d) $\left]-\infty, -\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, \infty\right[$



$25x^2 - 16 > 0$

$(5x+4)(5x-4) > 0$ pos.

$-4/5$ $\quad$ $\frac{4}{5}$

$x < -4/5$ or $x > 4/5$

$D_f = (-\infty, -4/5) \cup (4/5, \infty)$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

$\log_a x$

এখানে দু'টি বিষয় খেয়াল রাখতে হবে।

1. $\boxed{x>0}$
2. $\boxed{a>0}$ এবং $\boxed{a \neq 1}$

আরো জেনে রাখা ভাল, $\log_a x = p$ হলে,

$x = a^p$ হবে।

$\log_2 -3$ ×

$\log_{-2} 3$ ×

$\log_1 3$ ×

$\log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

$$f(x) = \log(\underbrace{9 - x^2})$$

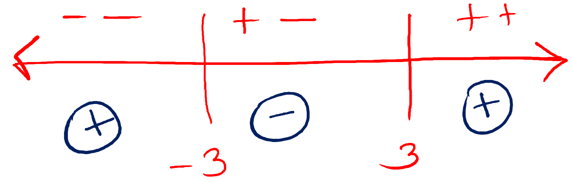
Sol^n:

$$9 - x^2 > 0$$

$$x^2 - 9 < 0$$

$$\underbrace{(x+3)(x-3) < 0}_{\text{neg.}}$$

$-3 \quad 3$



$$-3 < x < 3$$

$$D_f = (-3, 3)$$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

※ $f(x) = \log_2(\underbrace{\log_3(\log_4 x)})$

Sol^n:

$\log_a x = P$

$\Downarrow$

$x = a^P$

$\log_3(\log_4 x) > 0$

$\log_4 x > 3^0$

$\log_4 x > 1$

$\Downarrow$

$x > 4^1$

$\boxed{x > 4}$

$D_f = (4, \infty)$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

$D_f = x > -\frac{1}{2}$ and $x \neq 0$

$$f(x) = \log_{x+1}(2x+1)$$

Sol^n:

$2x+1 > 0$

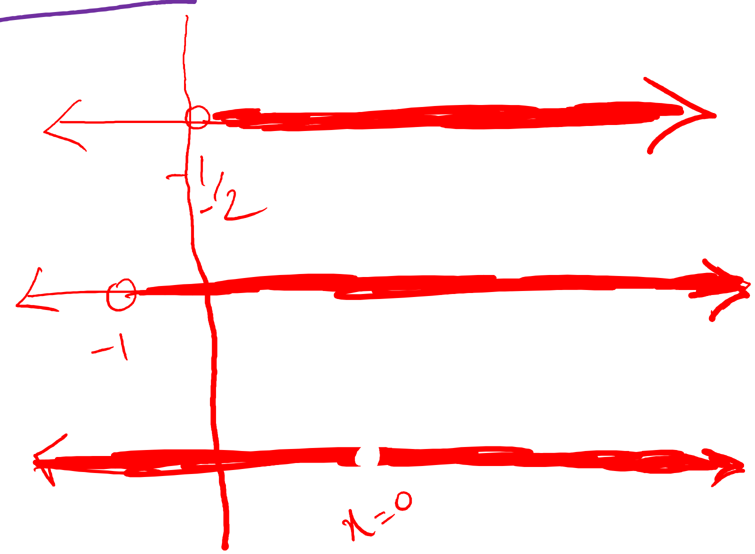
$\boxed{x > -\frac{1}{2}}$

$x+1 > 0$

$\boxed{x > -1}$

$x+1 \neq 1$

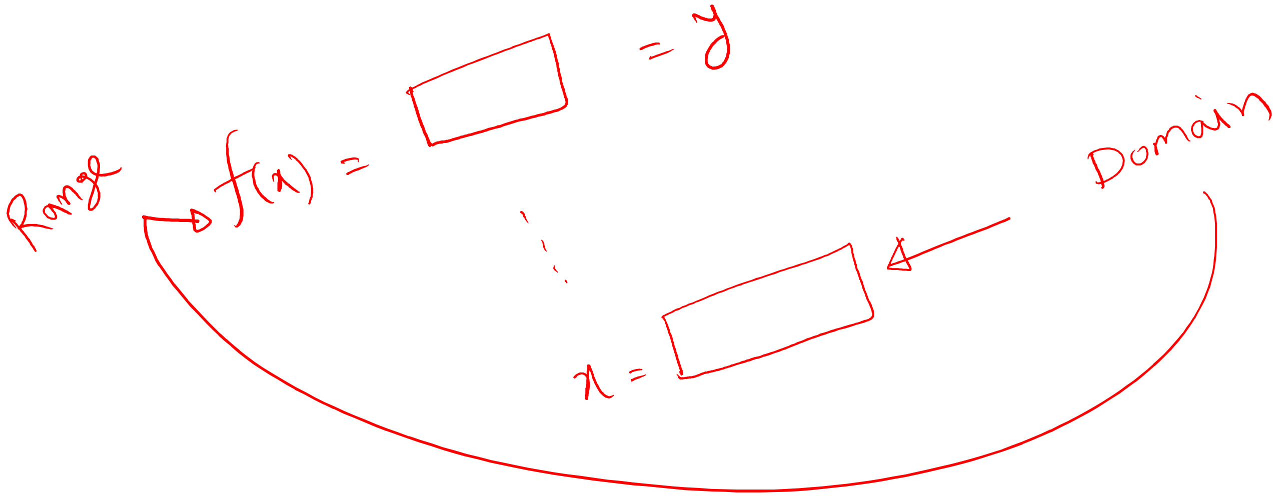
$\boxed{x \neq 0}$



Range নির্ণয়

$y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে,

y তথা $f(x)$-এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব এবং Domain-এর অন্তর্ভূক্ত হবে, তাদের(y -এর মানের) সেটকেই $f(x)$-এর Range(রেঞ্জ) বলে।



Range নির্ণয়

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow \text{Range} = \mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$$

লবে x এর সহগ

হরে x এর সহগ

Solve:

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+1} \qquad R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$f(x)=\frac{2}{3x-1} \longrightarrow R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{0}{3}\right\}$$

$$=\mathbb{R}-\{0\}$$

Range নির্ণয়

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Solve:

