প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-১০ : যোগজীকরণ

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরাফাত ও রাশেদ

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
৩৫০/-
(তিনশত পঞ্চাশ টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-১০: যোগজীকরণ

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, অধ্যায়, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

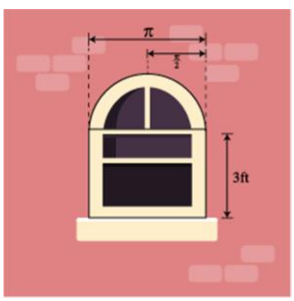
উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-10, Bangla Version, Page-22, Question-05, দেওয়া আছে, [a] কিন্তু হবে [b]

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

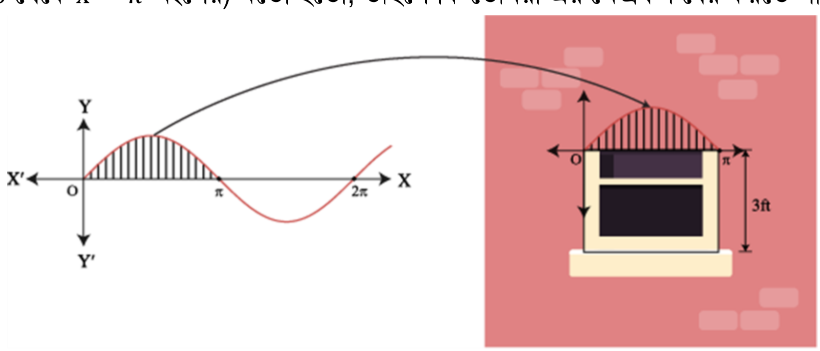
অধ্যায় ১০ যোগজীকরণ

তোমরা কি খিলান চেনো? অনেকে হয়তো চেনো, আবার কেউ কেউ হয়তো ভাবছো যে তোমরা এটি চেনো না। খিলান হলো একটি বাঁকানো কাঠামো যেটা কোনো একটি ভার বহন করতে পারে। তোমরা অনেকে পুরানো বাড়িতে জানালার উপরে একটি কিছুটা অর্ধবৃত্তাকার অংশ দেখে থাকবে। একেই আসলে খিলান বলে। মনে করো, তুমি একটি পুরানো বাড়িতে গিয়েছো যার জানালার উপর একটি অর্ধবৃত্তাকার খিলান আছে। যে জানালার উপর অর্ধবৃত্তাকার খিলানটি আছে তার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে π এবং 3 ফুট। তোমাকে যদি এখন আমি জিজ্ঞাসা করি, এই খিলানসহ জানালাটার ক্ষেত্রফল কত, তুমি কি তা বের করতে পারবে?



আমার বিশ্বাস তুমি কীভাবে এটা বের করবে তা ইতোমধ্যেই চিন্তা করে ফেলেছো। হ্যাঁ, জানালার নিচের অংশটি একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য হলো π ফুট এবং প্রস্থ হলো 3 ফুট। তাহলে এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ $= \pi \times 3 = 3\pi$ বর্গফুট এবং উপরের অংশ একটি অর্ধবৃত্ত যার ব্যাস হলো $2r = \pi$ ফুট। অর্থাৎ, অর্ধবৃত্তটির ব্যাসার্ধ হলো $r = \frac{2r}{2} = \frac{\pi}{2}$ ফুট। তাহলে অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল হবে, $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^3}{8}$ বর্গফুট। তাহলে, খিলানসহ জানালার ক্ষেত্রফল হবে $3\pi + \frac{\pi^3}{8}$ বর্গফুট। তোমরা অনেকে মুখে মুখে হিসাব করেই হয়তো এটি বের করে ফেলেছো। খুবই ভালো। তোমরা কেন এই ক্ষেত্রফল বের করতে পেরেছো বলোতো? কারণ আয়তক্ষেত্র এবং বৃত্ত উভয়েরই ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি/সূত্র তোমরা জানো।

কিন্তু এখন যদি এই খিলানটি বৃত্তাকার না হয়ে অন্য কোন আকৃতির হতো? যেমন ধরো, খিলানটি যদি $y = \sin x$ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ একটি অর্ধচক্রের ($x = 0$ থেকে $x = \pi$ অংশের) মতো হতো, তাহলে কি তোমরা এর ক্ষেত্রফল বের করতে পারতে?



তুমি হয়তো চিন্তা করছো যে $y = \sin x$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অর্ধচক্রের ক্ষেত্রফল যদি তোমার জানা থাকতো, তাহলে হয়তো তুমি আবারো এই খিলানসহ জানালার ক্ষেত্রফল বের করতে পারতে। কিন্তু তোমার কি তা জানা আছে? আমার কিন্তু জানা আছে। $y = \sin x$ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অর্ধচক্রের ($x = 0$ থেকে $x = \pi$ অংশের) ক্ষেত্রফল হলো 2 বর্গ একক। আমাদের একক এখানে যেহেতু ফুট ছিলো তাই এখানে ক্ষেত্রফলটি হবে 2 বর্গফুট। তাহলে খিলানসহ জানালার ক্ষেত্রফল হবে $3\pi + 2$ বর্গফুট। কিন্তু আমি কীভাবে জানলাম যে, $y = \sin x$ ও x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অর্ধচক্রের ($x = 0$ থেকে $x = \pi$ অংশের) ক্ষেত্রফল 2 বর্গফুট? এটিই আমি তোমাদেরকে জানাবো এই যোগজীকরণ অধ্যায়ে। শুধু $y = \sin x$ নয়, আরো অনেক ফাংশন এবং x-অক্ষ অথবা অন্য কোন ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল আমরা এই অধ্যায়ে বের করা শিখবো।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস (Brief History)

