প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

প্রথম অধ্যায় : ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরিফ ও ফয়সাল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: আগস্ট, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৭৫/-
(একশত পঁচাত্তর টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় **উদ্ভাসের** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

প্রথম অধ্যায়: ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

প্রশ্নমালা ১.১

প্রশ্নমালা ১.২

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-01, Bangla Version, Page-30, Question-05, দেওয়া আছে, [21] কিন্তু হবে [7]

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০১

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

তোমরা নিশ্চয়ই অনেকে নিয়মিত ফুটবল খেলা দে নিয়মিত না দেখলেও, ফুটবল বিশ্বকাপের সময় আমরা সবাই কমবেশি ফুটবল খেলা দেখি। বিশ্বকাপে গ্রুপ পর্বে চারটি দল থাকে। গ্রুপের প্রতিটি দল নিজেদের মধ্যে একটি করে, মোট 3 টি ম্যাচ খেলে। প্রতি দল খেলায় জয়লাভ করলে 3 পয়েন্ট, ম্যাচ ড্র করলে 1 পয়েন্ট এবং হেরে গেলে কোনো পয়েন্টই পায় না। সবগুলো ম্যাচ শেষে সর্বোচ্চ পয়েন্টধারী দুইটি দল পরবর্তী 'নকআউট' পর্বের জন্য উত্তীর্ণ হয়। এখন যদি তোমাদেরকে একটি গ্রুপের সব উপাত্ত দিয়ে দেওয়া হয়, তুমি নিশ্চয়ই প্রতিটি দলের মোট পয়েন্ট এবং কোন দুইটি দল নকআউট পর্বে যাবে তা বের করে ফেলতে পারবে। আসো একটি কাল্পনিক গ্রুপের কাল্পনিক উপাত্ত দেখি:

গ্রুপ 'কাল্পনিক'	মোট ম্যাচ	জয়	ড্র	পরাজয়
ব্রাজিল	3	2	1	0
আর্জেন্টিনা	3	2	1	0
পর্তুগাল	3	1	0	2
জার্মানি	3	0	0	3

এখন তোমাদের কাজ হল এই উপাত্তগুলো থেকে প্রতিটি দলের পয়েন্ট বের করা এটার জন্যে নিশ্চয়ই তোমরা প্রতিটি জয়কে 3 দিয়ে, ড্র কে 1 দিয়ে এবং পরাজয়কে 0 দিয়ে গুণ করে এরপর সবগুলো যোগ করবে। এভাবে প্রতিটা দলের মোট পয়েন্ট খুব সহজেই নির্ণয় করা যায়। কিন্তু এই পুরো কাজটি আমরা চাইলেই 'ম্যাট্রিক্স' ব্যবহার করে সমাধান করতে পারতাম। জয়, ড্র ও পরাজয়ের উপাত্তগুলো নিয়ে একটি ম্যাট্রিক্স এবং প্রতি জয়, ড্র ও পরাজয়ের জন্য পয়েন্ট নিয়ে আরেকটি ম্যাটিক্স তৈরি করতে হবে। ম্যাট্রিক্স দুইটি হবে এরকম:

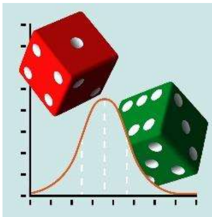
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}।$$

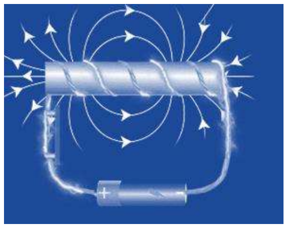
প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্স দুইটি 'ম্যাট্রিক্স গুণ' পদ্ধতিতে গুণ করলেই আমরা একসাথে সবগুলো দলের মোট পয়েন্ট নির্ণয় করতে পারি। ম্যাট্রিক্স দুইটি গুণ করলে, আমরা গুণফল পাবো এরকম:

$$\begin{array}{l} \text{ব্রাজিলের উপাত্ত} \leftarrow \\ \text{আর্জেন্টিনার উপাত্ত} \leftarrow \\ \text{পর্তুগালের উপাত্ত} \leftarrow \\ \text{জার্মানির উপাত্ত} \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad 0} \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ব্রাজিলের মোট পয়েন্ট।} \\ \rightarrow \text{আর্জেন্টিনার মোট পয়েন্ট।} \\ \rightarrow \text{পর্তুগালের মোট পয়েন্ট।} \\ \rightarrow \text{জার্মানির মোট পয়েন্ট।} \end{array}$$

ম্যাট্রিক্স গুণের নিয়ম আমাদের সাধারণ গুণের নিয়ম থেকে ভিন্ন তোমাদের মনে নিশ্চয়ই প্রশ্ন জেগেছে, ম্যাট্রিক্স গুণটি কীভাবে হলো? তার আগে তোমার মনে এটাও প্রশ্ন এসেছে, ম্যাট্রিক্স বলতেই বা আমরা কী বুঝি? তোমাদের মনে জাগ্রত এসব প্রশ্নের উত্তর এবং ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক সংক্রান্ত বিস্তারিত আলোচনা আমরা এই অধ্যায়ে করবো।

ম্যাট্রিক্স হলো গণিত শাস্ত্রের একটি বহুল ব্যবহৃত ও বহুল সমাদৃত শাখা যা পরিসংখ্যানের সম্ভাবনা তত্ত্বে, পদার্থবিদ্যার তড়িৎ-চুম্বকবিদ্যা, কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, উচ্চতর অর্থনীতির, ব্যবসা-বাণিজ্য, শেয়ার মার্কেটে, প্রকৌশল বিদ্যায় কম্পিউটার গ্রাফিক্সের ত্রিমাত্রিক ছবিকে দ্বিমাত্রিক পর্দায় উপস্থাপন, সার্চ ইঞ্জিনে পেইজ র‍্যাংক অ্যালগরিদমে ব্যবহার করা হয়।

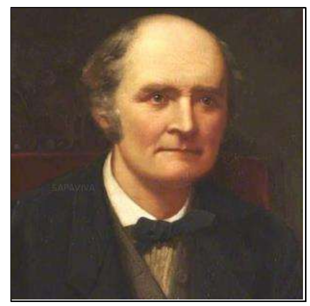

Math Probability


Electromagnetism


Share Market


Computer Graphics

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস


ব্রিটিশ গণিতবিদ
Arthur Cayley

প্রাচীন ব্যবিলন ও চীন থেকে ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। সর্বপ্রথম ম্যাট্রিক্সের ধারণা প্রকাশ করেন ''James Joseph Sylvestor''। তিনি 1850 সালে এ সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করেন। Matrix শব্দটি ল্যাটিন, শব্দটি 'Mater' (mother) থেকে নেওয়া হয়েছে। পরবর্তীতে 1853 খ্রিষ্টাব্দে Arthur Cayley ম্যাট্রিক্সের প্রয়োজনীয়তা তুলে ধরেন। পরবর্তীতে Cayley তার পত্রিকা ''A Memoir on the Theory of Matrices'' এ প্রথম বিশ্লেষণমূলক ভাবে ম্যাট্রিক্স প্রকাশ করেন এজন্য ''Arthur Cayley'' কে ম্যাট্রিক্সের জনক বলা হয়।

অন্যদিকে, জাপানি গণিতবিদ Seki সর্বপ্রথম 1683 খ্রিষ্টাব্দে নির্ণায়কের ধারণা প্রকাশ করেন। তিনি মূলত: $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, 5 \times 5$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক নিরূপণ করেন। একই বছর জার্মান গণিতবিদ লিবনীজ নির্ণায়কের প্রয়োজনীয়তা তুলে ধরেন। পরে 1750 খ্রিষ্টাব্দে সুইস গণিতবিদ ''Gabriel Cremer'' নির্ণায়কের মাধ্যমে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোট সমাধান করেন। আর 1801 খ্রিষ্টাব্দে Gauss ''Determinant'' শব্দটি প্রয়োগ করেন। 1822 খ্রিষ্টাব্দে Augustin Louis Cauchy এর হাত ধরে নির্ণায়ক আধুনিকভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