$f(x) = \sqrt{4-x^2} = y$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{4-x^2} = y$

$4-x^2 = y^2$

$x^2 = 4-y^2$

$x = \pm\sqrt{4-y^2}$

$4-y^2 \geq 0$

$y^2-4 \leq 0$

$(y+2)(y-2) \leq 0$

$- -$ $\quad -2 \quad$ $+ -$ $\quad 2 \quad$ $+ +$

$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$\boxed{-2 \leq y \leq 2}$

$\boxed{-2 \leq y \leq 2}$

$y \geq 0$

$R_f \rightarrow 0 \leq y \leq 2$

$[0, 2]$

Poll Question 05

$f(x) = \frac{x}{|x|}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

$x \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(a) $d_f = \mathbb{R},\ R_f = \mathbb{R}$

~~(b)~~ $d_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $R_f = \{-1, +1\}$

(c) $d_f = \mathbb{R}_+,\ R_f = [-1, +1]$

(d) $d_f = \mathbb{R}_-$, $R_f = \{0\}$

$\frac{3}{|3|} = 1$

$\frac{-5}{|-5|} = -1$

ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

tan x = sin x / cos x

cos x ≠ 0

$x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

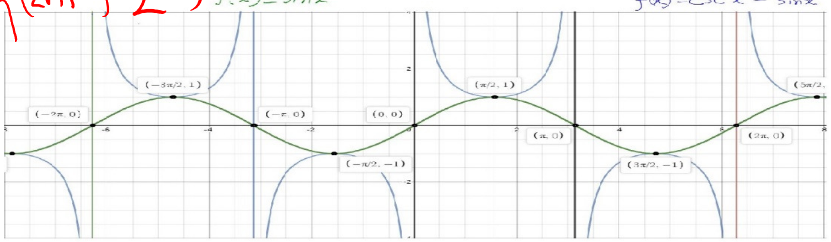
$D_f = R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\}$

Function	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{(2\cancel{x}\,n+1)\frac{\pi}{2}, n\epsilon z\right\}$	$\mathbb{R}$
$\cot x$	$\mathbb{R}-\{n\pi, n\epsilon z\}$	$\mathbb{R}$
$Cosec\ x$	$\mathbb{R}-\{n\pi,, n\epsilon z\}$	$[-\propto,-1]\cup[1,\propto]$
$\sec x$	$\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\epsilon z\right\}$	$[-\propto,-1]\cup[1,\propto]$

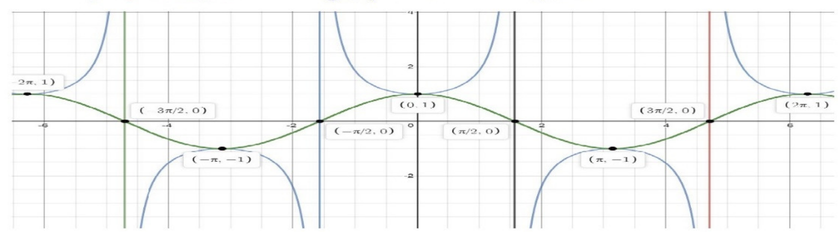
$\sin^2 x$ এর রেঞ্জ

$[0,1]$

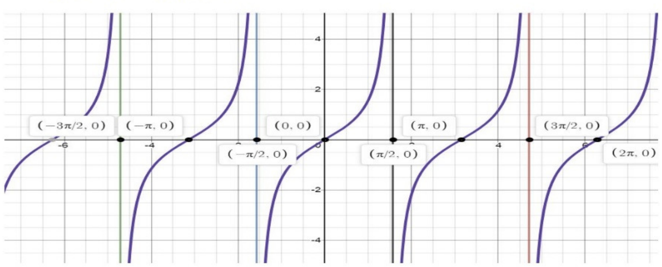
$f(x)=\sin x$ $f(x)=\csc x=\frac{1}{\sin x}$



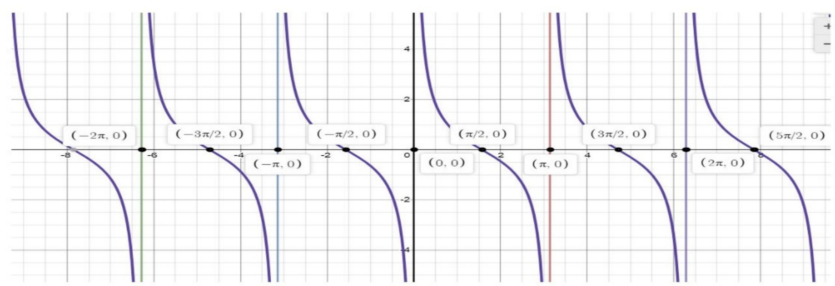
$f(x)=\cos x$ $f(x)=\sec x=\frac{1}{\cos x}$