যদিও আমাদের পাঠ্যবই বা ক্যালকুলাসের সকল বইয়ে প্রথমে অন্তরীকরণ এবং পরে যোগজীকরণ নিয়ে আলোচনা করা হয়, কিন্তু বাস্তবে যোগজীকরণে সূচনা ও ধারণা সৃষ্টি হয় অন্তরীকরণের অনেক আগেই। প্রায় আড়াই হাজার বছর পূর্ব থেকেই গণিতবিদগণ যোগজীকরণ ও সমষ্টিকরণ এর একেবারেই প্রাথমিক ও মৌলিক ধারণা সম্পর্কে চিন্তা ও গবেষণা করা শুরু করেন। বিভিন্ন তথ্যানুসারে এটা নিশ্চিত হওয়া যায় যে, সর্বপ্রথম যোগজীকরণ, সমষ্টিকরণ ধারণার আবির্ভাব করেন গ্রিক গণিতবিদ ইউডোক্সাস (খ্রিষ্টপূর্ব 390-খ্রিষ্টপূর্ব 355)। যেকোন আকার-আকৃতির আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সঠিকভাবে নির্ণয়ের জন্য তিনি 'নিঃশেষ পদ্ধতি (Method of Exhaustion)' এর ধারণা প্রদান করেন; যার সাথে যোগজীকরণ ধারণার সাদৃশ্যতা আছে। নিঃশেষ পদ্ধতির কিছু সুন্দর প্রয়োগ আমরা দেখতে পাই গ্রিক গণিতবিদ ইউক্লিডের 'Elements' বইয়ের বেশকিছু প্রমাণে। এছাড়া সাম্প্রতিক সময়ে আর্কিমিডিসের হারিয়ে যাওয়া পান্ডুলিপি আবিষ্কারের পর গণিতবিদগণ জানতে পারেন, আর্কিমিডিস Exhaustion Method বা নিঃশেষ পদ্ধতি ছাড়াও আরেকটি পদ্ধতি ব্যবহার করে আসছিলেন যার নাম Mechanical method.


ইউডোক্সাস


ইউক্লিড

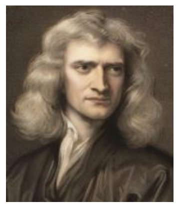

আর্কিমিডিস


জেমস গ্রেগরি


আইজ্যাক ব্যারো

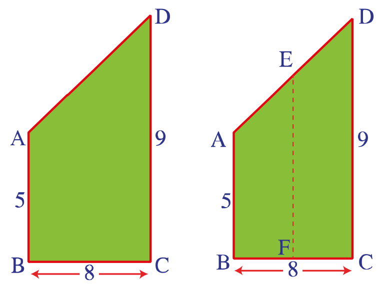
যোগজীকরণ হলো অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া, এটা ছিল ক্যালকুলাস বিদ্যায় একটি বড় আবিষ্কার। স্কটিশ গণিতবিদ জেমস গ্রেগরি সকলের সামনে এটি উপস্থাপন করেন যার সাধারণ গাণিতিক প্রমাণ দিয়েছেন স্বয়ং স্যার আইজ্যাক নিউটনেরই শিক্ষক আইজ্যাক ব্যারো। মূলত এ সকল ধারণার আবিষ্কার ক্যালকুলাসকে গণিতের একটি স্বতন্ত্র শাখা হিসেবে গড়ে তুলতে থাকে।

পরবর্তীতে (300 বছর পূর্বে) স্যার আইজ্যাক নিউটন ও গটফ্রেড লিবনিজ যোগজীকরণের সকল মূলনীতি, নিয়ম-কানুন লিপিবদ্ধ করা শুরু করেন। ইংরেজি শব্দ Summation এর প্রথম অক্ষর 'S' কে সম্প্রসারিত করে '$\int$' চিহ্নটি সর্বপ্রথম লিবনিজ ব্যবহার করেন। এ অধ্যায়ে আমরা যত প্রাথমিক নিয়ম শিখবো তার অধিকাংশ নিউটন-লিবনিজ হতে প্রাপ্ত। নিউটন-লিবনিজের জন্যই ক্যালকুলাস গণিতের স্বতন্ত্র ও মৌলিক শাখা হিসেবে প্রতিষ্ঠা পায় বলে লিবনিজ ও নিউটনকে যৌথভাবে ক্যালকুলাসের জনক বলা হয়।


স্যার আইজ্যাক নিউটন


গটফ্রেড লিবনিজ

তোমাদেরকে যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা দেওয়ার আগে চলো একটি দৃশ্যপট সম্পর্কে আলোচনা করি। মনে করো, তোমার কাছে একটি ট্রাপিজিয়াম আছে। ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 ও 9 একক এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 একক।

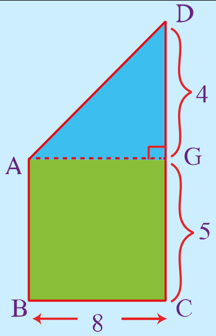


এখানে ট্রাপিজিয়ামের গড় দৈর্ঘ্য বা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের গড় হলো $= \frac{5+9}{2} = 7$ একক এবং প্রস্থ 8 একক।

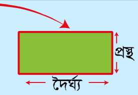
$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= 7 \times 8 = \frac{5+9}{2} \times 8 = \frac{1}{2}(5+9) \times 8$ বর্গ একক $= 56$ বর্গ একক