ম্যাট্রিক্স (Matrix)

মনে কর, আজকে মিশুকের কলেজে টেস্ট (নির্বাচনী) পরীক্ষার ফলাফল দিয়েছে। ক্লাস টিচার বোর্ডে এসে প্রথমে পাঁচ জনের নাম এবং গণিত, পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন, তথ্য যোগাযোগ প্রযুক্তিতে প্রাপ্ত নম্বর ছক করে লিখলেন।

নাম	গণিত	পদার্থ	রসায়ন	আইসিটি
মিশুক	100	95	98	99
জামিল	99	95	97	98
সৌরভ	95	97	99	96
বর্ণিল	97	99	96	94
ফাহিম	96	94	97	98

মিশুক তৎক্ষণাৎ ক্লাসে হাত তুলে বোর্ডে এসে শিক্ষককে বললো, 'স্যার যদি ছকটিকে $\begin{bmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{bmatrix}_{5\times 4}$ এভাবে উপস্থাপন করা হয় তাহলে, বোর্ডে জায়গা কম লাগে ও খুবই কম সময়ে অধিক তথ্য সহজেই উপস্থাপন করা যায়।'

মিশুক বোর্ডে তথ্যগুলোকে যেভাবে লিখেছে, এভাবে তথ্য সাজিয়ে লেখার প্রক্রিয়াকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এ কথা বলার সাথে সাথেই অনেকেরই হয়তোবা 'The Matrix Resurrections' সিনেমার পোস্টার চোখের সামনে ফুটে উঠেছে। এখানে কিন্তু, মোটেই কোন সিনেমার কথা বলা হচ্ছে না।

ম্যাট্রিক্স: কতগুলো ভুক্তিকে সারি ও কলামে বিন্যস্ত করে তৃতীয় বন্ধনী অথবা প্রথম বন্ধনী অথবা চারটি উলম্ব রেখা দ্বারা আবদ্ধ করে যে সুবিন্যস্ত আকার পাওয়া যায়, যার কোন মান নেই, তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{Vmatrix}$.

ভুক্তি: ম্যাট্রিক্সের অন্তর্গত প্রতিটি তথ্য বা সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (Entry) বলা হয়।

যেমন: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সে $2, 3, 4, 5$ প্রতিটিই হলো উক্ত ম্যাট্রিক্সের একেকটি ভুক্তি।

স্কুলে বা কলেজে ক্লাস শুরু হওয়ার আগে সমাবেশ (Assembly) অনুষ্ঠিত হয়। এই সমাবেশে অংশগ্রহণ করার সময়, ছাত্র-ছাত্রীরা একটি নির্দিষ্ট নিয়ম মেনে মাঠে দাঁড়ায়। বিন্যাসটি একটু লক্ষ করলে দেখা যাবে, প্রতিটি ক্লাসের জন্য আলাদা আলাদা লাইন থাকে। এই লাইনগুলো হলো এক একটা কলাম এবং বাম থেকে ডান দিক বরাবর লাইন গুলো হলো একেকটি সারি।


School Assembly


Students in Classroom

একইভাবে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশের ক্ষেত্রেও সারি-কলাম এর বিষয়টি অনেক গুরুত্বপূর্ণ।

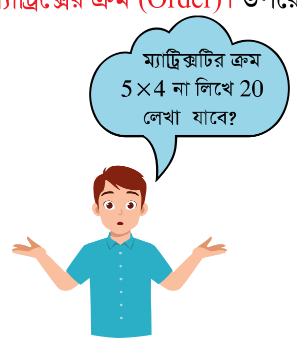
আনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি সারি বলে।

$$\begin{bmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{bmatrix}_{5\times 4}$$

এখানে, 100, 95, 98, 99......... 97, 98 প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের উপাদানকে 'ভুক্তি' বলে।

উলম্ব বরাবর অবস্থিত ভুক্তিসমূহকে একত্রে একটি কলাম বলে।

এই ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা 5 ও কলাম সংখ্যা 4। সারি সংখ্যা এবং কলাম সংখ্যা ম্যাট্রিক্সের গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। তাই ব্র্যাকেটের পাশে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলামকে গুণ আকারে সাবস্ক্রিপ্ট (Subscript) এর মাধ্যমে নিচে লেখা হয়। একে বলা হয় ঐ ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order)। উপরের ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হলো 5×4।



কোনো ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order) প্রকাশ করা হয় ঐ ম্যাট্রিক্সের 'সারি সংখ্যা × কলাম সংখ্যা' আকারে। যেমন: পূর্বের উদাহরণে ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order) হল : 5×4 [পড়তে হয় '5 বাই 4'] এখানে, '5×4' লেখাটি আলাদা তাৎপর্য ধারণ করে। প্রথম সংখ্যাটি হল সারি সংখ্যা (Number of Rows) এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি হল কলাম সংখ্যা (Number of Columns)। কিন্তু গুণফল (20) দিয়ে ম্যাট্রিক্সের আকার সম্পর্কে কোনো ধারণা পাওয়া যায় না। আকার সম্পর্কে ধারণা না পাওয়া গেলেও, সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যার গুণফল ঐ ম্যাট্রিক্সের মোট উপাদান (ভুক্তি) সংখ্যা নির্দেশ করে।

ম্যাট্রিক্সের প্রকাশ এবং ম্যাট্রিক্সের আকার বা ক্রম সম্পর্কে আমরা জেনেছি। এখন আমরা জানবো ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি প্রকাশের উপা

মনে করো, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$

এখানে, a এর নিচে সাবস্ক্রিপ্ট (Subscript) আকারে থাকা সংখ্যাগুলোই হলে ঐ ভুক্তির অবস্থ a এর নিচে সংখ্যা দুইটির প্রথমটি ভুক্তিটি কোন সারিতে অবস্থান করে এবং দ্বিতীয়টি ভুক্তিটি কোন কলামে অবস্থান করে তা প্রকাশ করে। অর্থাৎ a_{12} দ্বারা বুঝায় প্রথম সারি এবং দ্বিতীয় কলামে অবস্থানরত ভুক্তি। প্রদত্ত উদাহরণে, $a_{12} \equiv 2$।

a_{ij}
যত নং কলামে অবস্থান
যত নং সারিতে অবস্থান

একইভাবে, a_{23} দ্বারা বুঝায় দ্বিতীয় সারি এবং তৃতীয় কলামে অবস্থানরত ভু এক্ষেত্রে, $a_{23} \equiv 6$।

জেনে রাখো

a_{ij} হলো যেকোনো ভুক্তির ঠিকানা (Address)। যেখানে, i দ্বারা ভুক্তিটি কত নম্বর সারিতে এবং j দ্বারা ভুক্তিটি কত নম্বর কলামে আছে তা বোঝায়। কোনো ম্যাট্রিক্স 'm × n' আকারের হলে বা ম্যাট্রিক্সটিতে m টি সারি ও n টি কলাম থাকলে: $1 \le i \le m$ এবং $1 \le j \le n$ এবং $i, j, m, n \in \mathbb{N}$।

এতক্ষণ আমরা যা শিখলাম মিশুকের উপস্থাপন করা ম্যাট্রিক্সটির মাধ্যমে পুরোটা যাচাই করে নিই।

মিশুকের ম্যাট্রিক্সটি হলো: $\begin{bmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{bmatrix}$

এই ম্যাট্রিক্সকে গণিতের ভাষায় নিম্নোক্ত উপায়গুলোতে প্রকাশ করা যায়-

(i) $\begin{bmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{bmatrix}_{5\times4}$ (ii) $\begin{pmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{pmatrix}_{5\times4}$ (iii) $\begin{Vmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{Vmatrix}_{5\times4}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}_{5\times4} \equiv \begin{bmatrix} 100 & 95 & 98 & 99 \\ 99 & 95 & 97 & 98 \\ 95 & 97 & 99 & 96 \\ 97 & 99 & 96 & 94 \\ 96 & 94 & 97 & 98 \end{bmatrix}_{5\times4}$$