$f(x)=\tan x$



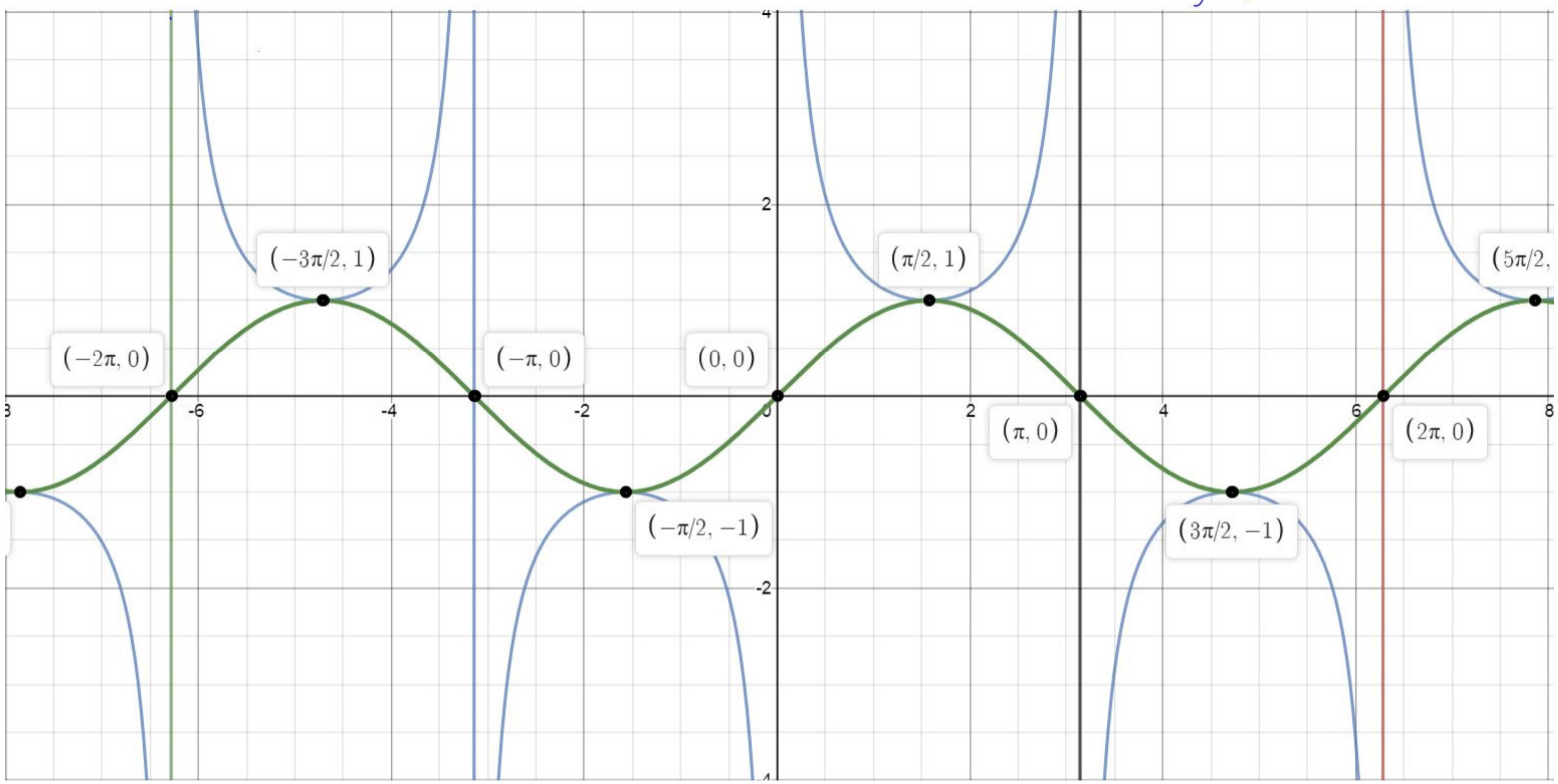
$f(x)=\cot x$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