এখান থেকেই কিন্তু আমরা বলি, ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল) $\times$ উচ্চতা

কিন্তু মনে করো, এই সূত্র তোমার জানা থাকলেও তোমার ৩য় শ্রেণিতে পড়ুয়া ছোট ভাই সিয়াম জানে না।



সে আজকে তার স্কুলে নতুন শিখেছে যে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।



তাকে তুমি বললে এই ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল বের করতে।
তোমার ছোট ভাই সিয়াম যেহেতু ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল বের করতে পারে না। তাই সে A হতে DC এর উপর AG লম্ব টেনে দেখলো AGCB আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়েছে। এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $AB \times BC = 5 \times 8 = 40$ বর্গ একক
কিন্তু সে দেখলো এতে উপরের AGD ত্রিভুজাকার অংশের ক্ষেত্রফল বাদ পড়ে গেছে।

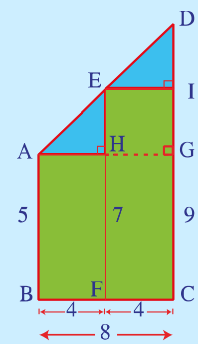
এই সমস্যার সমাধানের জন্য সিয়াম ট্রাপিজিয়ামটির ভূমি BC কে প্রথমে সমান দুইভাবে ভাগ করলো (EF রেখার দ্বারা)।

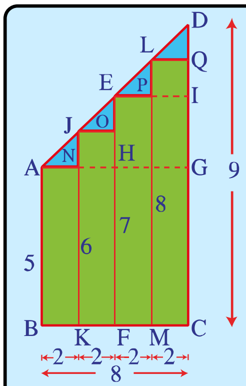
EF রেখার দৈর্ঘ্য $= \frac{AB+CD}{2} = \frac{5+9}{2} = 7$ একক

A হতে EF এবং E হতে DC এর উপর সে যথাক্রমে AH ও EI লম্ব আঁকলো।

তাহলে ABFH ও EFCI দুইটি আয়তক্ষেত্র তৈরি হলো যাদের প্রত্যেকের প্রস্থ 4 একক করে এবং দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 ও 7 একক।

$\therefore$ এদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি $= 5 \times 4 + 7 \times 4 = 20 + 28 = 48$ বর্গ একক। সে দেখলো এখানেও ΔAHE ও ΔEID অংশ বাদ পড়ে গেছে। কিন্তু সে লক্ষ করলো প্রাপ্ত ক্ষেত্রফল আগের থেকে আরো accurate. কারণ এখানে EHGI অংশ অন্তর্গত হয়েছে যা আগের বার ছিলো না।





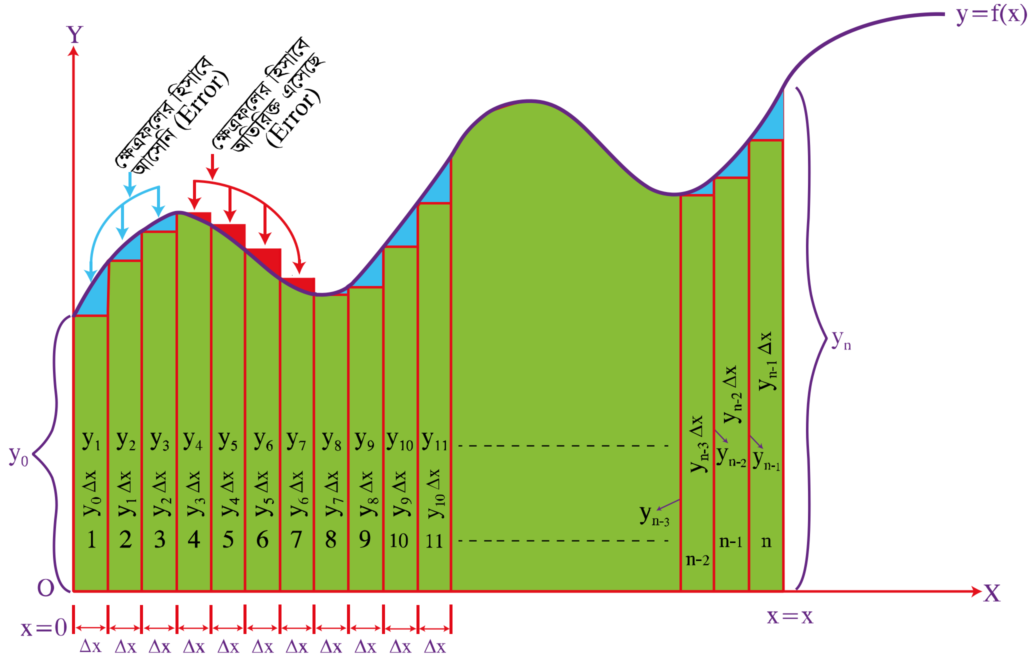
এসব দেখে সিয়ামের উৎসাহ দ্বিগুণ হয়ে গেলো। আগের দুইটি ট্রাপিজিয়ামকে (ABFE ও EFCD) সে আবারও আগের মতো দুই ভাগে ভাগ করলো (JK ও LM রেখা দ্বারা)। এরপর A, J, E ও L হতে JK, EF, LM ও DC এর উপর যথাক্রমে AN, JO, EP ও LQ লম্ব আঁকলো। তাহলে ABKN, JKFO, EFMP এবং LMCQ আয়তক্ষেত্র তৈরি হয়েছে। যাদের প্রত্যেকের প্রস্থ 2 একক করে এবং দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5,6,7 ও 8 একক।
এদের ক্ষেত্রফলের যোগফল $= 5 \times 2 + 6 \times 2 + 7 \times 2 + 8 \times 2 = 10 + 12 + 14 + 16 = 52$ বর্গ একক। এক্ষেত্রে সে লক্ষ করলো উপরে 4 টি ত্রিভুজ ($\Delta ANJ, \Delta JOE, \Delta EPL, \Delta LQD$) এর ক্ষেত্রফল বাদ পড়েছে। কিন্তু আগের বারের চেয়ে এই ক্ষেত্রফল আরো accurate. কারণ এখানে JNHO এবং LPIQ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল অতিরিক্ত এসেছে যা আগের বার ছিলো না।