ম্যাট্রিক্সটিকে সংক্ষেপে, $A_{5\times4} = [a_{ij}]_{5\times4}$ আকারেও প্রকাশ করা যায় [যেখানে $1 \le i \le 5; 1 \le j \le 4$] যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সের উপাদান প্রকাশ করে এবং 5 ম্যাট্রিক্সটির সারির সংখ্যা ও 4 কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে।

তাহলে, যেকোনো ম্যাট্রিক্সকে সাধারণভাবে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A = [a_{ij}]_{m\times n}$

যেখানে, $1 \le i \le m$ এবং $1 \le j \le n$ এবং $i, j, m, n \in \mathbb{N}$

[i যেহেতু ম্যাট্রিক্সের কোন ভুক্তি কত নম্বর সারিতে আছে তা নির্ধারণ করে, তাই i এর মান ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার (m) বেশি হবে না। ঠিক একই ভাবে, j এর মান ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যার (n) বেশি হবে না কিন্তু সমান বা ছোট হবে।]

সতর্কতা!

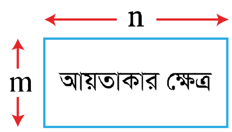
ভুক্তিগুলোকে ব্র্যাকেট ছাড়া লেখা হলে, এই প্রকার বিন্যাসকে ম্যাট্রিক্স বলা হবে না

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Types Of Matrix)

(a) আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা অসমান তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলে অর্থাৎ, ম্যাট্রিক্সের ক্রম $m \times n$ হলে, আয়তাকার ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত: $m \neq n$।

উদাহরণ: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$



$m \neq n$

এই ম্যাট্রিক্সকে আয়তক্ষেত্রের সাথে তুলনা করা যায়। বর্গ ব্যতীত একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যেমন সমান থাকে না তেমনি, আয়তাকার ম্যাট্রিক্সেরও সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হয় না।

তোমরা হয়তোবা অনেকই কোনটা উলম্ব এবং কোনটা আনুভূমিক তা বুঝো না চলো একটা উদাহরণের মাধ্যমে আমরা উলম্ব ও আনুভূমিক বিষয়টি বুঝে নিই। তোমরা সবাই পদ্মা সেতু দেখেছো। পদ্মা সেতুতে প্রধান কাঠামো পিলার ও স্প্যান পিলারগুলো নদীর ওপর উলম্বভাবে রাখা এবং স্প্যানগুলো, পিলারের ওপর অনুভূমিকভাবে থাকে তোমাদের তাহলে উলম্ব ও আনুভূমিক অবস্থান সম্পর্কে ভালো ধারণা হয়েছে। এখন চলো, উলম্ব, আনুভূমিক ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জেনে আসি।

পদ্মা সেতু

(i) উলম্ব ম্যাট্রিক্স: আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা অপেক্ষা সারির সংখ্যা অধিক হলে, সেই ম্যাট্রিক্সকে **উলম্ব ম্যাট্রিক্স** বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; $[a_{ij}]_{m\times n}$ যখন $m > n$

(ii) আনুভূমিক ম্যাট্রিক্স: আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা অপেক্ষা কলাম সংখ্যা অধিক হলে, সেই ম্যাট্রিক্সকে **আনুভূমিক ম্যাট্রিক্স** বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; $[a_{ij}]_{m\times n}$ যখন $m < n$

(b) সারি ম্যাট্রিক্স (Row Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সে একটিমাত্র সারি বিদ্যমান, তাকে সারি ম্যাট্রিক্স বলে। সারি ম্যাট্রিক্সে সারি সংখ্যা, $m = 1$ হবে এবং কলাম সংখ্যা n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা ($n \in \mathbb{N}$) হতে পারে। **যেমন:** $[2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]_{1\times 4}$; $[a_{ij}]_{1\times n}$ যখন $n \in \mathbb{N}$

(c) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সে কেবল একটি কলাম বিদ্যমান, তাকে কলাম ম্যাটিক্স বলে। কলাম ম্যাট্রিক্সে কলাম সংখ্যা, $n = 1$ হবে, কিন্তু সারি সংখ্যা, m যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা ($m \in \mathbb{N}$) হতে পারে। **যেমন:** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$; $[a_{ij}]_{m\times 1}$ যখন $m \in \mathbb{N}$

(d) বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান, তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। অর্থাৎ, $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সে, $m = n$ হলেই, ম্যাট্রিক্সটি একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে। অর্থাৎ, বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে: $n \times n$ আকারের। যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

একটি বর্গের যেমন দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান হয়, তেমনি বর্গ ম্যাট্রিক্সে সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান হয়

এখন এসো, আমরা বর্গ ম্যাট্রিক্সের খুবই গুরুত্বপূর্ণ দুইটি টার্ম মুখ্যকর্ণ এবং ট্রেস নিয়ে আলোচনা করি।

➲ মুখ্যক (Principal/Leading Diagonal):

বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে দুইরকম কর্ণ দেখা যায় মুখ্যক (Principal/Leading Diagonal) ও গৌণ কর্ণ (Secondary Diagonal)।
একটি $n \times n$ আকারের বর্গ ম্যাট্রিক্সের শীর্ষের প্রথম কলাম ও প্রথম সারিতে থাকা ভুক্তি (a_{11}) থেকে সর্বশেষ কলাম ও সারিতে থাকা ভুক্তি (a_{nn}) পর্যন্ত একটি কর্ণ ধরলে, একে মুখ্যকর্ণ বলে

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \equiv \text{মুখ্য কর্ণ} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{গৌণ কর্ণ} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

উপরের ম্যাট্রিক্সে, মুখ্যকর্ণের উপাদানগুলো হলো: $a_{11} = 1; a_{22} = 5; a_{33} = 9$
খেয়াল কর, মুখ্য কর্ণের প্রতিটি ভুক্তির সারি সংখ্যা ও কলাম সংখ্যা সমান। (সবগুলো ভুক্তি $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots\dots$ আকারের)।
অর্থাৎ, মুখ্য কর্ণের a_{ij} ভুক্তিতে $i = j$ হবে। গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $(m = n)$ হলে, a_{ij}, (যেখানে, $i = j$) ভুক্তিগুলিকে মুখ্য কর্ণের উপাদান বলা হবে।
গৌণ কর্ণ হল প্রথম সারির সর্বশেষ কলামের ভুক্তি থেকে শুরু করে শেষ সারির প্রথম কলামের ভুক্তি পর্যন্ত কর্ণ ধরলে, তা হল গৌণ কর্ণ। উপরিউক্ত উদাহরণে A ম্যাট্রিক্সের গৌণ কর্ণ হল: $a_{13} = 3,\ a_{22} = 5, a_{31} = 7$

চলো একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স দেখি: $\text{মুখ্য কর্ণ অসম্পূর্ণ} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

এই ম্যাট্রিক্সে ১ম সারি ও ১ম কলামের ভুক্তি থেকে কর্ণ কল্পনা করলে, সর্বশেষ ভুক্তি পর্যন্ত সেই রেখা পৌঁছায় না ফলে তা অসম্পূর্ণ রয়ে যায়। অনেকে আবার ভাবতে পারো, 5 কে Skip করে, সরাসরি 1 থেকে 6 পর্যন্ত কর্ণ কল্পনা করবো, তাহলেই তো সমস্যার সমাধান হয়।
কিন্তু, ব্যাপারটা সেরকম নয়। আমরা জানি, মুখ্যকর্ণে অন্তর্ভুক্ত ভুক্তি হওয়ার শর্ত হলো $i = j$ হতে হয়। এখন আলোচিত 2×3 ক্রমের আয়তাকার ম্যাট্রিক্সে সর্বোচ্চ a_{23} ক্রমের ভুক্তি বিদ্যমান। a_{33} ক্রমের কোন ভুক্তি 2×3 ক্রমের কোন আয়তাকার ম্যাট্রিক্সে থাকতে পারে না তাই কর্ণ কল্পনা করলে আয়তাকার ম্যাট্রিক্সে তা অসম্পূর্ণ রয়ে যায়। এজন্যে আয়তাকার ম্যাট্রিক্সে মুখ্যকর্ণ থাকে না।

কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের উভয় পার্শ্বে সমপরিমাণ ভুক্তি থাকে একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স নেয়া হলে, মুখ্যকর্ণের প্রতি পাশে 3 টি করে ভুক্তি থাকবে।

⚠ সতর্কতা!
প্রকৃতপক্ষে, আয়তাকার ম্যাট্রিক্সেরও কর্ণ থাকে। তবে আমাদের প্রচলিত পাঠ্য বই অনুসারে আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের কর্ণকে বিবেচনা করা হয় না। পরীক্ষায় তোমরা প্রচলিত পাঠ্যবই-ই অনুসরণ করবে।

➲ ট্রেস (Trace):

কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের ভুক্তিসমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টিকে ট্রেস বলে।

যেমন: একটি 3×3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, $a_{11} = 2, a_{22} = 0$ এবং $a_{33} = -1$. তাহলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস, $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2 + 0 + (-1) = 1$
কোন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ হলে, A ম্যাট্রিক্সের ট্রেসকে Tr(A) বা tr(A) রূপে লেখা হয়। গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$\therefore \text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots\dots\dots + a_{ii} + \dots\dots\dots + a_{nn}$ [যেখানে, $1 \le i \le n$ এবং $i, n \in \mathbb{N}$]

(e) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সে মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য/অশূন্য এবং অন্যান্য সকল ভুক্তি শূন্য, সেই ম্যাট্রিক্সকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

যদি, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ হয়, তাহলে, $a_{ij} = 0$ হবে, যখন $i \neq j$

উপরের সকল উদাহরণেই স্পষ্টত, $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$।

অর্থাৎ, কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ ব্যতীত সকল ভুক্তি 0 এবং মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ 0 হতেও পারে, নাও পারে

জেনে রাখো

$n \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্সে মোট ভুক্তি n^2 টি। কর্ণ বরাবর ভুক্তি n টি। অর্থাৎ, কর্ণ ম্যাট্রিক্সে সর্বনিম্ন '$n^2 - n$' টি 0 থাকবে।

সতর্কতা!

মুখ্য কর্ণ যেহেতু বর্গ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য, তাই কর্ণ ম্যাট্রিক্স হতে হলে অবশ্যই ম্যাট্রিক্সটিকে বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

(f) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):

যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ পরস্পর সমান থাকে, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

যদি, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে, $a_{ij} = \begin{cases} 0; i \neq j \\ p; i = j \end{cases}$ এখানে, p যেকোনো সংখ্যা।

উপর্যুক্ত উদাহরণ থেকে, আমরা সহজে বুঝতে পারি,

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2$ এবং $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ তাই, A ম্যাট্রিক্সকে আমরা স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলবো

লক্ষ করো, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ইত্যাদিও স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

জেনে রাখো

কোনো $n \times n$ আকারের স্কেলার ম্যাট্রিক্সের কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলো p হলে, ঐ ম্যাট্রিক্সের Trace এর মান $= n \times p$.

সতর্কতা!

কোনো ম্যাট্রিক্স স্কেলার হতে হলে তাকে একইসাথে বর্গ ও কর্ণ ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

(g) অভেদক ম্যাট্রিক্স (Unit or Identity Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ 1 এবং অবশিষ্ট সকল ভুক্তি শূন্য, তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে। $n \times n$ ক্রম বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $I_1 = [1]_{1\times1}$ ইত্যাদি

উদাহরণগুলো থেকে আমরা বুঝতে পারি, যদি, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে, $a_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$

I_3 এর জন্য $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ এবং $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$

জেনে রাখো

$n \times n$ আকারের অভেদক ম্যাট্রিক্সের Trace এর মান হয় n বা, $\therefore Tr(I_n) = n$

সতর্কতা!

কোনো ম্যাট্রিক্স অভেদক হতে হলে তাকে একইসাথে বর্গ, কর্ণ এবং স্কেলার ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

(h) ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Triangular Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান মুখ্য কর্ণের নিচের অথবা উপরের ভুক্তিগুলি শূন্য তাকে ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স আবার দুই ধরণের- (i) উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (ii) নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স

(i) উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Upper Triangular Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের নিচের সকল ভুক্তি শূন্য, তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্সে মুখ্য কর্ণ এবং এর উপরের ভুক্তিগুলো ত্রিভুজ গঠন করে

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ উর্ধ্বে ত্রিভুজ গঠন হলো

উদাহরণে A হলো একটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$।

লক্ষ করো, এখানে প্রতিটি শূন্য ভুক্তির সারির নম্বর, কলামের নম্বর অপেক্ষা বড় বা a_{ij} এর জন্য $i > j$. গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে আমরা বলতে পারি, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = 0$ হবে যদি $i > j$ হয়

(ii) নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স (Lower Triangular Matrix):

যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণের উপরের সকল ভুক্তি শূন্য তাকে নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স বলে। নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্সে মুখ্য কর্ণ এবং এর নিম্নের ভুক্তিগুলো দিয়ে ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ নিম্নে ত্রিভুজ গঠন হলো

উদাহরণের ম্যাট্রিক্সটি একটি নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$। লক্ষ করো, এখানে প্রতিটি শূন্য ভুক্তির সারির নম্বর কলামের নম্বর অপেক্ষা ছোট বা a_{ij} এ জন্য $i < j$. গাণিতিকভাবে প্রকাশ করলে, আমরা বলতে পারি, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ একটি নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স হলে, $a_{ij} = 0$ যেখানে, $i < j$।

(i) শূন্য/বিদেশী ম্যাট্রিক্স (Null Matrix or Zero Matrix):

যে ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তি শূন্য, তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। একে $O_{3,3}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় কারণ এটি একটি 3×3 ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স। তাহলে, $O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $O_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ হলো যথাক্রমে 2×3 এবং 3×2 ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ, $m \times n$ ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্সকে $O_{m,n}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়

(j) ট্রান্সপোজ/রূপান্তরিত/ বিম্ব ম্যাট্রিক্স (Transpose Matrix):

একটি ম্যাট্রিক্স A এর কলামগুলোকে সারিতে এবং সারিগুলোকে কলামে রূপান্তরিত করে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে প্রদত্ত A ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে **A' বা A^T বা A^t দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**

যেমন: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}$ হলে, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}a'_{11} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{22}\\ a'_{31} & a'_{32}\end{bmatrix}_{3\times2}$

খেয়াল কর, ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ করা হলে, ভুক্তিগুলো নিম্নরূপে স্থান পরিবর্তন করে: $a_{11}\rightleftharpoons a'_{11}, a_{12}\rightleftharpoons a'_{21}$, $a_{13}\rightleftharpoons a'_{31}, a_{21}\rightleftharpoons a'_{12}, a_{22}\rightleftharpoons a'_{22}, a_{23}\rightleftharpoons a'_{32}$

আবার, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}$ হলে, $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{22}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}$