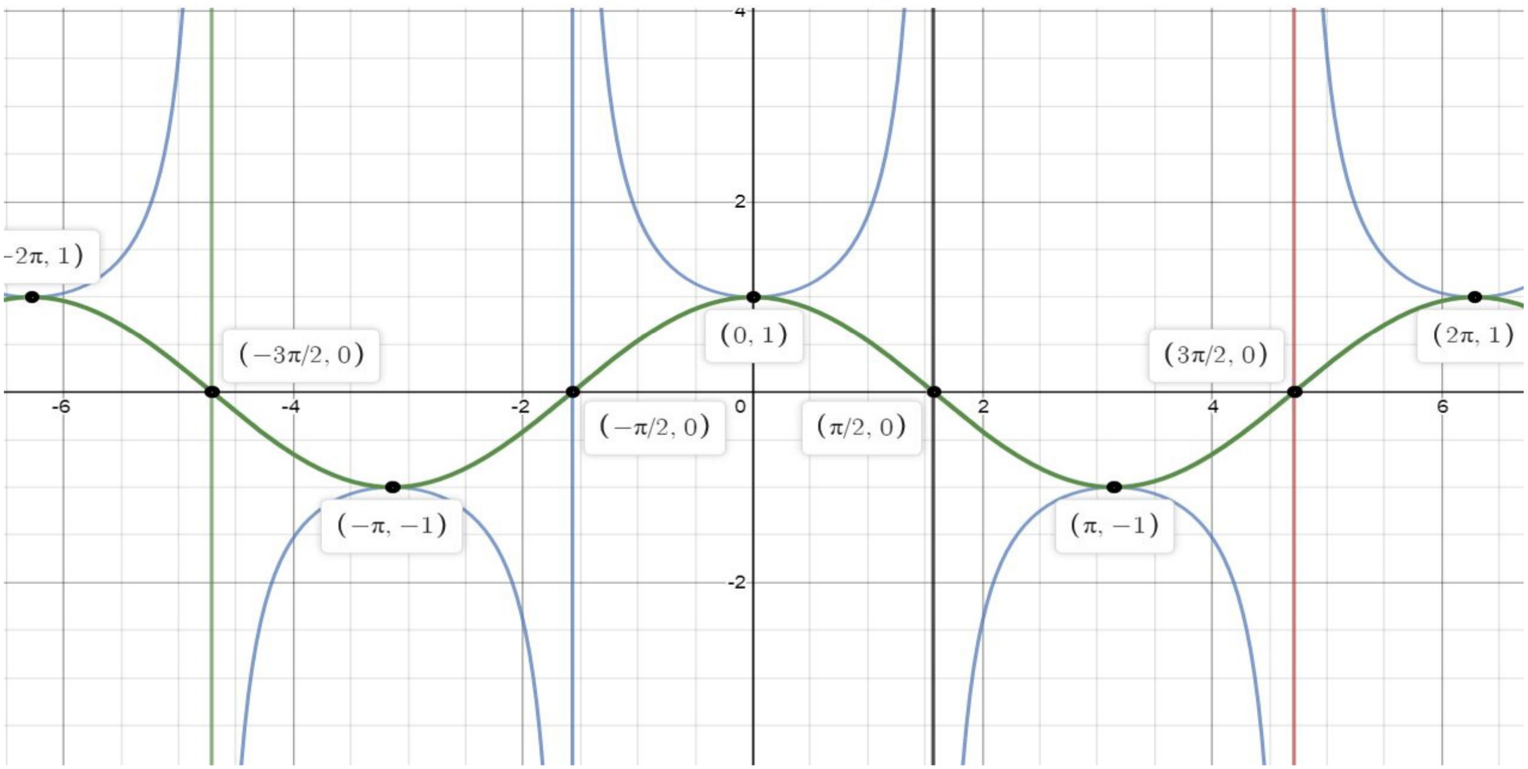
$f(x) = \sin x$

$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$



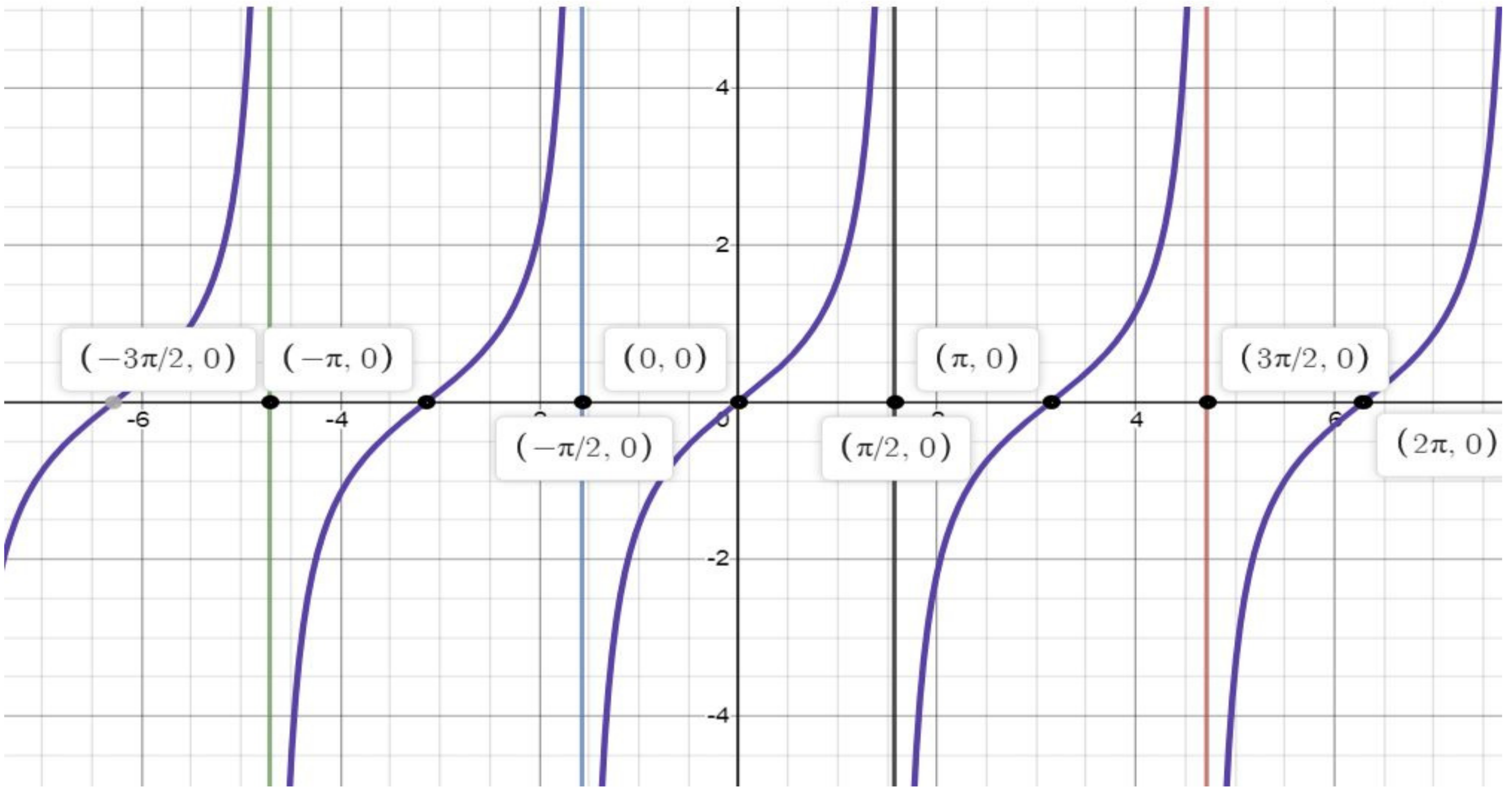
ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