লক্ষ করো, ট্রাপিজিয়ামের প্রকৃত ক্ষেত্রফল ছিলো 56 বর্গ একক। যদি কোনো কারণে তোমার ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি জানা না থাকে এবং পূর্বের মতো যদি তুমি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র ব্যবহার করো তাহলে যত বেশি আয়তক্ষেত্রে ট্রাপিজিয়ামকে ভাগ করবো তত ক্ষেত্রফল বেশি accurate মানের কাছে যাবে। তুমি শেষের 4 টি ভাগের প্রতিটিকে আবারও অর্ধেক করে ভাগ করে (মোট 8 ভাগ) দেখো প্রাপ্ত আয়তক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি হবে প্রকৃত ক্ষেত্রফলের মানের আরো নিকটবর্তী। এই concept টাই যোগজীকরণের ভিত্তি। চলো এখন আমরা যোগজীকরণের জগতে প্রবেশ করি।

যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা
(Preliminary Concept of Integration)

অন্তরীকরণে আমরা x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার নিয়ে আলোচনা করেছি। এক কথায়, অন্তরীকরণের মাধ্যমে আমরা কোন ফাংশনের যেকোন একটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করি। যোগজীকরণের মাধ্যমে আমরা মূলত কোন ফাংশন বা লেখচিত্র বা দুইটি ফাংশনের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবো।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা: (ব্যাখ্যাগুলো পড়ার সময় অবশ্যই চিত্রের সাথে মিলিয়ে পড়বে)



চিত্র-০১

মনে করি, $y = f(x)$ একটি ফাংশন যার লেখচিত্র (চিত্র-১) উপরে আঁকা হয়েছে। আমরা চাই, ফাংশনটি এবং x অক্ষ দ্বারা $x = 0$ হতে $x = x$ [x হলো চলক, যেকোন বিন্দু] এর মধ্যবর্তী আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে।

এখন আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ । আমরা চাই এই সহজ সূত্রটি ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল বের করতে। কিন্তু, $y = f(x)$ ফাংশনটি বক্ররেখা বলে এই সূত্রটি এখনই আমরা ব্যবহার করতে পারছি না। তাই প্রাথমিকভাবে আমরা $y = f(x)$ কে $x = 0$ হতে $x = x$ পর্যন্ত n সংখ্যক ভাগে আমরা ভাগ করেছি। ধরি, আদি বিন্দু $x = 0$, শেষ বিন্দু $x = x$, প্রতিটি ভাগের প্রস্থ Δx এবং দৈর্ঘ্য y_i।

যেমন: ১ম খণ্ডের দৈর্ঘ্য y_0, ২য় খণ্ডের দৈর্ঘ্য y_1, এভাবে শেষ খন্ডের দৈর্ঘ্য y_{n-1}

এখন যদি আমরা (1) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল বের করি তাহলে পাবো $y_0\Delta x$

আবার যদি (2) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল বের করি তাহলে পাবো দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $y_1\Delta x$

… …

এভাবে (n) নং খণ্ডের ক্ষেত্রফল বের করলে পাওয়া যাবে $y_{n-1}\Delta x$

এই সবগুলো ক্ষেত্রফল যোগ করলে আমরা $y = f(x)$ এবং x-অক্ষের অন্তর্গত [$x = 0$ হতে $x = x$ পর্যন্ত] অংশের আনুমানিক ক্ষেত্রফল (Approximate Area) পাবো।

Approximate Area, $A' = y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}\Delta x$ [চিত্র-০১ মনোযোগ সহকারে দেখো।]

$$\therefore A' = \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x \ldots\ldots\ldots (i)$$

অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল:

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,; n \neq -1$ (ii) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

এই দুইটি সূত্র আমরা কিছুক্ষণ আগেই দেখেছি। একইভাবে চলো আরো কয়েকটি সূত্র প্রমাণ করে ফেলি।

01. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow d(e^x) = e^x dx \therefore \int e^x dx = e^x + c$

02. $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = m\,e^{mx} \Rightarrow \frac{1}{m} d(e^{mx}) = e^{mx} dx \quad \therefore \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m} e^{mx} + c$

03. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \Rightarrow \frac{1}{\ln a} d(a^x) = a^x dx \quad \therefore \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0\,, a \neq 1$

04. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \Rightarrow d(\sin x) = \cos x\ dx \ \therefore \int \cos x\,dx = \sin x + c$

05. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \Rightarrow -d(\cos x) = \sin x dx \ \therefore \int \sin x dx = -\cos x + c$

06. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \Rightarrow d(\tan x) = \sec^2 x\,dx \ \therefore \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

07. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x \Rightarrow -d(\cot x) = \text{cosec}^2 x\,dx \ \therefore \int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

08. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \Rightarrow d(\sec x) = \sec x \tan x\,dx \ \therefore \int \sec x \tan x\ dx = \sec x + c$

09. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x) = -\text{cosec}x \cot x \Rightarrow -d(\text{cosec}\,x) = \text{cosec}x \cot x\,dx \ \therefore \int \text{cosec}\,x \cot x dx = -\text{cosec}x + c$

10. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \therefore \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

11. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow d(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \therefore \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

12. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow d(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \therefore \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + c$

13. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow d(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} dx \therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

14. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow d(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx \therefore \int -\frac{1}{1+x^2} dx = \cot^{-1} x + c$

15. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow d(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \therefore \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

16. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow d(\text{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \therefore \int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{cosec}^{-1} x + c$

জেনে রাখো

তোমরা অনেকে লক্ষ করে থাকবে যে, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ হলেও $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos x + c$ হয়েছে।

তোমাদের অনেকেই নিশ্চয়ই চিন্তা করেছো যে, $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sin^{-1}x + c$ হওয়ার কথা কিন্তু এখানে $\cos^{-1}x + c$ এসেছে।

তাহলে কি $-\sin^{-1} x + c$ এই উত্তরটি ভুল?

আসলে না। দুইটি উত্তরই সঠিক। উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্রের অধ্যায়-০৭ (বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ) এ তোমরা দেখবে যে এমন একটি সূত্র আছে: $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \ldots\ldots\ldots (i)$

তাহলে, $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1}x + c' = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x + c' = -\sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} - c'$

$= -\sin^{-1}x + c$ [ধরি, $\frac{\pi}{2} - c' = c$, যা নতুন একটি ধ্রুবক]

অর্থাৎ, $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1}x + c$ আবার, $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sin^{-1}x + c$

উভয়ই সঠিক। তোমরা আবার একবার c' এবং অন্যবার c দেখে বিভ্রান্ত হয়ো না। যোগজীকরণ ধ্রুবক এর মান নির্দিষ্ট নয়। এটি যেকোন ধ্রুবক হতে পারে। তাই দুই ক্ষেত্রে c ব্যবহার করলেও সমস্যা নেই।

একইভাবে $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \cot^{-1}x + c$ এবং $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = -\tan^{-1}x + c$ এর উভয়ই সঠিক এবং

$\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \text{cosec}^{-1} x + c$ এবং $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\sec^{-1} x + c$ এরও দুইটিই সঠিক।

Type-01: সাধারণ যোগজ নির্ণয়ের সূত্রের ব্যবহার (Use of General Formula to Determine Integral)

Concept

এই টাইপের সমস্যাগুলো সমাধানের জন্য যোগজীকরণের প্রাথমিক সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

উদাহরণ-০১: $\int \mathbf{5x^7 dx}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\int 5x^7 dx = \frac{5x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{5}{8}x^8 + c$; যেখানে c যোগজীকরণ ধ্রুবক **(Ans.)**

উদাহরণ-০২: $\int (\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx})\, \mathbf{dx}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\int ax^3 dx + \int bx^2 dx + \int cxdx = a\int x^3 dx + b\int x^2 dx + c\int xdx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + c_1$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৩: $\int (\mathbf{3\cos x - 5\sec^2 x})\mathbf{dx}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\int (3\cos x - 5\sec^2 x)\, dx = 3\int \cos x\, dx - 5\int \sec^2 x\, dx = 3\sin x - 5\tan x + c.$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৪: $\int \mathbf{x(1+\sqrt{x})\, dx} = ?$ **[JB’04]**

সমাধান: (a) $\int x(1+\sqrt{x})\, dx = \int (x + x^{\frac{3}{2}})\, dx = \int x\, dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx$

$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৫: $\int \frac{\mathbf{t^2+3t+1}}{\sqrt{\mathbf{t}}}\, \mathbf{dt}$ **নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\int \frac{t^2+3t+1}{\sqrt{t}}\, dt = \int \left(t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t} + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৬: $\int \left(\mathbf{y^2 + \frac{1}{y^2}}\right)^2 \mathbf{dy} = ?$

সমাধান: $\int \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2 dy = \int \left(y^4 + 2 + \frac{1}{y^4}\right) dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + 2y + \frac{y^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{y^5}{5} - \frac{1}{3y^3} + 2y + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৭: $\int \frac{\mathbf{t^3+1}}{\mathbf{t+1}}\mathbf{dt} = ?$

সমাধান: $\int \frac{t^3+1}{t+1}dt = \int \frac{(t+1)(t^2 - t\times 1 + 1^2)}{t+1}dt = \int (t^2 - t + 1)dt = \frac{t^{2+1}}{2+1} - \frac{t^{1+1}}{1+1} + t + c = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + c$ **(Ans.)**

Type-02: সরলীকরণ করে যোগজীকরণ (Integration after Simplification)

Concept

যদি ফাংশনে $\sin x$ অথবা $\cos x$ দ্বিঘাত ফাংশন থাকে তবে যোগজীকরণ করার আগেই তাদেরকে একঘাত করে নিতে হয়। এক্ষেত্রে নিচের সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হয়।

(i) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ (ii) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

কিছু কিছু ক্ষেত্রে এর বিপরীতটিও করা লাগতে পারে। এছাড়া, প্রয়োজনে (iii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(iv) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ (v) $\mathrm{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$ (vi) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

সূত্রগুলো ব্যবহার করতে হবে।

উদাহরণ-০৮: $\int \sqrt{\mathbf{1 - cos2x}}\, \mathbf{dx} = ?$ **[Ctg.B’12; BB’08; KU’13-14]**