উপরের A ম্যাট্রিক্সকে ট্রান্সপোজ করা হলে, a_{11}, a_{22} এবং a_{33} ভুক্তিগুলো স্থান পরিবর্তন করে না। ট্রান্সপোজ করা হলে, a_{12} অবস্থানের ভুক্তি a_{21} অবস্থানের ভুক্তির সাথে স্থান পরিবর্তন কে একইভাবে, a_{13} ও a_{23} অবস্থানের ভুক্তি যথাক্রমে a_{31} ও a_{32} অবস্থানের ভুক্তির সাথে স্থান পরিবর্তন করে। অর্থাৎ, $a_{11}\rightleftharpoons a'_{11}, a_{12}\rightleftharpoons a'_{21}, a_{13}\rightleftharpoons a'_{31}, a_{21}\rightleftharpoons a'_{12}, a_{22}\rightleftharpoons a'_{22}$, $a_{23}\rightleftharpoons a'_{32}, a_{31}\rightleftharpoons a'_{13}, a_{32}\rightleftharpoons a'_{23}, a_{33}\rightleftharpoons a'_{33}$ এভাবে পরিবর্তনগুলো হয়

আমরা দেখতে পাই, ভুক্তিসমূহের Address এর সারির নম্বর ও কলামের নম্বর নিজেদের মধ্যে স্থান বিনিময় করে।

$\therefore a_{ij}\rightleftharpoons a_{ji}$। যেসকল ভুক্তিতে $i=j$ হয়, ঐ সকল ভুক্তি তাদের অবস্থানের পরিবর্তন করে না।

আমরা জানি, বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণে $i=j$ হয়। ট্রান্সপোজ করা হলে, বর্গ ম্যাট্রিক্সে সারি ও কলাম নিজের মধ্যে অবস্থানের বিনিময় করলেও, মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ একই থাকে। ফলে, কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস এবং ঐ ম্যাট্রিক্সের বিম্ব ম্যাট্রিক্সের ট্রেস সমান হয়

$\therefore \text{Tr}(A)=\text{Tr}(A^T)$

যেমন: $C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & 9\\ 0 & 2 & 8\end{bmatrix}$ মুখ্যকর্ণ হলে, $C^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\\ 5 & 9 & 8\end{bmatrix}$ মুখ্যকর্ণ অপরিবর্তিত

$\text{Tr}(C)=2+4+8=14=\text{Tr}(C^T)$

ট্রান্সপোজ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের ক্রম পরিবর্তন হতে পারে যদি, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ হয়, তাহলে $A^T=[a'_{ij}]_{n\times m}$ হবে।

যেহেতু, সারিগুলো কলামে এবং কলামগুলো সারিতে রূপান্তরিত হয়, তাই ম্যাট্রিক্সের ক্রম উল্টে যায় যেমন: প্রথম উদাহরণে A ম্যাট্রিক্সের ক্রম ছিলো 2×3 এবং A^T এর ক্রম ছিলো 3×2 যা পরস্পরের বিপরীত/উল্টা।

জেনে রাখো

বর্গ ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলাম সংখ্যা সমান হয়। তাই, ট্রান্সপোজ করা হলেও বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্রমের পরিবর্তন হয় না

(k) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix):

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এবং এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T পরস্পর সমান হলে, তাকে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 2 & 4\\ -5 & 4 & 3\end{bmatrix}\therefore A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -5\\ 0 & 2 & 4\\ -5 & 4 & 3\end{bmatrix}\because A=A^T$; তাই, A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

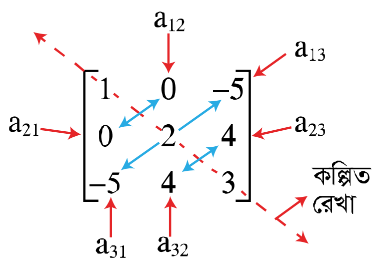
➲ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স যাচাই করার নিয়ম:

Step-01: মুখ্য কর্ণের ভুক্তি যা ইচ্ছা তাই হবে। $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: যেহেতু, বর্গ ম্যাট্রিক্সকে ট্রান্সপোজ করা হলে মুখ্যকর্ণ অপরিবর্তিত থাকে।

Step-02: মুখ্য কর্ণ বরাবর একটি সরলরেখা কল্পনা করলে, তার লম্ব বরাবর ভুক্তিসমূহ সমান ও সমচিহ্নবিশিষ্ট হবে।

ব্যাখ্যা:



গাণিতিকভাবে উপস্থাপন করলে, মুখ্যকর্ণে ভুক্তি যেকোনো সংখ্যা হবে এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও সমচিহ্ন বিশিষ্ট হবে। অর্থাৎ, প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত: $a_{ij} = a_{ji}$ হতে হবে। অর্থাৎ, 3×3 ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}$ $a_{23} = a_{32}$ হবে।

এখন তোমরা নিজেরাই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স তৈরি করতে পারবে এবং কোনো ম্যাট্রিক্স প্রতিসম কিনা যাচাই করতে পারবে

(I) বিপ্রতিসম/ বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew-Symmetric Matrix):

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^T হলে, যদি $A^T = -A$ হয়, তাহলে সেই A ম্যাট্রিক্সকে বিপ্রতিসম/বক্রপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\because A^T = -A$, তাই A একটি বিপ্রতিসম বা বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

➲ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স যাচাই করা নিয়ম:

Step-01: মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ 'শূন্য' হবে। $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: মনে করি কোন ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে $A^T = -A$ হবে।

$\therefore A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$ এবং $-A = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}$

$\because A^T = -A$, এখন মুখ্য কর্ণ বরাবর ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের তুলনা করে পাই:

$\therefore\ a = -a \Rightarrow 2a = 0 \therefore a = 0$

$e = -e \Rightarrow 2e = 0 \therefore e = 0$

$i = -i \Rightarrow 2i = 0 \therefore i = 0$

অর্থাৎ, $a = e = i = 0$ বা মুখ্যকণ বরাবর ভুক্তিগুলো শূন্য হয়। যেমন, কোনো ম্যাট্রিক্স,

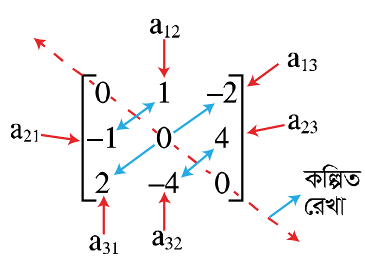
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ এর জন্য

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

A^T ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলো অপরিবর্তিত কিন্তু '$-A$' ম্যাট্রিক্সের মুখ্যকর্ণের সবগুলো ভুক্তির সাথে মাইনাস $(-)$ গুণ হয়ে চিহ্ন পরিবর্তন হয়েছে। A কে যদি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হতে হয় তখন $A^T = -A$ অর্থাৎ, মুখ্য কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলোর জন্য $-1 = 1, -4 = 4, -6 = 6$ হতে হবে, যা সম্ভব নয়। মুখ্যক ভুক্তিগুলো কেবল 0 হলেই, চিহ্নের পরিবর্তন হয় না কারণ শূন্যের সাথে মাইনাস $(-)$ গুণ করলেও তা শূন্যই থাকে। অর্থাৎ, মুখ্য কর্ণ বরাবর শূন্য ব্যতী অন্য কোনো সংখ্যা বসলে তা বিপ্রতিসম হতে পারবে না তাই যদি কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স বিপ্রতিসম হয় তার মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি শূন্য হতে হবে।

Step-02: মুখ্য কর্ণের ভুক্তিসমূহ বরাবর একটি রেখা কল্পনা করলে, তার লম্ব বরাবর ভুক্তিসমূহ সমান ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

ব্যাখ্যা:



গাণিতিকভাবে উপস্থাপন করলে, মুখ্যকণে ভুক্তি শূন্য হবে এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিদ্বয় পরস্পর সমান ও বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে যেখানে, $i \neq j$।

অর্থাৎ, যদি $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়,

তাহলে, $a_{ij} = \begin{cases} 0; i = j \\ -a_{ij}; i \neq j \end{cases} \dots \dots \dots (1)$

লক্ষ করো, মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য হবার কারণে $a_{ij} = -a_{ji}$ শর্তটি কিন্তু বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সকল ভুক্তির জন্য সত্য। কারণ $0 = -0$ তাহলে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য সাধারণভাবে লেখা যাবে যে, $a_{ij} = -a_{ji}$ শুধুমাত্র তোমাদের বোঝা সুবিধার্থে (1) নং এর মতো করে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সকে সংজ্ঞায়িত করা হয়েে

এবার তোমরা নিজেরাই বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স তৈরি কর‌ে পারবে এবং কোনো ম্যাট্রিক্স বিপ্রতিসম কিনা যাচাই করতে পারবে।

সতর্কতা!