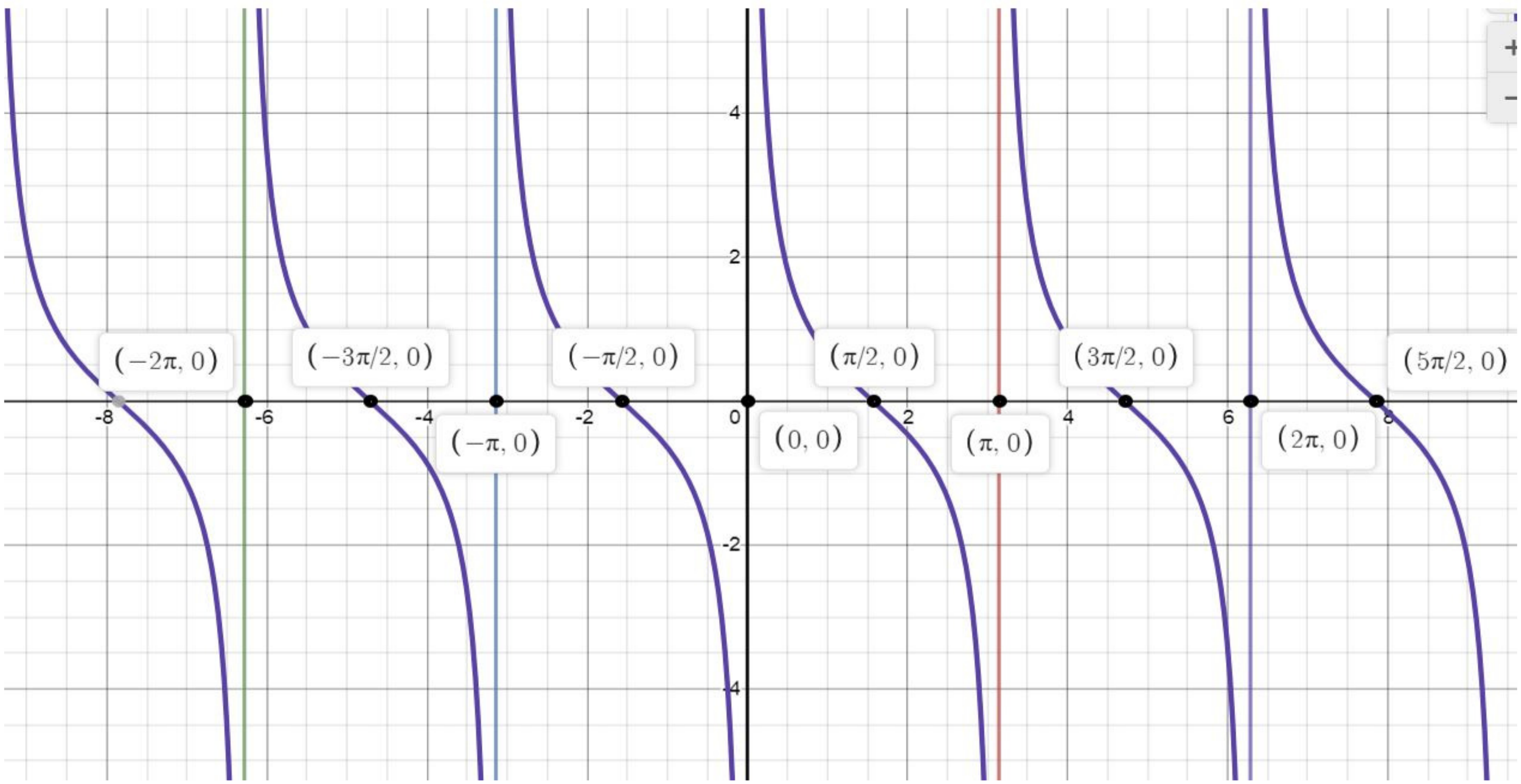
ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

$f(x) = \tan x$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

$f(x) = \cot x$



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

$f(x) = 2 + 3sinx$; ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

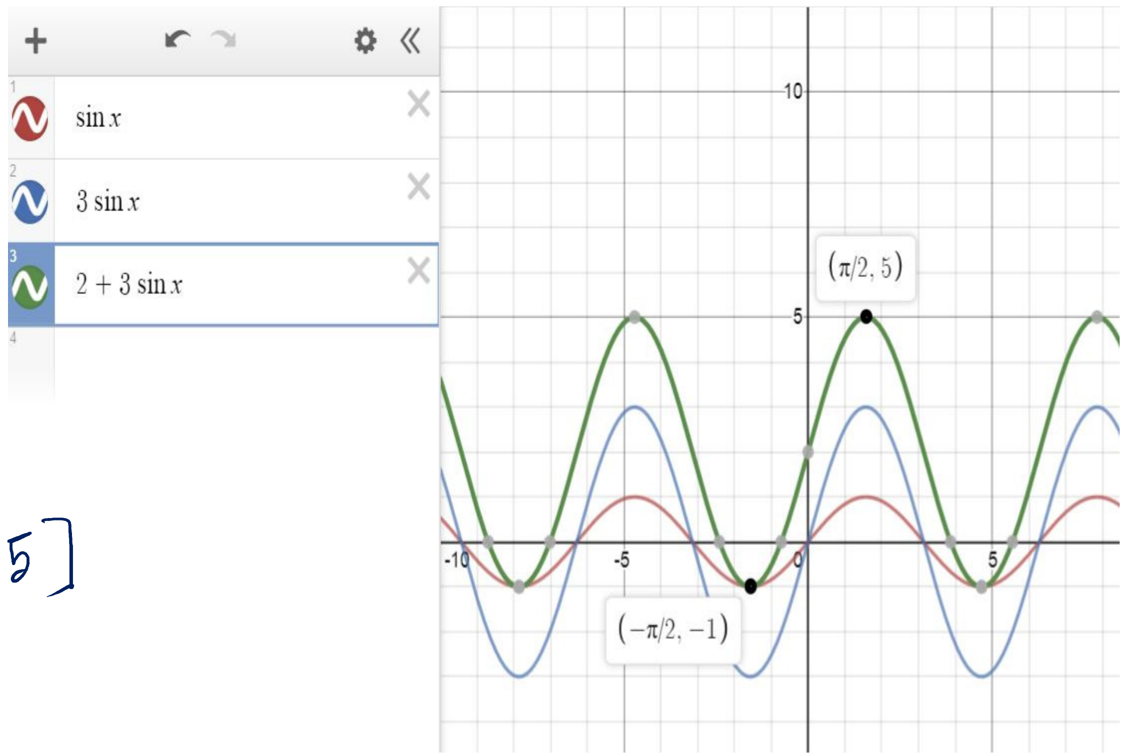
R

$D_f = \mathbb{R}$

$[-1, 1]$

$[-3, 3]$

$R_f = [-1, 5]$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

Rule

$f(x) = 3sinx + 4cosx + 2020$; ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

$D_f = \mathbb{R}$

$3\sin x + 4\cos x$

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$f(x) = \underbrace{3\sin x + 4\cos x}_{} + 2020$

$= 5\cos(x-\alpha) + 2020$

$[-1, 1]$

$[-5, 5] + 2020$

$[2015, 2025]$ Range

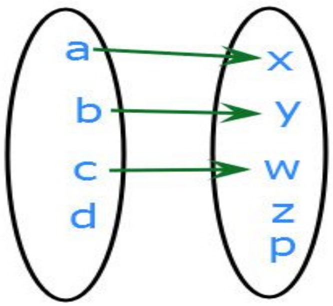
$= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$

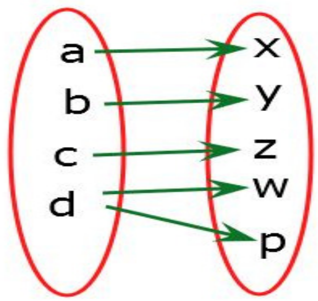
$= 5(\sin x \sin\alpha + \cos x \cos\alpha)$