সমাধান: $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx = \int \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \int \sqrt{2}\, \sin x\, dx = \sqrt{2}\int \sin x\, dx$

$= \sqrt{2}\,(-\cos x) + c = -\sqrt{2}\cos x + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৯: $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx = ?$ [JB'14]

সমাধান: $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x\ dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 dx - \int 1.\, dx = \tan x - x + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১০: $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = ?$ [Ctg.B'08; SB'10, 14; BB'09; CB'11, 13; DB'12; RB'10; Din.B'11]

সমাধান: $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

$= \int \left[\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\right] dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right] dx$

$= \int [\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x]\, dx = \tan x - \cot x + c$ **(Ans.)**

➲ বিকল্প পদ্ধতি-০১: $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \sec^2 x (1 + \cot^2 x) dx$

$= \int (\sec^2 x + \sec^2 x . \cot^2 x) dx$

$= \int \left(\sec^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} . \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$

$= \tan x - \cot x + c$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১১: $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = ?$ [JU'18-19]

সমাধান: $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} dx = \int dx = x + c$ **(Ans.)**

টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান

■ সাধারণ যোগজ নির্ণয়ের সূত্রের ব্যবহার ■ সরলীকরণ করে যোগজীকরণ

বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. $\int x^{-9} dx =$ কত? [BB'22]

(a) $-9x^{-8} + c$ (b) $-9x^{-10} + c$
(c) $-\frac{1}{10}x^{-10} + c$ (d) $-\frac{x^{-8}}{8} + c$

সমাধান: (d); $\int x^{-9} dx = \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = \frac{x^{-8}}{-8} + c$

02. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx =$ কত? [CB'22]

(a) $-\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + c$
(c) $\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + c$

সমাধান: (c); $\int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x} + c$

03. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ সমান- [Ctg.B'21]

(a) $-\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}} + c$ (b) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$
(c) $\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + c$ (d) $\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + c$

সমাধান: (b); $\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$

04. $\int 7^x dx$ সমান- [Ctg.B'21]

(a) $7^x \ln 7 + c$ (b) $\frac{7^x}{\ln 7} + c$
(c) $\frac{7^{x+1}}{x+1} + c$ (d) $x7^{x-1} + c$

সমাধান: (b); $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$

$\left[\because \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c\right]$

05. যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য- [BB'21] [Ans: d]

(i) $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, যেখানে c হল যোগজীকরণ ধ্রুবক
(ii) f(x) কে যোজ্য ফাংশন (Integrand) বলে
(iii) $\frac{d}{dx}$ ও $\int dx$ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$f(x) = x^2, g(x) = 2x$$

06. $\int g(x) dx =$ কত? [SB'19]

(a) $x + c$ (b) $2x^2 + c$ (c) $2x + c$ (d) $x^2 + c$

সমাধান: (d); $\int 2x\, dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$

প্রশ্নমালা-10.1

সমাকলন কর:

01. (i) $\int 5x^9 dx = ?$ [Ans: $\frac{1}{2}x^{10}+c$]

(ii) $\int \frac{dx}{6} = ?$ [Ans: $\frac{1}{6}x+c$]

(iii) $\int dt = ?$ [Ans: $t+c$]

(iv) $\int (4\sin x + 3\cos x)\,dx$ [Ans: $3\sin x - 4\cos x + c$]

(v) $\int \frac{x^3+4}{x^2}dx$ [Ans: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} + c$]

(vi) $\int (x^3 - 5e^x + 8)\,dx$ [Ans: $\frac{1}{4}x^4 - 5e^x + 8x + c$]

(vii) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ [Ans: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$]

(viii) $\int (x-2)^3\,dx$ [Ans: $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + c$]

02. (i) $\int \frac{a\cot x + b\tan^2 x - c\sin^2 x}{\sin x}dx$ [Ans: $-a\,\text{cosec}\,x + b\sec x + c\cos x + c$]

(ii) $\int (1 + x^{-1} + x^{-2})\,dx$ [RB'09] [Ans: $x + \ln x - \frac{1}{x} + c$]

03. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}dx = ?$ [Ans: $\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + c$]

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ [Din.B'10] [Ans: $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + c$]

04. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$ [Ans: $-\frac{1}{2}\cot x + c$]

05. (i) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$ [CB'08] [Ans: $\frac{1}{2}\tan x + c$]

(ii) $\int \sqrt{1+\cos x}\;dx$ [Ans: $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + c$]

06. (i) $\int \sqrt{1 \pm \sin x}\;dx$ [Ans: $\pm 2\left(\sin\frac{1}{2}x \pm \cos\frac{1}{2}x\right) + c$]

(ii) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}dx$ [Ans: $\pm(\sin x - \cos x) + c$]

07. (i) $\int (\sec x\tan x - 3\,\text{cosce}^2 x)\,dx$ [Ans: $\sec x + 3\cot x + c$]

(ii) $\int \frac{\sin x - \text{cosec}\,x}{\tan x}dx.$ [Ans: $\sin x + \text{cosec}\,x + c$]

(iii) $\int \text{cosec}\,x\,(\text{cosec}\,x - \cot x + \sin x)dx.$ [Ans: $-\cot x + \text{cosec}\,x + x + c$]

08. (i) $\int \sec x\,(\sec x - \tan x)\,dx$ [BB'13[Ans: $\tan x - \sec x + c$]

(ii) $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$ [Ans: $2(\tan x + \sec x) - x + c$]

(iii) $\int (\cot^2 7x + \sec^2 9x)dx$ [Ctg.B'19] [Ans: $-\frac{1}{7}\cot 7x - x + \frac{1}{9}\tan 9x + c$]

09. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}(1 - \sin 2x)\,dx$ [Ans: $\frac{1}{2}\sin 2x + c$]

10. $\int \frac{d\theta}{5\tan^2\theta}$ [Ans: $\frac{-1}{5}(\cot\theta + \theta) + c$]

> গভীর দৃষ্টিতে দেখলে একটি সফল দিনের পেছনে অসংখ্য পরিশ্রমী দিন দেখতে পাবে।
>
> Steve Jobs

নিজে করো

01. $\int \frac{\sin(\sin(\ln x))\cos(\sin(\ln x)).\cos(\ln x)}{x}dx$ **[Ans: $-\frac{1}{4}\cos(\sin(\ln x))+c$]**

02. $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+5x^2+4x-10}$ **[Ans: $\tan^{-1}(x+3)+c$]**

03. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=?$ **[Ans: $e^{x+\frac{1}{x}}+c$]**

04. $\int\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=?$ **[Ans: $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$]**

05. $\int\left(2^{2^{2^x}}\right)^5 2^{2^x}2^x dx=?$ **[Ans: $\frac{\left(2^{2^{2^x}}\right)^5}{5(\ln 2)^3}+c$]**

06. $\int\left(e^{e^{e^x}}\right)^4 e^{e^x}e^x dx=?$ **[Ans: $\frac{\left(e^{e^{e^x}}\right)^4}{4}+c$]**

Type-04: $\int\sin Ax\cos Bx\,dx$, $\int\sin Ax\sin Bx\,dx$, $\int\cos Ax\cos Bx\,dx$ আকৃতির

Concept

sin ও cos এর ফাংশন গুণাবস্থায় থাকলে এর যোগজীকরণ করার সাধারণ কোনো সূত্র নেই, তবে sin ও cos ফাংশনের গুণাকৃতিকে যোগাবস্থায় নিলে আলাদা আলাদা করে sin বা cos ফাংশনকে যোগজীকরণ করা যায়। তাই,

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

সূত্র ব্যবহার করে sin ও cos ফাংশনকে গুণাবস্থা থেকে যোগাবস্থায় নিতে হবে।

চলো একটি উদাহরণ দেখি:

উদাহরণ-২৪: $\int\sin 5x\sin 3x\,dx$

সমাধান: $\frac{1}{2}\int 2\sin 5x.\sin 3x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)\,dx$

$=\frac{1}{2}.\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sin 8x}{8}+c$

$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

উদাহরণ-২৫: $\int 4\cos 4x\sin 5x\,dx$

সমাধান: $2\int(\sin 9x+\sin x)\,dx$

$=2\left(-\frac{\cos 9x}{9}-\sin x\right)dx+c$

$=-\frac{2}{9}(\cos 9x+9\cos x)+c$

উদাহরণ-২৬: $\int 7\sin 4x\sin 2x\,dx=?$

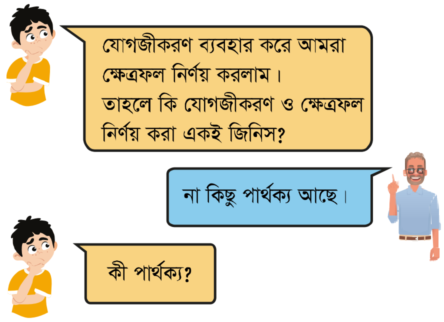
সমাধান: $\int 7\sin 4x\sin 2x\,dx=\frac{7}{2}\int 2\sin 4x\sin 2x\,dx$

$=\frac{7}{2}\int\{\cos(4x-2x)-\cos(4x+2x)\}\,dx$ [গুণাবস্থা থেকে যোগাবস্থায় নেওয়া হলো]

$=\frac{7}{2}\int\cos 2x\,dx-\frac{7}{2}\int\cos 6x\,dx=\frac{7}{2}\frac{\sin 2x}{2}-\frac{7}{2}\times\frac{\sin 6x}{6}+c$ [আলাদা আলাদা করে যোগজীকরণ করা হলো]

$=\frac{7}{12}[3\sin 2x-\sin 6x]+c$

যোগজীকরণ ও ক্ষেত্রফলের মধ্যে পার্থক্য (Difference between Integration and Area)



10.6 অধ্যায় আমরা তোমাদেরকে বলেছিলাম যোগজীকরণ দ্বারা Net signed Area বের করা হয় এবং যোগজীকরণ এবং ক্ষেত্রফল হুবহু একই জিনিস নয়। এই অধ্যায়ে একটু ভিন্ন আঙ্গিকে ঐ বিষয়টি আমরা আলোচনা করবো।

যোগজীকরণ ব্যবহার করে যদিও আমরা ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি, কিন্তু তাদের মধ্যের পার্থক্য বোঝার জন্য চলো দুইটি সমস্যা নিয়ে আলোচনা করি। এগুলো হলো:

(i) $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ এর মধ্যে $\sin x$ এর নির্দিষ্ট (definite) যোগজ কত?

(ii) $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত $y = f(x) = \sin x$ এবং x অক্ষের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল কত?

তোমার কাছে কি মনে হয়? দুইটি প্রশ্নের উত্তর কি একই হবে? সমাধানটা দেখার আগে একবার নিজে চিন্তা করো তো, তারপর তোমার চিন্তার সাথে সমাধানটি মিলানোর চেষ্টা করো।

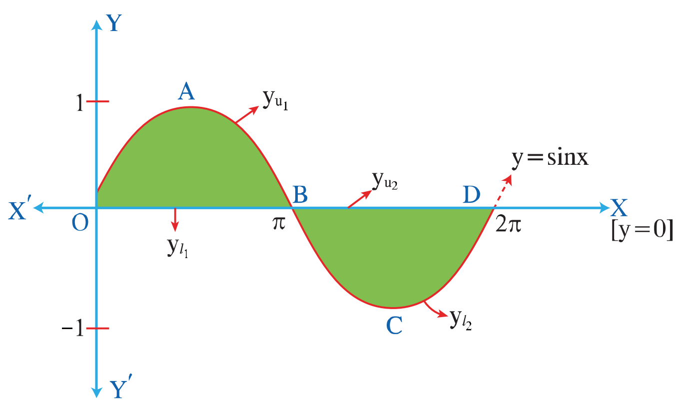
(i) সমাধান: $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ এর মধ্যে $\sin x$ এর নির্দিষ্ট (definite) যোগজ

$= \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -[\cos x]_0^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0]$

$= -[1-1] = -0 = 0 \therefore \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$

অর্থাৎ $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত $y = \sin x$ এর নির্দিষ্ট যোগজের মান 0. আমরা কিন্তু ঠিকঠাক যোগজীকরণ করেছি। কোন ভুল করিনি। অর্থাৎ, এই যোগজীকরণের মান যে 0 হবে তাতে কোন সন্দেহ নেই। কিন্তু $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত $y = f(x) = \sin x$ এবং x অক্ষ $[y = 0]$ এর মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল কি 0? এসো (ii) নং সমস্যাটি সমাধান করার চেষ্টা করি।

(ii) সমাধান: এটি সমাধান করার আগে আমাদেরকে $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত $y = \sin x$ এর লেখচিত্র আঁকতে হবে। চলো এঁকেই ফেলি।



চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে $x = 0$ থেকে $x = 2\pi$ পর্যন্ত $y = \sin x$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 0 নয়। চিত্র থেকে আরো দেখা যাচ্ছে OAB অংশের জন্য $[x = 0$ থেকে $x = \pi$ পর্যন্ত$]$ $y = \sin x$ এর y মান, x অক্ষের $[y = 0$ এর$]$ y এর মান অপেক্ষা বড়। অর্থাৎ $y = \sin x$, x অক্ষ বা $y = 0$ এর উপরে আছে।

$\therefore x = 0$ থেকে $x = \pi$ পর্যন্ত x –অক্ষের সাপেক্ষে upper curve, $y_{u_1} = \sin x$ এবং lower curve, $y_{l_1} = 0$.

07. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b-c}^{a-c} f(x+c)dx$

08. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b+c}^{a+c} f(x-c)dx$

09. $f(-x) = f(x)$ হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

10. $f(-x) = -f(x)$ হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Special Tips: Walli's theorem: [MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ]

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\dots\dots\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}$ [n = জোড় পূর্ণসংখ্যা হবে]

যেমন: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\dots\dots.\frac{2}{3}$ [n = বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হবে]

যেমন: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{5-1}{5}.\frac{5-3}{5-2} = \frac{8}{15}$

➲ ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত:

01. $y = f(x)$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y\,dx$

02. $x = f(y)$ এবং y-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b x\,dy$

03. দুটি বক্ররেখা এবং y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b (y_u - y_l)\,dx$

Shortcut:

04. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2$ বর্গ একক।

05. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A = \pi ab$ বর্গ একক।

06. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

07. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4by$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{16}{3}ab$ বর্গ একক।

08. $y^2 = 4ax$ বক্ররেখা এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{8}{3}a^2$ বর্গ একক।

গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম (Important Practice Problem)

MCQ

01. $\int_0^1 xe^{x^2} dx = ?$
(a) e^{-1} (b) $\frac{1}{2}(e-1)$
(c) $e+1$ (d) $\frac{1}{2}(e+1)$

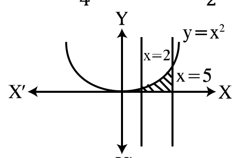
02. $\int \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}} dx = ?$
(a) $e^{4x}+c$ (b) $\frac{1}{4}e^{4x}+c$
(c) $4e^{4x}+c$ (d) $4e^x+c$

03. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{16a^2}{3}$ (b) $\frac{32a^2}{3}$ (c) $16a^3$ (d) $\frac{32}{2}a^{\frac{3}{2}}$

04. $f(x) = \ln 2x$ হলে, $\int f(x)\,dx$ এর মান কোনটি?
(a) $2(x\ln 2x + x) + c$ (b) $2(x\ln 2x - x) + c$
(c) $x\ln 2x + x + c$ (d) $x\ln 2x - x + c$

05. $f(x) = x, \emptyset(x) = e^x; \int f(x)\emptyset(x)\,dx = ?$
(a) $xe^x + e^x + c$ (b) $xe^x - e^x + c$
(c) $\frac{x^2e^x}{2} + c$ (d) $x^2e^x + c$

06. $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$ কত?
(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$ (c) $\frac{e}{2}+\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$

07. 

ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল কত?
(a) 93 (b) 46 (c) 39 (d) 33

08. $\int \frac{dx}{2x\sqrt{\ln 2x}} = ?$
(a) $2\sqrt{\ln 2x} + c$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2x} + c$
(c) $\sqrt{\ln 2x} + c$ (d) $\ln 2x + c$