কেবল বর্গ ম্যাট্রিক্সই প্রতিসম বা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হতে পারে। কেননা, ট্রান্সপোজ করা হলে ম্যাট্রিক্সের ক্রম উল্টে যা ফলে আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের ক্রম পরিবর্তন হয় (সারি সংখ্যা, কলাম সংখ্যার এবং কলাম সংখ্যা সারির সংখ্যার সমান হয়।) তাই, আয়তাকার ম্যাট্রিক্স কখনোই প্রতিসম/বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হতে পারে না কিন্তু ট্রান্সপোজ করলে বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্রম অপরিবর্তিত থাকে তাই, কেবল বর্গ ম্যাট্রিক্সই প্রতিসম বা বিপ্রতিসম হতে পারে।

(k) জটিল ম্যাট্রিক্স (Complex matrix):

জটিল সংখ্য ভুক্তি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে জটিল ম্যাট্রিক্স বলে। [বি.দ্র: জটিল সংখ্যা তোমাদের ২য় পত্রের ৩য় অধ্যায়ে (জটিল সংখ্যা) দেখানো হবে আপাতত এতটুকু জেনে রাখো, কাল্পনিক সংখ্যার একক, $i = \sqrt{-1}$

এবং $z = a + ib$ একটি জটিল সংখ্যা যেখানে, $a, b \in \mathbb{R}$

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 2i & 3 & 4 \\ 3 & i+5 & -1 \end{bmatrix}$ একটি জটিল ম্যাট্রিক্স, কারণ এই ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি হিসেবে জটিল সংখ্যা ব্যবহার হয়েে

(l) অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স (Conjugate matrix): কোন জটিল ম্যাট্রিক্সের জটিল ভুক্তিগুলো কে তাদের অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হলে, ঐ অনুবন্ধী ভুক্তি দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় ঐ ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স। কোনো ম্যাট্রিক্স A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে প্রকাশ করা হয় $\overline{A}$ দ্বারা।

জেনে রাখো

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা নির্ণয়ের কৌশল:

কোন জটিল সংখ্যা $a + ib$ যেখানে, $a \to$ বাস্তব অংশ; $b \to$ কাল্পনিক অংশ হলে এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা হবে $a - ib$ অর্থাৎ, i যুক্ত অংশের চিহ্ন পরিবর্তিত হলে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন:

$2 + 3i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা : $2 - 3i$

$1 - 2i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা : $1 + 2i$

i এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা : $-i$

2 এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা : 2

যেকোনো বাস্তব সংখ্যার অনুবন্ধী ঐ সংখ্যাটি নিজেই। কারণ 2 কে লেখা যায় '$2 + 0.i$'। অর্থাৎ এর অনুবন্ধী হবে: '$2 - 0.i$'$= 2$।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 5-i & 2 & i \\ 3 & 1+4i & 3i \\ 0 & -5i & 3+i \end{bmatrix}$ হলে,

$\therefore$ A এর অনুবন্ধী জটিল ম্যাট্রিক্স,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 5+i & 2 & -i \\ 3 & 1-4i & -3i \\ 0 & 5i & 3-i \end{bmatrix}$$

(m) হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian matrix):

কোন জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে ট্রান্সপোজ করলে বা কোন জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স নিলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা মূল ম্যাট্রিক্সের সমান হলে, তাকে হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স বলে। অর্থাৎ, একটি ম্যাট্রিক্স A হারমিশিয়ান হবে যদি $(\overline{A})^T = (\overline{A^T}) = A$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 2 & 7-i & 7 \\ 7+i & 3 & 3+2i \\ 7 & 3-2i & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7+i & 7 \\ 7-i & 3 & 3-2i \\ 7 & 3+2i & 4 \end{bmatrix}$

এখন, $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7+i & 7 \\ 7-i & 3 & 3-2i \\ 7 & 3+2i & 4 \end{bmatrix}$

আবার, $(\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & 7-i & 7 \\ 7+i & 3 & 3+2i \\ 7 & 3-2i & 4 \end{bmatrix} = A$

এবং $\overline{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & 7-i & 7 \\ 7+i & 3 & 3+2i \\ 7 & 3-2i & 4 \end{bmatrix} = A$

$\therefore A = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})$; তাহলে A একটি হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স।

জেনে রাখো

লক্ষ করো, এখান থেকে এটিও দেখানো যায় যে, $(\overline{A})^T = \overline{A^T}$ বা, কোন জটিল ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ এবং ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী আসলে একই ম্যাট্রিক্স। এটি কিন্তু শুধু হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স নয়, বরং সকল জটিল ম্যাট্রিক্সের জন্য সত্য। কিন্তু যদি তারা মূল জটিল ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তখনই সেটিকে হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স বলা যাবে, অন্যথায় নয়

➲ হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স যাচাই করার নিয়ম:

Step-01: মুখ্য কর্ণের ভুক্তি অবশ্যই যেকোন বাস্তব সংখ্যা হবে $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$

ব্যাখ্যা: ধরি, একটি জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} z_1 & 1+i & -3+4i \\ 1-i & z_2 & 9i \\ -3-4i & -9i & z_3 \end{bmatrix}$

[যেখানে z_1, z_2, z_3 ম্যাট্রিক্সটির মুখ্য কর্ণে অবস্থিত তিনটি জটিল সংখ্যা। ধরি, $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, z_3 = a_3 + b_3 i$.]

A ম্যাট্রিক্সটি হারমিশিয়ান হলে, $A = (\bar{A})^T$

$\therefore\ \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 1-i & -3-4i \\ 1+i & \bar{z}_2 & -9i \\ -3+4i & 9i & \bar{z}_3 \end{bmatrix} \therefore (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 1+i & -3+4i \\ 1-i & \bar{z}_2 & 9i \\ -3i-4i & -9i & \bar{z}_3 \end{bmatrix}$

এখন, $A = (\bar{A})^T$ হলে, $z_1 = \bar{z}_1 \therefore a_1 + b_1 i = a_1 - b_1 i \Rightarrow 2b_1 i = 0 \therefore b_1 = 0$

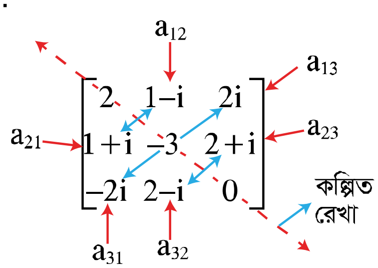
আবার, $z_2 = \bar{z}_2 \therefore a_2 + b_2 i = a_2 - b_2 i \Rightarrow 2b_2 i = 0 \therefore b_2 = 0$

একইভাবে, $z_3 = \bar{z}_3 \therefore a_3 + b_3 i = a_3 - b_3 i \Rightarrow 2b_3 i = 0 \therefore b_3 = 0$

ফলে মুখ্য কর্ণে জটিল সংখ্যার শুধু বাস্তব অংশ থাকবে, অবাস্তব কাল্পনিক অংশের মান শূন্য হবে। অর্থাৎ, কোনো ম্যাট্রিক্স হারমিশিয়ান হতে হলে মুখ্য কর্ণ বরাবর বাস্তব সংখ্যা থাকতে হবে। মুখ্য কর্ণে কখনোই কোনো জটিল সংখ্যা থাকতে পারবে না।

Step-02: মুখ্য কর্ণ বরাবর একটি রেখা বিবেচনা করলে এর লম্ব বরাবর ভুক্তিসমূহ পরস্পরের অনুবন্ধী হবে।

ব্যাখ্যা:



গাণিতিকভাবে উপস্থাপন করা হলে, মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলো হবে বাস্তব সংখ্যা এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তিগুলো হবে পরস্পরের অনুবন্ধী। অর্থাৎ a_{ij} এবং a_{ji} পরস্পর অনুবন্ধী হবে। অর্থাৎ, হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত: $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ হতে হবে। অর্থাৎ, a_{ij} এবং a_{ji} কাল্পনিক অংশের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

এখন তোমরা নিজেরাই হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স তৈরি করতে এবং কোনো ম্যাট্রিক্স হারমিশিয়ান কিনা তা সহজেই যাচাই করতে পারবে।

(n) বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Skew Hermitian Matrix):

কোন জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্সের অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সকে ট্রান্সপোজ করা হলে বা কোন জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজের অনুবন্ধী নিলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তা মূল ম্যাট্রিক্সের ঋণাত্মক ম্যাট্রিক্সের সমান হলে, তাকে বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স বলে।

অর্থাৎ, কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স, A বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে যদি $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)} = -A$ হয়।

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & -3i \\ 2i & 3i & 3+5i \\ -3i & -3+5i & -5i \end{bmatrix} \therefore \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2i & 3i \\ -2i & -3i & 3-5i \\ 3i & -3-5i & -5i \end{bmatrix}$ এবং $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2i & -3i \\ 2i & 3i & -3+5i \\ -3i & 3+5i & -5i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & -2i & 3i \\ -2i & -3i & -3-5i \\ 3i & 3-5i & 5i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2i & -3i \\ 2i & 3i & 3+5i \\ -3i & -3+5i & -5i \end{bmatrix} = -A$

এবং $\overline{(A^T)} = \begin{bmatrix} 0 & -2i & 3i \\ -2i & -3i & -3-5i \\ 3i & 3-5i & 5i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2i & -3i \\ 2i & 3i & 3+5i \\ -3i & -3+5i & -5i \end{bmatrix} = -A$

$\because (\bar{A})^T = \overline{(A^T)} = -A$ একটি বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স।

➲ বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স যাচাই করার নিয়ম:

Step-01: মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য অথবা বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হবে।

মনে করো, A একটি জটিল বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A = \begin{bmatrix} z_1 & 1+i & -3+4i \\ -1+i & z_2 & 9i \\ 3+4i & 9i & z_3 \end{bmatrix}$

[যেখানে z_1, z_2, z_3 ম্যাট্রিক্সটির মুখ্য কর্ণে অবস্থিত তিনটি জটিল সংখ্যা। ধরি, $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, z_3 = a_3 + b_3 i$.]

এখন, A ম্যাট্রিক্সটি বিহারমিশিয়ান হলে $(\bar{A})^T = -A \Rightarrow -(\bar{A})^T = A$ হবে

$$\therefore \ \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & 1-i & -3-4i \\ -1-i & \bar{z}_2 & -9i \\ 3-4i & -9i & \bar{z}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 & -1-i & 3-4i \\ 1-i & \bar{z}_2 & -9i \\ -3-4i & -9i & \bar{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ -(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -\bar{z}_1 & 1+i & -3+4i \\ -1+i & -\bar{z}_2 & 9i \\ 3+4i & 9i & -\bar{z}_3 \end{bmatrix}$$

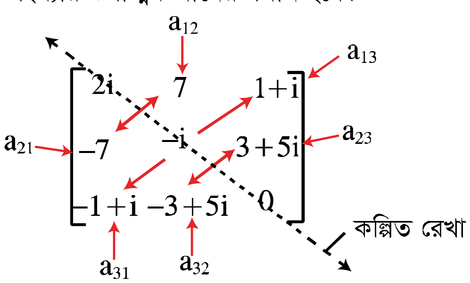
এখন, $A = -(\bar{A})^T$ হলে, $z_1 = -\bar{z}_1; z_2 = -\bar{z}_2; z_3 = -\bar{z}_3$এখন, $z_1 = a + bi$ হলে, $\bar{z}_1 = a - bi \because z_1 = -\bar{z}_1$

$\therefore a + bi = -(a - bi) \Rightarrow a + bi = -a + bi \Rightarrow 2a = 0 \therefore a = 0$

এখন, $z = a + bi = 0 + bi = bi$ (বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা) আবার, $b = 0$ হলে $z = 0$

অর্থাৎ, বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স হতে হলে মুখ্য কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলোর বাস্তব অংশ 0 হতে হবে অর্থাৎ মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা অথবা 0 (যেহেতু, 0 কে অনুবন্ধী করে ঋণাত্মক করলে 0 ই পাওয়া যায়) হতে হবে।

Step-02: মুখ্য কর্ণ বরাবর একটি রেখা বিবেচনা করলে এর লম্ব বরাবর ভুক্তিসমূহ অনুবন্ধীর যোগাত্মক বিপরীতক বা অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ঋণাত্মক মানের সমান হবে।



বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্সের ভুক্তিগুলোর ক্ষেত্রে (i, j) তম ভুক্তির অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্সের যোগাত্মক বিপরীতক (j, i) তম ভুক্তির সমান। গাণিতিকভাবে, বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত হল: $-\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ অথবা, $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ হবে। উদাহরণে খেয়াল কর, a_{ij} এবং a_{ji} ভুক্তিসমূহের কাল্পনিক অংশ পরস্পর সমান। কেবল বাস্তব অংশের চিহ্ন পরস্পর বিপরীত হয়।

যেমন: $a_{13} = 1 + i$ এবং $a_{31} = -1 + i$। কেবল বাস্তব অংশের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ পাশের উদাহরণে, $a_{23} = 3 + 5i$

$\therefore a_{32} = -(\bar{a}_{23}) = -(3 - 5i) = -3 + 5i$।

আশা করি, এখন তোমরা নিজেরাই বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স তৈরি এবং কোনো ম্যাটিক্স বিহারমিশিয়ান কিনা যাচাই করতে পারবে।

সতর্কতা!

হারমিশিয়ান এবং বিহারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স অবশ্যই হতে হলে কোন ম্যাট্রিক্সকে অবশ্যই বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হয় কেননা, আয়তাকার ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের ক্রম পরিবর্তন হয়ে যায়। কিন্তু ট্রান্সপোজ করা হলেও বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্রম অপরিবর্তিত থাকে।

উপ-ম্যাট্রিক্স (Sub Matrix):

তোমরা সকলে উপসেট এর সাথে পরিচিত। যদি কোন একটি সেট, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ হয়, তাহলে $\{1, 2, 4\}$ কে আমরা A সেটটির একটি উপসেট বলতে পারবে A সেটের কমপক্ষে একটি উপাদান বাদ দিয়ে আমরা নতুন যে সেট পাবো সেই সেট হবে প্রদত্ত সেটের একটি প্রকৃত উপসেট। কিন্তু উপসেট যদি প্রদ সেটের সমান হয় তাহলে তাকে অপ্রকৃত উপসেট বলে। অর্থাৎ, উপসেটটি মূল সেটের অসমান হলে, তাকে প্রকৃত উপসেট বলা হয় অন্যথায় তাকে অপ্রকৃত উপসেট বলে।

একইভাবে ম্যাট্রিক্সের উপ-ম্যাট্রিক্স বলতে কোন ম্যাট্রিক্সের যেকোন সংখ্যক সারি ও কলামের ভুক্তি বাদ দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সকে বে এক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সটি যেকোন ধরনের হতে পারে। তবে উপ-ম্যাট্রিক্স কখনো মূল ম্যাট্রিক্সের সমান হবে না

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}_{4\times 3}$ একটি 4×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে, যদি এই ম্যাট্রিক্স এর ১ম সারি ও ৩য় কলাম বাদ দেওয়া হয়,

তাহলে নতুন ম্যাট্রিক্সটি হবে: $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$; যা মূল ম্যাট্রিক্সটির একটি উপ-ম্যাট্রিক্স। আবার যদি A ম্যাট্রিক্স হতে ১ম সারি ও ২য় সারি বাদ দে হয়, তখন নতুন ম্যাট্রিক্সটি হবে: $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$; যা হবে মূল ম্যাট্রিক্সটির একটি উপ-ম্যাট্রি

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ সংক্রান্ত সমস্যা (Problems Related to Types of Matrix)

উদাহরণ-০১: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{b} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ **একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হল, a, b, c এর মানগুলো বের করো।** **[DU'17-18]**

সমাধান: বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য, $A^T = -A$. বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মুখ্য কর্ণের ভুক্তি গুলো অবশ্যই শূন্য হবে।

$\therefore a = b = c = 0$

উদাহরণ-০২: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{-4} \end{bmatrix}$ **একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে a =?**

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & a \\ 7 & 3 & 8 \\ 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 7 & 3 & 8 \\ a & 8 & -4 \end{bmatrix}$

$\because$ A ম্যাট্রিক্স প্রতিসম হলে $A = A^T$ $\therefore a = 4$ হবে।

Shortcut

প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য $a_{ij} = a_{ji}$ এক্ষেত্রে, $a_{13} = a$ এবং $a_{31} = 4 \therefore a = 4$ [$\because a_{13} = a_{31}$]

উদাহরণ-০৩: $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{m} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে m এর মান নির্ণয় কর।** **[JB'21]**

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে, $-A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -m \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

এবং $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ m & 3 & 0 \end{bmatrix}$। A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $A^T = -A \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ m & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -m \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $m = -4$ [(3, 1) তম ভুক্তির সমতা হতে]

ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ (Addition and subtraction of matrices)

মনে করো, কোনো একটি কোল্ড-ড্রিংকসের দোকানের দুইটি শাখা শহরের দুইটি জায়গায় আছে। শাখা দুইটিতে তিন দিনে তিন ধরণের কোল্ড-ড্রিংকস যথাক্রমে Coca-Cola, Pepsi, Sprite বিক্রির সংখ্যা নিচের ছকে দেখানো হয়েছে

	১ম শাখা			২য় শাখা		
	Coca-Cola	Pepsi	Sprite	Coca-Cola	Pepsi	Sprite
১ম দিন	20	11	13	18	6	3
২য় দিন	19	14	17	16	15	18
৩য় দিন	27	9	12	19	6	10

শাখা দুইটির বিক্রিত কোল্ড-ড্রিংকস সংখ্যাকে ম্যাট্রিক্সের মাধ্যমে প্রকাশ করে পাই।

$A = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 13 \\ 19 & 14 & 17 \\ 27 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 3 \\ 16 & 15 & 18 \\ 19 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

এখন যদি তোমাকে বলা হয় দোকানের শাখা দুটি মিলিয়ে ১ম দিনে মোট কতগুলো Coca-Cola বিক্রি করা হয়েছে তা বের করতে। তাহলে তুমি Coca-Cola এর সংখ্যা বের করার জন্য উভয় ম্যাট্রিক্স এর ১ম কলাম ও ১ম সারির (a_{11} ও b_{11}) ভুক্তিগুলো যোগ করবে। যদি ৩য় দিনে Pepsi এর বিক্রয় সংখ্যা জানতে চাওয়া হয় তাহলে তুমি উভয় ম্যাট্রিক্সের ২য় কলামে ৩য় সারির (a_{32} ও b_{32}) ভুক্তি দুটি যোগ করে যদি তোমাকে জিজ্ঞাসা করা হয়, ১ম দিনে ১ম শাখা অপেক্ষা ২য় শাখায় কতটি Coca-Cola বেশি/কম বিক্রি হয়েছে, তাহলে তুমি উভয় ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি ও ১ম কলামের (a_{11} ও b_{11}) ভুক্তি দুইটিকে বিয়োগ করতে বিয়োগফল ধনাত্মক হলে ১ম শাখায় ততটি Coca-Cola ২য় শাখা অপেক্ষা বেশি, ঋণাত্মক হলে ১ম শাখায় ততোটি ২য় শাখা অপেক্ষা Coca-Cola কম বিক্রি হয়েছে।

ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগেও আমরা একই কাজ করি দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ বা বিয়োগ করার ক্ষেত্রে অনুরূপ ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করি।

উভয় শাখা মিলে 3 দিনে 3 টি কোল্ড ড্রিংকসের বিক্রয় জানতে ম্যাট্রিক্সদ্বয় যোগ করতে হবে।

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}20+18 & 11+6 & 13+3\\ 19+16 & 14+15 & 17+18\\ 27+19 & 9+6 & 12+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38 & 17 & 16\\ 35 & 29 & 35\\ 46 & 15 & 32\end{bmatrix}$$

একইভাবে, কোন দিন ১ম শাখায় ২য় শাখা অপেক্ষা কোল্ড ড্রিংকস বেশি/কম বিক্রি হয়েছে তা জানতে ম্যাট্রিক্সদ্বয় বিয়োগ করতে হবে। $\therefore A-B=\begin{bmatrix}20-18 & 11-6 & 13-3\\ 19-16 & 14-15 & 17-18\\ 27-19 & 9-6 & 12-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 10\\ 3 & -1 & -1\\ 8 & 3 & 2\end{bmatrix}$

➲ ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগের শর্ত:

(i) দুই বা ততোধিক ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ তখনই সম্ভব, যখন ম্যাট্রিক্সসমূহ একই ক্রমের হয়। অর্থাৎ, ম্যাট্রিক্সগুলোর সারি ও কলামের সংখ্যা সমান হতে হবে।

(ii) ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগে অনুরূপ ভুক্তিগুলোর যোগ-বিয়োগ হয়

জেনে রাখো

ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগফল/বিয়োগফল যে ম্যাট্রিক্স হবে তার ক্রম, আগের ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের ক্রমের সমান হবে।

উদাহরণ-০৪: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0}\end{bmatrix}_{3\times3}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{9}\end{bmatrix}_{3\times3}$ **ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগফল নির্ণয় করতে হবে।**

যেহেতু, A ও B উভয় ম্যাট্রিক্সের ক্রম সমান (3×3) তাই ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের যোগফল নির্ণয় করা যাবে।

$$\therefore A+B=\begin{bmatrix}1-2 & 0+4 & 2+3\\ 3+0 & 2-3 & -1+1\\ 2+7 & 5+0 & 0+9\end{bmatrix}$$ [অনুরূপ ভুক্তিতে যোগ-বিয়োগ]

$$=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 0\\ 9 & 5 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$$ [যোগফল ম্যাট্রিক্সের ক্রম, A ও B ম্যাট্রিক্সের ক্রমের সমান।]

A এর a_{11} ভুক্তির সাথে B এর b_{11} ভুক্তির যোগ, A এর a_{12} ভুক্তির সাথে B এর b_{12} ভুক্তির যোগ একইভাবে অনুরূপ ভুক্তিগুলো যোগ করতে হবে তদ্রূপ A ম্যাট্রিক্স থেকে B ম্যাট্রিক্সের বিয়োগ করলে, অনুরূপ ভুক্তিগুলো বিয়োগ হবে। এখন, তোমরা নিজেরাই A – B বের করে ফেলতে পারবে সঠিকভাবে ম্যাট্রিক্সদ্বয় বিয়োগ করলে পাবে: $A-B=\begin{bmatrix}3 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ -5 & 5 & -9\end{bmatrix}$

➲ ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ গাণিতিকভাবে প্রকাশ:

A ও B দুইটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ও $B=[b_{ij}]_{m\times n}$। [যেখানে, $i,j,m,n\in\mathbb{N}; 1\le i\le m; 1\le j\le n$]

যোগ-বিয়োগ প্রক্রিয়ার গাণিতিক রূপ: $A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$