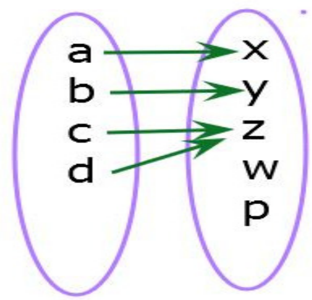
$= 5\cos(x-\alpha)$

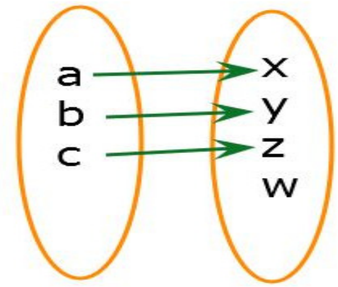
বিপরীত ফাংশন

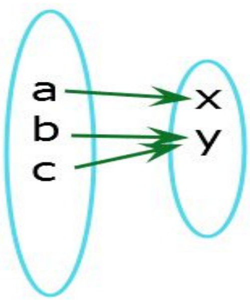
$f: A \to B$ হলে $f^{-1}: B \to A$ (শুধুমাত্র প্রতিষঙ্গ ফাংশনেরই বিপরীত ফাংশন থাকে।)

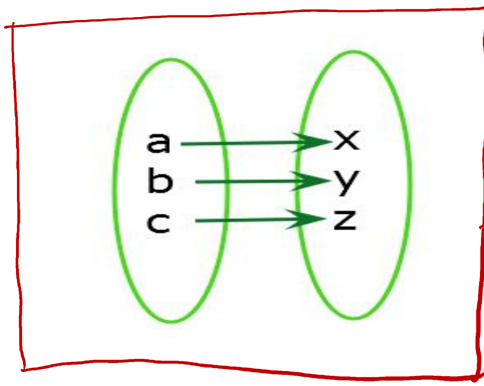












এক - এক + সার্বিক → বিপরীত ফাংশন সম্ভব

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়

Buet

*$f: R\backslash\{1/2\} \rightarrow R;\ f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$

Domain $= R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Codomain $= R$

Range $= \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Range $\neq$ Codomain

$\therefore f(x)$ সার্বিক নয়

$f^{-1}(x)$ সম্ভব নয়.

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়

Buet

$f: R\setminus\{3\} \rightarrow R\setminus\{1\};\ f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ হলে $f^{-1}(x) = ?$

Domain $= R-\{3\}$

Co-domain $= R-\{1\}$

Range $= R-\left\{\frac{1}{1}\right\}$

$= R-\{1\}$

Range = Co domain

$\therefore f(x)$ সার্বিক

$f(a) = f(b)$

$\frac{a+2}{a-3} = \frac{b+2}{b-3}$

$(a+2)(b-3) = (b+2)(a-3)$

$\cancel{ab}+2b-3a-\cancel{6} = \cancel{ab}+2a-3b-\cancel{6}$

$5a = 5b$

$\therefore a = b$

$\therefore f(x)$ এক এক

$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = y$

$\frac{x+2}{x-3} = y$

$x+2 = xy-3y$

$xy-x = 3y+2$

$x(y-1) = 3y+2$

$x = \frac{3y+2}{y-1}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}}$

Poll Question 06

$f: R \rightarrow R$ কে $f(x) = 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(x)$ এর মান কত?

(a) $\frac{x-1}{3}$

(b) $\frac{x-2}{3}$

~~(c)~~ $\frac{x-3}{2}$

(d) None

$2x+3 = y$

$x = \frac{y-3}{2}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}}$

সংযোজিত ফাংশন

$fog(x)$

$= f(g(x))$

$fof(x)$

$f(f(x))$

সংযোজিত ফাংশন

$f(x) = \sqrt{x-1}, (x \geq 1), g(x) = x^2 + 2$ হলে, $(gof^{-1})(x)$ নির্ণয় কর। [BUET'18-19]

$f(x) = \sqrt{x-1} = y$

$\sqrt{x-1} = y$

$x - 1 = y^2$

$x = y^2 + 1$

$\boxed{f^{-1}(x) = x^2 + 1}$

$(gof^{-1})(x)$

$= g(f^{-1}(x))$

$= g(x^2+1)$

$= (x^2+1)^2 + 2$

$= x^4 + 2x^2 + 1 + 2$

ফাংশনের মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

$f(x) + 3f(-x) = 2x + 3$ হলে, $f(2) = ?$ / $f(3)$ / $f(x)$ / $f^{-1}(x)$ [SUST'12-13]

$f(x) + 3\cancel{f(-x)} = 2x+3$ —— (i)

$x = -x$ বসিয়ে

$f(-x) + 3f(x) = -2x + 3$ —— (ii)

(ii) $\times 3$

$3\cancel{f(-x)} + 9f(x) = -6x + 9$ —— (iii)

(i) − (iii)

$f(x) - 9f(x) = 2x+3+6x-9$

$\Rightarrow -8f(x) = 8x - 6$

$f(x) = \dfrac{8x-6}{-8}$

আরো বিশেষ কিছু ফাংশন

MCQ

◆ যুগ্ম ফাংশনঃ

$f(x) = x^2$

$\boxed{f(x) = f(-x)}$

$f(x) = |x|$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

◆ অযুগ্ম ফাংশনঃ

$f(x) = x^3$

$\boxed{f(x) = -f(-x)}$

$f(2) = 2^3 = 8$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

◆ অভেদক ফাংশন (Identity Function): → $f(x) = x$

◆ ধ্রুবক ফাংশন (Constant function): output fixed

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

Poll Question 07

নিচের কোনটি যুগ্ম ফাংশন?

(a) $f(x) = tanx$

(b) $f(x) = cosx + 2$

(c) $f(x) = sinx + 2$

(d) None

$$\boxed{f(x) = \cos x + 2}$$

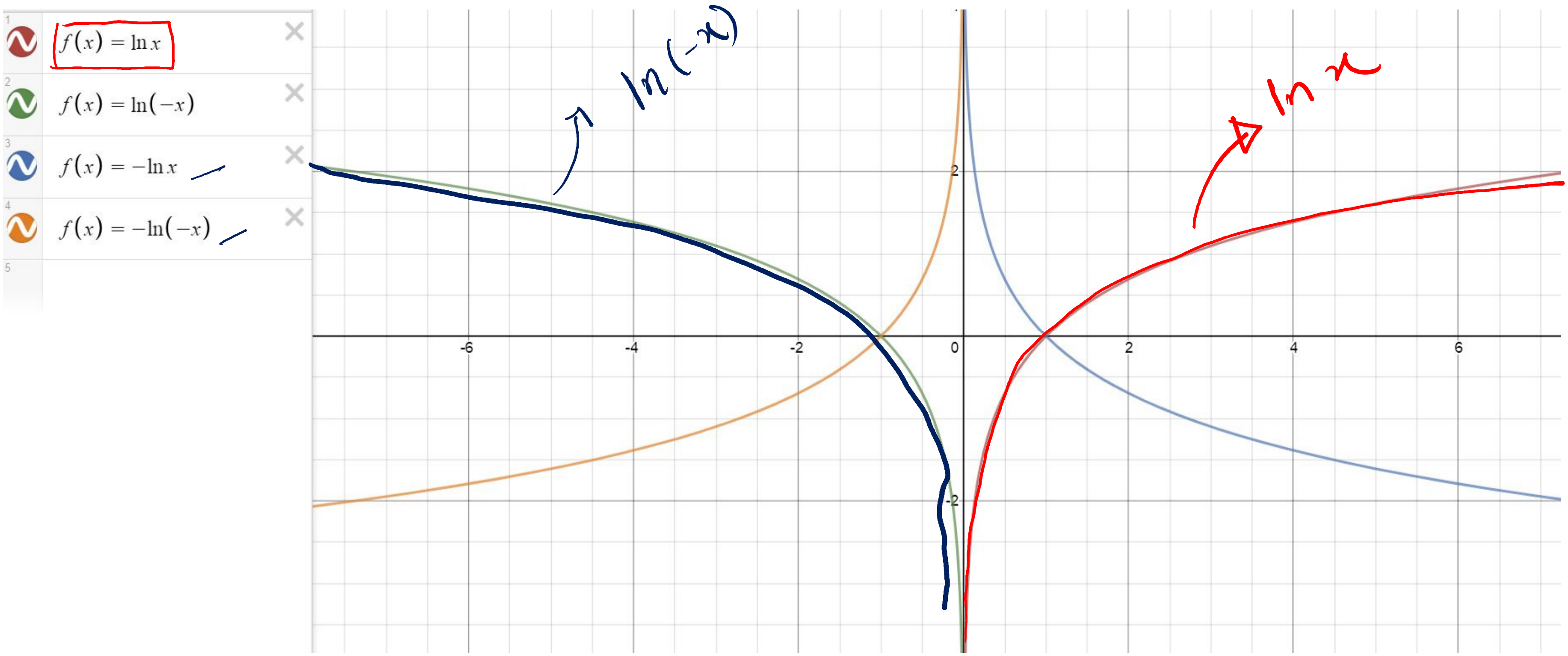
$$\boxed{\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) + 2 \\ &= \cos x + 2 \end{aligned}}$$

$x = 30^\circ$

$x = -30^\circ$

ফাংশনের লেখচিত্র

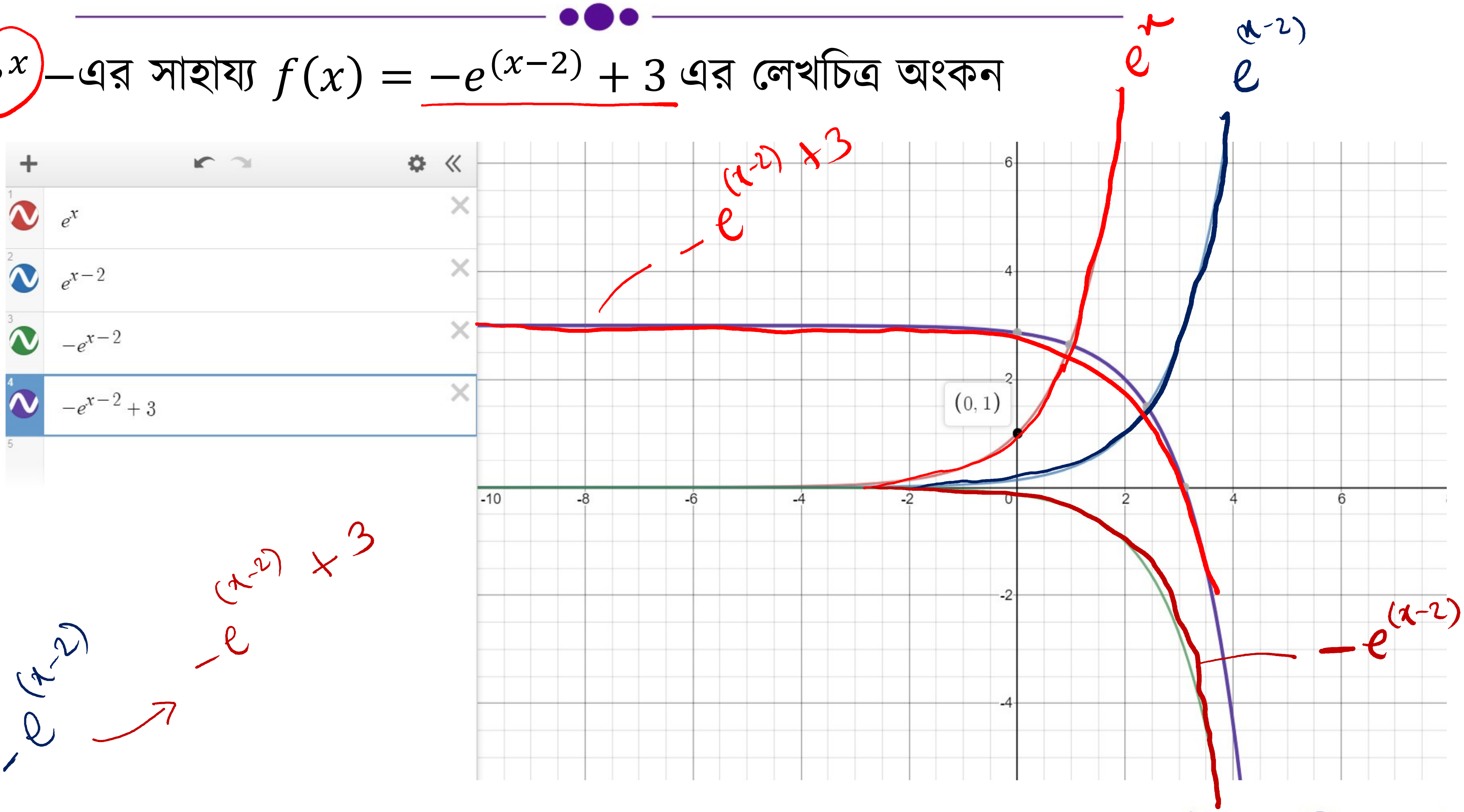
"x"-এর স্থলে "$-x$" বসালে y-অক্ষের সাপেক্ষে এবং
"y"-এর স্থলে "$-y$" বসালে x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব তৈরি হয়



$\ln(-x)$

ফাংশনের লেখচিত্র

$f(x) = e^{x}$ –এর সাহায্য $f(x) = -e^{(x-2)} + 3$ এর লেখচিত্র অংকন



e^x → $e^{(x-2)}$ → $-e^{(x-2)}$ → $-e^{(x-2)} + 3$

অধ্যায়: ০২
ভেক্টর

মান ও অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

Concept:

(i) কোনো ভেক্টর $\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে এর মান $|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}}$

মান ও অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

যদি $\vec{P} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ মধ্যবর্তী কোণ কোনটি?

[KUET'18-19]

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ}$$

$$= \frac{4.4 + (-2).(-2) + 4.(-1)}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}}$$

$$= \boxed{}$$

$$\theta = \cos^{-1}\boxed{}$$

Poll Question 08

ধনাত্মক x-অক্ষের সঙ্গে ভেক্টর $\overline{A} = -\sqrt{3}i + j$ কত কোণ উৎপন্ন করে? [RUET'18-19]

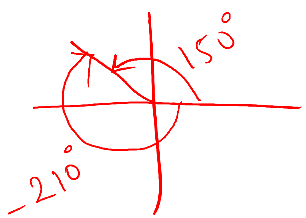
(a) 150°
(b) 210°
(c) Both a & b
(d) কোনটিই নয়

$\cos\theta = \dfrac{\hat{i} \cdot (-\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j})}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}}$

$= \dfrac{-\sqrt{3}}{1 \cdot 2}$

$= -\sqrt{3}/2$

$\theta = 150^\circ$



শেষ বিন্দু – আদি বিন্দু

একক ভেক্টর সংক্রান্ত

P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (1,1,1) এবং (3,2,-1) হলে, PQ ভেক্টরের সমান্তরালে 10একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [BUET'03-04]

$$\vec{PQ} = (3-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (-1-1)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+4}$$

$$= 3$$

একক ভেক্টর $= \dfrac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

10 একক ভেক্টর $= 10 \cdot \dfrac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

Ans

পরস্পর লম্ব ও সমান্তরাল ভেক্টর

➲ Concept:

(i) কোনো ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবার শর্ত, $\vec{A}.\vec{B} = 0$

(ii) সমান্তরাল হবার শর্ত হচ্ছে $|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$

♦ Shortcut for MCQ : $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$; $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ এবং $\vec{A}||\vec{B}$ হলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

পরস্পর লম্ব ও সমান্তরাল ভেক্টর

দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[BUTex'10-11,07-08,03-04]

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 8.4 + 1.(-2) + (-6).5$$

$$= 32 - 2 - 30$$

$$= 0$$

$$\vec{A} \perp \vec{B}$$

[Proved]

Poll Question 09

m এর মান কত হলে $4\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $8\hat{i}+6\hat{j}+\frac{m}{3}\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

(a) $\frac{10}{3}$

(b) $\frac{5}{6}$

(c) 30

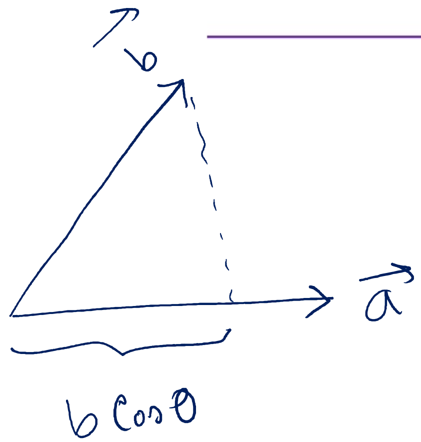
(d) None

$$\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\frac{5}{\frac{m}{3}}$$

$$\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}=\frac{15}{m}}$$

$$m=30$$

ভেক্টরের উপাংশ ও অভিক্ষেপ



$\vec{a}$ এর দিকে $\vec{b}$ এর অভিক্ষেপ $= b\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}$

$\vec{a}$ এর দিকে $\vec{b}$ এর উপাংশ $= b\cos\theta\ \hat{a}$

$= b\cos\theta \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

ভেক্টরের উপাংশ ও অভিক্ষেপ

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$ হলে $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও $\vec{a}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। [BUET'08-09, 09-10, 10-11,12-13,13-14; KUET' 05-06,09-10; DU'16–17]

$\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= b\cos\theta$

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}$$

$$= \frac{1.4 + 2.8 + 2.(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

$$= \frac{4+16-2}{3} = \frac{18}{3} = \underline{\underline{6}}$$

উপাংশ $= 6.\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$= 6.\frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

ক্ষেত্রফল

➲ Concept:

(i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর হলে,

- ➢ যদি ত্রিভুজের দুই বাহু নির্দেশ করে তবে ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$
- ➢ যদি সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করে তবে ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$
- ➢ যদি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে তবে ক্ষেত্রফল, $\Delta = |\vec{A} \times \vec{B}|$

ক্ষেত্রফল

$\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [CUET'15-16, DU'17-18]

ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}|$

$= \sqrt{6^2 + 6^2}$

$= 6\sqrt{2}$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4+2) + \hat{j}(2+4) + \hat{k}(-8+8)$

$= 6\hat{i} + 6\hat{j}$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে