প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

তৃতীয় অধ্যায়: সরলরেখা

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরিফ, ফয়সাল ও আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: আগস্ট, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
৩৫০/-
(তিনশত পঞ্চাশ টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় ***উদ্ভাসের*** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে ‘বোর্ড বই’-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় ‘সতর্কতার’ মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে ‘টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান’। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে ‘গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম’ ও ‘গাণিতিক সমস্যাবলি’ যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায় ০৩: সরলরেখা

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

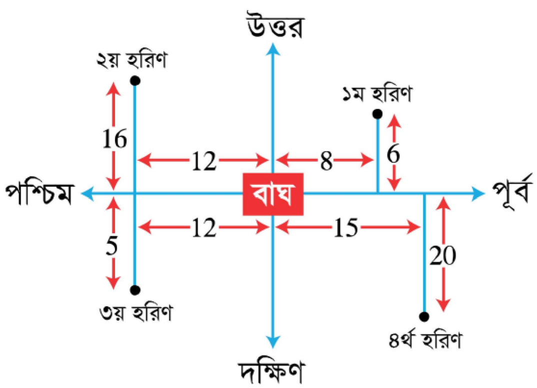
উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-03, Bangla Version, Page-12, Question-08, দেওয়া আছে, (0,5) কিন্তু হবে (5,5)

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

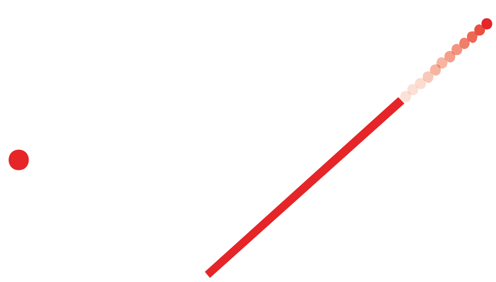
শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৩ সরলরেখা

মনে কর, ঝোঁপের আড়ালে লুকিয়ে থাকা একটি বাঘ, হরিণ ধরার প্রস্তুতি নিচ্ছে। বাঘ থেকে 8 মিটার পূর্ব দিকে গিয়ে 6 মিটার উত্তর দিকে গেলে ১ম হরিণকে পাওয়া যায়। আবার বাঘ থেকে 12 মিটার পশ্চিমে গিয়ে 16 মিটার উত্তরে গেলে ২য় হরিণকে পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে বাঘ থেকে 12 মিটার পশ্চিমে গিয়ে 5 মিটার দক্ষিণে গেলে ৩য় হরিণ এবং 15 মিটার পূর্বদিকে গিয়ে



20 মিটার দক্ষিণে গেলে ৪র্থ হরিণ পাওয়া যায়। বাঘটির লক্ষ্য সবচেয়ে কাছের হরিণকে ধরতে পারা। হঠাৎ করে বাঘটি ৩য় হরিণকে ধরার জন্য সরাসরি হরিণের দিকে দৌঁড়ানো শুরু করলো। তুমি কী বলতে পারবে বাঘের সিদ্ধান্ত সঠিক ছিল কি না? তোমরা সমস্যাটি নিয়ে ভাবতে থাকো এবং চলো ততক্ষণে আমরা স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা সম্পর্কে ধারণা নিই।



স্থির বিন্দু   সোজা পথে চলমান বিন্দু

সবাইকে সরলরেখার দুনিয়ায় স্বাগতম। সরলরেখা জ্যামিতির একটি মৌলিক অংশ। একটি বিন্দু যখন সোজা বা সরল পথে চলে এবং দিক পরিবর্তন করে না তখন তার চলার পথ সরলরেখা নির্দেশ করে। অন্যভাবে বললে, একটি সরলরেখার উপরস্থ বিন্দুগুলোর অবস্থান সোজাভাবে থা তোমরা বুঝতেই পারছো রেখার ক্ষেত্রে বিন্দুর ধারণা অনেক গুরুত্বপূর্ণ। একটি সমতলে বিন্দুর অবস্থানকে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। তাই এই অধ্যায়ের শুরুতেই আমরা স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা নিয়ে আলোচনা করবো। কিন্তু তার আগে চলো সরলরেখার সংক্ষিপ্ত ইতিহাস সম্পর্কে জেনে নেই।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস (Brief History)

জ্যামিতি হলো গণিতের একটি অতি প্রাচীন শাখা। আভিধানিক অর্থে 'জ্যা' অর্থ হলো ভূমি বা স্থান এবং 'মিতি' অর্থ হলো পরিমাপ। অর্থাৎ, জ্যামিতি অর্থ হলো ভূমির পরিমাপ। মূলত কৃষি ভূমির পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা হতেই জ্যামিতির উৎপত্তি। খ্রিষ্টপূর্ব 3000 অব্দ থেকে Mesopotamia (বর্তমান ইরাক), Egypt (বর্তমান মিশর) এবং সিন্ধু উপত্যকায় কৃষি ভূমির সীমানা সংক্রান্ত জরিপের মধ্য দিয়েই সর্বপ্রথম জ্যামিতির সূত্রপাত হয়। জ্যামিতির একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ হলো সরলরেখা।


Euclid

গ্রিক দার্শনিক ইউক্লিড খ্রিষ্টপূর্ব 300 অব্দে সরলরেখার ধারণাটিকে একটি সুবিন্যস্ত বৈজ্ঞানিক কাঠামোতে রূপান্তরিত করেন এই কারণে ইউক্লিডকে জ্যামিতির জনক বলা হয়। ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতে রেখা একটি মৌলিক ধারণা। ইউক্লিডই প্রথম রেখাকে 'প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য' হিসেবে সংজ্ঞায়িত করেন মূলত রেখা হলো অবিরত বিন্দুর সেট যা ইচ্ছামতো যেকোনো দিকে বর্ধিত করা যায় অন্যভাবে বললে, রেখা হলো কোনো পথ যা একটি চলমান বিন্দুর সঞ্চারণের দ্বারা সৃষ্ট।

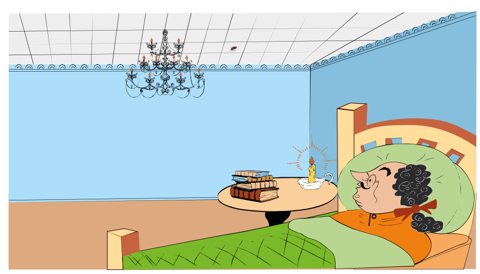

Rene Descartes

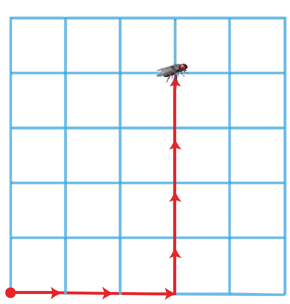

Pierre De Fermat

সপ্তদশ শতকের প্রথমার্ধে জ্যামিতির সঙ্গে বীজগণিতের সম্পর্ক স্থাপন এবং বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির প্রয়োগ সফলতার সাথে তুলে ধরেন ফরাসি গণিতবিদ Rene Descartes (রেনে দেকার্তে)। পরবর্তীতে ফরাসি গণিতবিদ Pierre de Fermat দেকার্তের সৃষ্ট পথে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির অবতারণা করেন।

স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা ও দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Co-ordinate system and distance between two points)

Rene Decartes-এর অবদান স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অনস্বীকার্য। বিখ্যাত এই গণিতবিদকে নিয়ে একটি গল্প প্রচলিত আছে দেকার্তে একদিন ক্লান্ত, পরিশ্রান্ত হয়ে বাসায় এসেই বিছানায় শুয়ে পড়েন। কিন্তু ঘুম আসছিল না! কি আর করার, তিনি সিলিং বরাবর তাকিয়ে আছে বেশ কয়েকদিন আগেই ঘরের সিলিং ঠিক করা হয়ে সিলিং এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর লম্বালম্বি ভাবে কতগুলো দাগ ছিল যার কারণে সম্পূর্ণ সিলিং টিতে সমান আকৃতির কতগুলো বর্গের সৃষ্টি হয়। হঠাৎ বিছানায় শুয়ে থাকা অবস্থায় তিনি একটি মাছি উড়ঁতে দেখেন। উড়ন্ত মাছিটি একসময় ঘরের সিলিং এ স্থির হয়। তিনি দেখেন মাছিটি সিলিং এর কোন এক বর্গের একটি শীর্ষবিন্দুতে বসেছে।



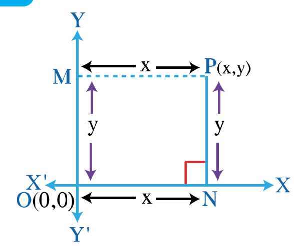


তখনই দেকার্তের মাথায় চিন্তা এলো যে, এই মাছির অবস্থান সবচেয়ে ভালোভাবে কীভাবে ব্যাখ্যা করা যায়? তিনি প্রথমে ঘরের একটি কর্ণার সংলগ্ন পরস্পর লম্ব বাহুদ্বয়কে দুইটি অক্ষ হিসেবে চিন্তা করেন। এই দুই বাহুদ্বয় যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু (যাকে আমরা মূলবিন্দু বলি) থেকে 3 ঘর বা 3 টি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমপরিমাণ দূরত্ব ডানে আসেন তারপর 4 ঘর উপরেই সেই মাছির অবস্থান। তিনি চিন্তা করেন, একইভাবে সিলিংয়ের প্রত্যেকটি বিন্দুতেই পৌছানো সম্ভব। হ্যাঁ। আসলেই সম্ভব। আমরা একটি সমতলকে দুইটি কাল্পনিক লম্ব রেখার সাপেক্ষে (যাদের আমরা x ও y অক্ষ বলি) ব্যাখ্যা করতে পারি। রেনে দেকার্তে এর এই চিন্তা থেকেই পরবর্তীতে কার্তেসিয়ান ব্যবস্থার উৎপত্তি। কোনো বিন্দুতে ঠিকঠাক পৌঁছাতে হলে সেই বিন্দুকে প্রথমে চিহ্নিত করতে হয়। এভাবে কোনো বিন্দু বা অবস্থানকে চিহ্নিত করার উপায় হল স্থানাঙ্ক।

স্থানাঙ্ক:
স্থানাঙ্ক হলো 'স্থান' কে অঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশের পদ্ধা অর্থাৎ, কোন সমতলে (দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে) কোন বিন্দুর অবস্থানকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করার পদ্ধতিই হলো স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা

স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার প্রকারভেদ: দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে, স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা ২ প্রকা যথা:
(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (ii) পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (Cartesian Co-ordinate System)



মনে করি, চিত্রে XOX' এবং YOY' দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করেছে। তাহলে (আনুভূমিক) XOX' কে x- অক্ষ, (উলম্ব) YOY' কে y- অক্ষ এবং O কে মূলবিন্দু বলা হয়। XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয়কে আয়ত অক্ষ (Rectangular Axes) বা প্রসঙ্গ কাঠামো (Reference Frame) বলা হয় এবং প্রাপ্ত সমতলকে বলা হয় কার্তেসীয় সমতল। এখন, P যদি উক্ত সমতলে কোন একটি বিন্দু হয় তাহলে P হতে x ও y অক্ষের উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব অঙ্কন করা যায়

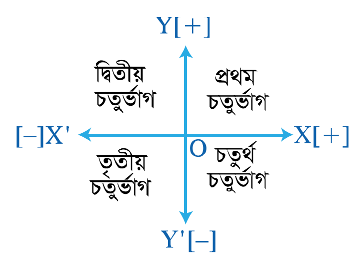
এখন, y অক্ষ থেকে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= PM = ON = x$ (ধরি)
এবং x অক্ষ থেকে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= PN = OM = y$ (ধরি)
x কে বলা হয় P বিন্দুর ভুজ (abscissa) বা x-স্থানাঙ্ক এবং y কে বলা হয় P বিন্দুর কোটি (ordinate) বা y-স্থানাঙ্ক। P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক হলো (x, y). অর্থাৎ,

যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুইটি পরস্পরচ্ছেদী লম্ব সরলরেখাকে x-অক্ষ (আনুভূমিক রেখা) এবং y-অক্ষ (উলম্ব রেখা) বিবেচনা করে যথাক্রমে y ও x অক্ষ হতে কোন একটি বিন্দুর লম্ব দূরত্বকে বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশক Parameter হিসেবে ব্যবহার করা হয়, তাকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলে।

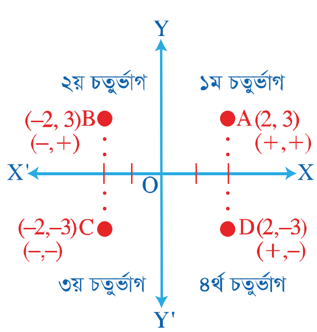
যেহেতু মূলবিন্দু O হলো অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু। ∴ উভয় অক্ষ হতে O বিন্দুর দূরত্ব 0. **তাই মূলবিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $O(0, 0)$.**

কার্তেসীয় সমতলের চারটি চতুর্ভাগ এবং চিহ্নের প্রথা:

কার্তেসীয় সমতলকে x এবং y অক্ষ চারটি ভাগে ভাগ করে। এগুলো হলো: $XOY, X'OY, X'OY'$ এবং XOY'. এই ভাগগুলোকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ (Quadrant) বলা হয়। ডানপাশে চিত্রের মাধ্যমে বিষয়টি পরিষ্কারভাবে উপস্থাপন করার চেষ্টা করা হলো:



কার্তেসীয় সমতলের মূলবিন্দুর সাপেক্ষে,
(a) x অক্ষের ডান দিককে ধনাত্মক (+ve) এবং বাম দিককে ঋণাত্মক (−ve)
(b) y অক্ষের উপরের দিককে ধনাত্মক (+ve) এবং নিচের দিককে ঋণাত্মক (−ve) বিবেচনা করা হয়।



অর্থাৎ, যেকোনো চারটি বিন্দু যদি y অক্ষ হতে 2 এবং x অক্ষ হতে 3 একক দূরত্বে যদি যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে, তাহলে বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হবে। নিম্নরূপ:
$A(2, 3)$ [১ম চতুর্ভাগে], $B(-2, 3)$ [২য় চতুর্ভাগে],
$C(-2, -3)$ [৩য় চতুর্ভাগে], $D(2, -3)$ [৪র্থ চতুর্ভাগে]

অর্থাৎ, 4 টি ভিন্ন চতুর্ভাগে ভুজ এবং কোটির চিহ্নগুলো নিম্নরূপ:

চতুর্ভাগ	ভুজের চিহ্ন	কোটির চিহ্ন
প্রথম	$(+)$	$(+)$
দ্বিতীয়	$(-)$	$(+)$
তৃতীয়	$(-)$	$(-)$
চতুর্থ	$(+)$	$(-)$

তাহলে এখন চিন্তা করো, ২য় চতুর্ভাগে থাকা $B(-2,3)$ বিন্দুর ক্ষেত্রে যদি তোমাকে জিজ্ঞাসা করা হয়, B বিন্দু থেকে y অক্ষের দূরত্ব কতো? উত্তর কী -2 হবে? উত্তর হলো: না দূরত্ব কখনো ঋণাত্মক হয় না। অর্থাৎ y-অক্ষ হতে দূরত্ব 2-ই আছে, কিন্তু শুধুমাত্র x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে আছে তা বোঝানোর জন্য 2 এর সামনে $(-)$ চিহ্ন দেওয়া হয়েছে। অর্থাৎ, কোন বিন্দুর ভুজ বা কোটির মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে কিন্তু অক্ষদ্বয় হতে দূরত্ব যেহেতু সর্বদা ধনাত্মক হতে হবে তাই পরমমান চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়।

জেনে রাখো

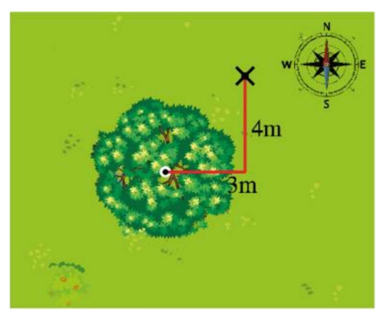
কোন একটি বিন্দুর, y অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব $=$ | বিন্দুটির ভুজ | $= |x|$ এবং x অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব $=$ | বিন্দুটির কোটি | $= |y|$

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ও সেটের সম্পর্ক:

$\mathbb{R}$ দ্বারা বাস্তব সংখ্যার সেট সূচিত করলে $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ক্রমজোড়ের সেট প্রকাশ করে। $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ কে কার্তেসীয় গুণজ সেট বলা হয়। সুতরাং ক্রমজোড়ের সেটটি অসীম সেট, কারণ বাস্তব সংখ্যা অসংখ্য। এখন ক্রমজোড় (a, b) এর প্রথম উপাদান 'a' দ্বারা কার্তেসীয় সমতলের কোন বিন্দুর x স্থানাঙ্ক (বা ভুজ) এবং দ্বিতীয় উপাদান 'b' দ্বারা ঐ বিন্দুর y স্থানাঙ্ক (বা কোটি) নির্দেশ করলে ক্রমজোড়ের সেটটি দ্বারা কার্তেসীয় সমতলের সব বিন্দুর সেট সূচিত করে অর্থাৎ, কার্তেসীয় সমতলটি হলো কার্তেসীয় গুণজ সেট, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

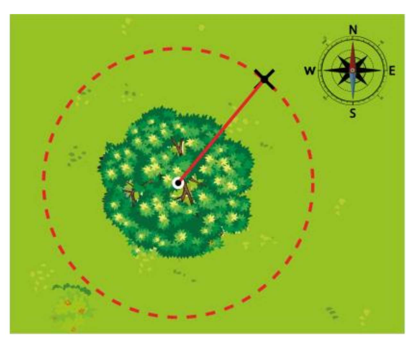
পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (Polar co-ordinate system)

মনে কর, তুমি এবং তোমার বন্ধুরা মিলে একটা খেলা খেলবে। তার জন্য তুমি একটা ছোট বাক্স নিয়ে অনেকগুলো চকলেট দিয়ে ভর্তি করলে। এরপর এই বাক্সটা নিয়ে তুমি একটা খোলা মাঠে গেলে এবং তা একটা গর্তের মধ্যে রেখে মাটি দিয়ে ঢেকে দিলে এখন তোমার মাথায় চিন্তা আসলো যে তুমি কিভাবে এই গর্তটার অবস্থান নির্দেশ করতে পারো। তুমি দেখলে যে মাঠের মাঝখানে একটা প্রকাণ্ড বটগাছ আছে। তা দেখেই তোমার মনে হলো যে এটাকে যদি প্রসঙ্গ কাঠামো হিসেবে ধরি তাহলে কিন্তু মন্দ হয় না।



Cartesian format

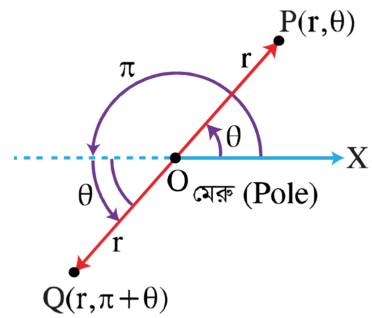
এরপর তুমি হিসেব করে দেখলে যে ঐ গর্তটার অবস্থান বটগাছে থেকে 3 মিটার পূর্বে এবং 4 মিটার উত্তরে। এই পদ্ধতিটা কি একটু পরিচিত মনে হচ্ছে না? হ্যাঁ, ঠিকই ধরেছো। এটা হলো আমাদের সবার প্রিয় "কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা"।



Polar format

আচ্ছা, তুমি কি আর কোনোভাবে গর্তটার অবস্থান নির্দেশ করতে পারো? তুমি হয়তো পিথাগোরাসের কণ্ঠে কণ্ঠ মিলিয়ে বলবে যে "গর্তটা তো গাছ থেকে 5 মিটার দূরে অবস্থিত।" তাহলে বটগাছ থেকে 5 মিটার দূরে গেলে চকলেটের বাক্স পাওয়া যাবে। কিন্তু এইটুকু তথ্য কি পর্যাপ্ত? উত্তর হলো, না! কারণ, গাছ থেকে 5 মিটার দূরে তো অনেকভাবে যাওয়া যায়। (গাছকে কেন্দ্র করে একটা 5 মিটার ব্যাসার্ধের বৃত্তের কথা চিন্তা করতে পারো।) তাহলে, গর্তটার অবস্থান নির্দিষ্ট করার জন্য আমাদের আরেকটা নির্দেশক প্রয়োজন। ধরো, আমরা গাছটা থেকে শুরু করে একটা লম্বা দাগ টানলাম। এরপর গাছ থেকে গর্ত পর্যন্ত আরেকটা দাগ টানলাম। তারপর এই দুটো দাগের মধ্যে উৎপন্ন কোণটা মেপে দেখলাম। লক্ষ করে দেখো, গাছ থেকে গর্ত পর্যন্ত যে দাগটা তুমি টেনেছো তা কিন্তু গর্তের অবস্থান পরিবর্তনের সাথে মূল দাগটার সাথে (যেটা প্রথমে আঁকা হয়েছিল) উৎপন্ন কোণটা পরিবর্তন করে। অর্থাৎ, এই কোণ-টাকে কিন্তু আমরা একটা নির্দেশক হিসেবে ব্যবহার করতে পারি। এভাবে, গাছটাকে যদি মূলবিন্দু ধরি এবং গাছ থেকে গর্ত পর্যন্ত অঙ্কিত দাগকে যদি ব্যাসার্ধ ধরি তাহলে এই "ব্যাসার্ধ" এবং "কোণ" নিয়ে একটা নতুন স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা তৈরি করলে কেমন হয়?

মনে করি, চিত্রে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। **O বিন্দুকে মেরুবিন্দু বা প্রান্তবিন্দু বা পোল (Pole) বলা হয়।** OX কে আদিরেখা বা মূল রেখা (Initial line) বলা হয় সমতলে অবস্থিত যেকোনো একটি বিন্দু P.



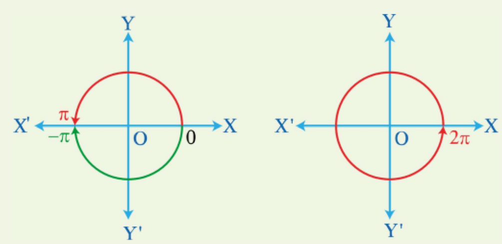
মেরু O হতে P এর দূরত্ব, $OP = r$ $[r \geq 0]$ এবং আদিরেখা OX এর সাথে OP রেখাটি $\angle XOP = \theta$ কোণে আনত থাকলে P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক হলো (r, θ). এখানে r হলো ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) এবং θ হলো ভেক্টোরিয়াল কোণ (Vectorial Angle). এখানে পোল O হলো কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মূলবিন্দু এবং OX রেখা হলো কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের x-অক্ষের প্রতিরূপ। অর্থাৎ,

যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (পোল) থেকে দূরত্ব এবং কোন একটি নির্দিষ্ট রেখার সাথে উৎপন্ন কোণকে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশক parameter হিসেবে ব্যবহার করা হয়, তাকে পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলে।

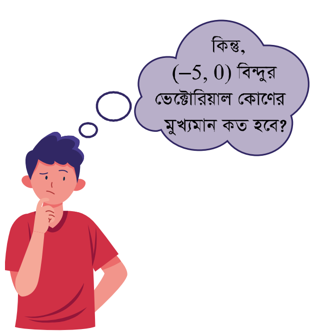
OX রেখার সাথে উৎপন্ন কোণ θ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে পরিমাপ করা হলে তাকে ধনাত্মক (+ve) এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে পরিমাপ করা হলে তাকে ঋণাত্মক কোণ ধরা হয় আবার, P বিন্দুর ঠিক বিপরীত দিকে অবস্থিত Q বিন্দুর পোল O হতে দূরত্ব r এবং OX এর সাথে উৎপন্ন ধনাত্মক কোণ $\pi + \theta$. $\therefore$ Q বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক হবে $(r, \pi + \theta)$.

জেনে রাখো

একটি বিন্দুর অসংখ্য পোলার স্থানাঙ্ক থাকতে পারে। কারণ যদিও একটি বিন্দুর পোল থেকে দূরত্ব নির্দিষ্ট, কিন্তু OX এর সাথে উৎপন্ন অসংখ্য কোণ (ত্রিকোণমিতিক কোণ) পাওয়া সম্ভব। যেমন আগের চিত্রে P বিন্দুর ভেক্টোরিয়াল কোণ $-6\pi + \theta, -4\pi + \theta, -2\pi + \theta, \theta, 2\pi + \theta, 4\pi + \theta, 6\pi + \theta, \ldots\ldots$ ইত্যাদি হতে পারে সাধারণভাবে P বিন্দুর ভেক্টোরিয়াল কোণকে $\theta + 2n\pi$ $[n \in \mathbb{Z}]$ আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে।

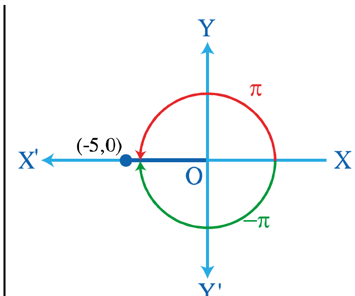


কিন্তু পোলার স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে ভেক্টোরিয়াল কোণের মান $-\pi < \theta \leq \pi$ অথবা $0 \leq \theta < 2\pi$ সীমার মধ্যে ধরা হয় **$-\pi < \theta \leq \pi$ সীমার মধ্যে প্রাপ্ত মানগুলোকে ভেক্টোরিয়াল কোণের মুখ্যমান (Principal Value) বলা হয়** কারণ সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর জন্যই এই সীমার মধ্যে প্রাপ্ত ভেক্টোরিয়াল কোণের সাংখ্যিক মানটি সবচেয়ে ছোট হয়। এখানে মুখ্যমান বলতে ক্ষুদ্রতম মান বোঝানো হচ্ছে।



$(-5, 0)$ বিন্দুর ভেক্টোরিয়াল কোণের জন্য π বা $-\pi$ দুটোই সর্বনিম্ন সাংখ্যিক মান হয়। শুধু দিকের কারণে একটি ধনাত্মক এবং আরেকটি ঋণাত্মক এমন অবস্থায়, আমরা ধনাত্মক মানকে ভেক্টোরিয়াল কোণের মুখ্যমান হিসেবে নিবে

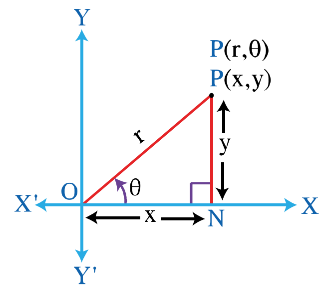
$\therefore$ $(-5, 0)$ বিন্দুর ভেক্টোরিয়াল কোণের মুখ্যমান π।



স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার রূপান্তর সংক্রান্ত (Related to Conversion of Co-ordinate system)

পোলার ও কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার মধ্যে সম্পর্ক:

মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু (Origin) বা মেরুবিন্দু (Pole)। এই সমতলে যেকোনো একটি বিন্দু P। P বিন্দুর কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (r, θ)। এখন, P হতে x-অক্ষের উপর PN লম্ব আঁকি O, P যোগ করি। তাহলে, $ON = x, PN = y$ এবং $OP = r, \angle XOP = \angle NOP = \theta$.
[স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার ক্ষেত্রে সমতলে কোন বিন্দু দেখলেই আমরা বিন্দুটি থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব টেনে থাকি। কারণ তাহলে ঐ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক পাওয়া যায়।]



এখন, ΔOPN সমকোণী।

$\therefore \cos\theta = \frac{ON}{OP} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \therefore x = r\cos\theta$ ... ... (i)

এবং $\sin\theta = \frac{PN}{OP} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r} \therefore y = r\sin\theta$ ... ... (ii)

এখন, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $OP^2 = ON^2 + PN^2 \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ... ... (iii)

আবার, $\frac{PN}{ON} = \tan\theta \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ... ... (iv)

(i), (ii), (iii) ও (iv) কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। কিন্তু 4 টি চতুর্ভাগে θ এর মান নির্ণয় করার জন্য (iv) নং সমীকরণ যথেষ্ট নয়

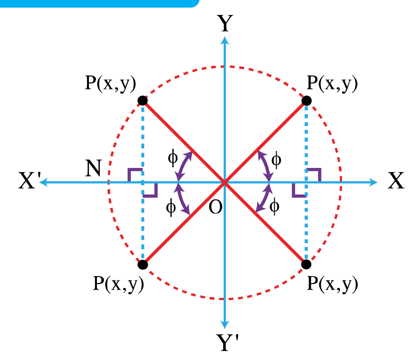
যেমন: $(3, \sqrt{3})$ এবং $(-3, -\sqrt{3})$ বিন্দু দুটোর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের উভয়ের জন্য, $r = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

আবার (iv) নং সূত্রানুযায়ী প্রথম বিন্দুর জন্য, $\theta_1 = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$ দ্বিতীয় বিন্দুর জন্য, $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{-3} = 30°$

কিন্তু, বিন্দু দুটি ভিন্ন হওয়ায় তাদের পোলার স্থানাঙ্ক ও অবশ্যই ভিন্ন হবে। অর্থাৎ, θ_1 এবং θ_2 সমান হতে পারে না। এই সমস্যা সমাধানের উদ্দেশ্যে 4টি চতুর্ভাগের জন্য নিম্নলিখিত উপায়সমূহ ব্যবহার করে আমরা θ এর মান নির্ণয় কর

বিভিন্ন চতুর্ভাগে θ এর মানসমূহ (Values of θ in 4 quadrants)

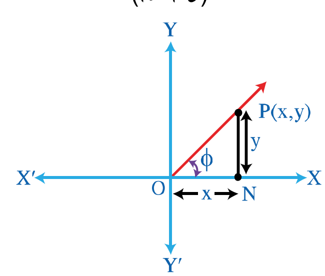
$P(x, y)$ একটি বিন্দু। x ও y এর মান বিন্দুটির অবস্থানের উপর নির্ভর করে + বা − হতে পারে এবং একই সাথে $P(x, y)$ বিন্দুটিও চারটি চতুর্ভাগে অবস্থান করতে পারে (চিত্র-১)।



(চিত্র-১)

ধরি, $P(x, y)$ বিন্দু ১ম চতুর্ভাগে আছে। সুতরাং x ও y এর মান ধনাত্মক হবে। এখন $P(x, y)$ বিন্দু হতে x অক্ষের উপর একটি লম্ব (PN) অঙ্কন করি। সুতরাং ΔOPN একটি সমকোণী ত্রিভুজ যেখানে ϕ একটি সূক্ষ্মকোণ। (চিত্র-2)

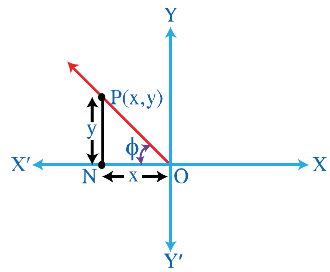
$\therefore \tan\phi = \frac{PN}{ON} = \frac{y}{x} \therefore \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$



(চিত্র-২)

কিন্তু $P(x, y)$ ২য় চতুর্ভাগে থাকলে x এর মান ঋণাত্মক হয় (চিত্র-৩)। এতে, $\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ সূত্রে, ϕ এর মান বা $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ এর মান ঋণাত্মক হবে। কিন্তু, আমরা শুধু সূক্ষ্মকোণের মান (অর্থাৎ, ϕ এর মান ধনাত্মক মান) নির্ণয় করতে চাচ্ছি। সূক্ষ্মকোণের জন্য tan এর মান ধনাত্মক হয়। তাই, $\frac{y}{x}$ কে $\left|\frac{y}{x}\right|$ আকারে প্রকাশ করলে (বা পরম মান চিহ্ন দিলে) ϕ এর মান ধনাত্মক হবে বা শুধু সূক্ষ্মকোণের মান বের করা সম্ভব হবে।

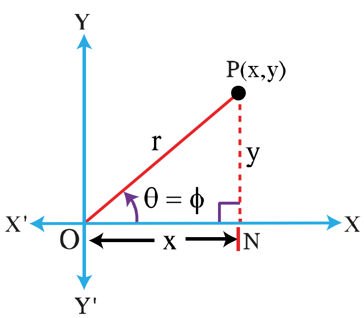
$$\therefore \phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$$



(চিত্র-৩)

একইভাবে, ৩য় ও ৪র্থ চতুর্ভাগের ক্ষেত্রেও $P(x, y)$ দরুণ সৃষ্ট সমকোণী ত্রিভুজে অন্তঃস্থ সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়, $\phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ এখন আমরা $P(x, y)$ বিন্দুর দরুণ সৃষ্ট OP রশ্মির, OX স্থির রশ্মির সাপেক্ষে ঘূর্ণনের কথা মাথায় রেখে প্রতিটি চতুর্ভাগে θ বা ভেক্টোরিয়াল কোণের মান নির্ণয় করবো।

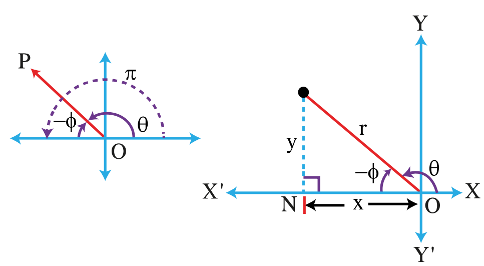
১ম চতুর্ভাগে:



চিত্রে, $\frac{PN}{ON} = \left|\frac{y}{x}\right| = \tan\phi = \tan\theta$

$\therefore \theta = \phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

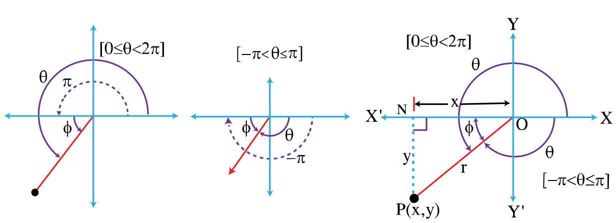
২য় চতুর্ভাগে:



এখানে, $\theta = \pi - \phi$ [ঘূর্ণায়মান রশ্মি π পরিমাণ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে এবং ϕ পরিমাণ ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে]

$\because \phi = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| \therefore \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৩য় চতুর্ভাগে:



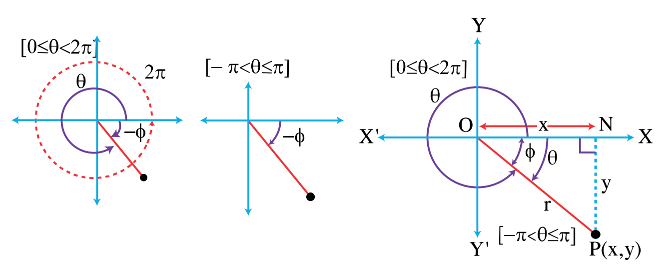
$0 \le \theta < 2\pi$ সীমার ক্ষেত্রে, $\theta = \pi + \phi$

$\therefore \theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$-\pi < \theta \le \pi$ সীমার ক্ষেত্রে, $\theta = -\pi + \phi$

$\therefore \theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

৪র্থ চতুর্ভাগে:



$0 \le \theta < 2\pi$ সীমার ক্ষেত্রে, $\theta = 2\pi - \phi$

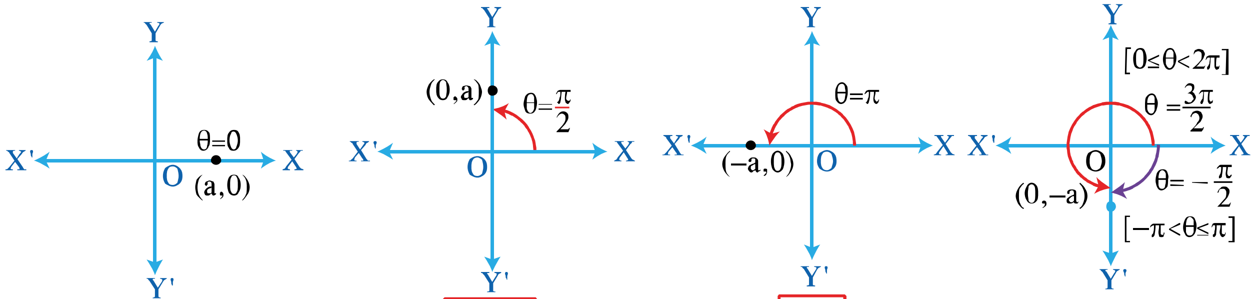
$\therefore \theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$-\pi < \theta \le \pi$ সীমার ক্ষেত্রে, $\theta = -\phi$

$\therefore \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

➲ অক্ষের উপরে অবস্থিত বিন্দুগুলোর জন্য θ এর মান:

$a > 0$ হলে, $(a, 0), (0, a), (-a, 0)$ এবং $(0, -a)$ বিন্দু চারটি যথাক্রমে ধনাত্মক x অক্ষ, ধনাত্মক y অক্ষ, ঋণাত্মক x অক্ষ এবং ঋণাত্মক y অক্ষের উপরে অবস্থিত



$\theta = 0°$ বা 0^c

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \pi$

$[0 \le \theta < 2\pi]$ সীমায়, $\theta = \frac{3\pi}{2}$
$[-\pi < \theta \le \pi]$ সীমায়, $\theta = -\frac{\pi}{2}$

জেনে রাখো

x অক্ষের উপর কোন বিন্দুর কোটির মান, $y = 0$ এবং y অক্ষের উপর কোন বিন্দুর ভুজের মান, $x = 0$

সারসংক্ষেপ

(i) পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে (x, y) রূপান্তরের জন্য, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ব্যবহার করতে হবে।

(ii) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) হতে পোলার স্থানাঙ্কে (r, θ) রূপান্তরের জন্য, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ এবং θ এর জন্য,

চতুর্ভাগ	$-\pi < \theta \le \pi$ সীমার ক্ষেত্রে,	$0 \le \theta < 2\pi$ সীমার ক্ষেত্রে,
১ম চতুর্ভাগ	$\theta = \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\theta = \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
২য় চতুর্ভাগ	$\theta = \pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\theta = \pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
৩য় চতুর্ভাগ	$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\theta = \pi + \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
৪র্থ চতুর্ভাগ	$\theta = -\tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$	$\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$

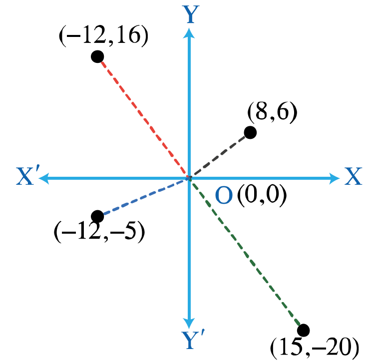
ছকটি ব্যবহার করতে হবে।

(iii) $a > 0$ হলে, কার্তেসীয় $(a, 0), (0, a), (-a, 0)$ এবং $(0, -a)$ বিন্দু চারটির ক্ষেত্রে যথাক্রমে $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$ এবং $\theta = -\frac{\pi}{2}[-\pi < \theta \le \pi]$ বা $\theta = \frac{3\pi}{2}[0 \le \theta < 2\pi]$ ব্যবহার করতে হবে

(iv) কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার বা পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তরের জন্য, $x = r\cos\theta; y = r\sin\theta$ এবং $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ সম্পর্কগুলো ব্যবহার করতে হবে।

তোমাদের কি শুরুতে বাঘ ও হরিণের কথা মনে আছে? এবার চলো সেই সমস্যাটি সমাধানের চেষ্টা করি। আমরা যদি বাঘটির অবস্থানকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার মূলবিন্দু বা পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার পোল (O), পূর্ব-পশ্চিম দিককে x- অক্ষ

(XOX′) ও উত্তর-দক্ষিণ দিককে y-অক্ষ (YOY′) বিবেচনা করি, তাহলে হরিণ চারটির অবস্থান যথাক্রমে $(8,6),(-12,16),(-12,-5)$ ও $(15,-20)$ বিন্দু বাঘ হতে হরিণ চারটির সরাসরি দূরত্ব বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর (r) নির্ণয় করলে,



১ম হরিণের দূরত্ব, $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = 10$ মিট

২য় হরিণের দূরত্ব, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(-12)^2 + (16)^2} = 20$ মিট

৩য় হরিণের দূরত্ব, $r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$ মিটার।

৪র্থ হরিণের দূরত্ব, $r_4 = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{(15)^2 + (-20)^2} = 25$ মিটার।

অর্থাৎ, বাঘটি হতে সবচেয়ে কাছে ১ম হরিণটি ছিল। যেহেতু বাঘটি ৩য় হরিণের উদ্দেশ্যে দৌড় দিচ্ছিলো, তাই বলতে পারি বাঘটির সিদ্ধান্ত সঠিক ছিলো না।

উদাহরণ-০১: নিম্নের কার্তেসীয় স্থানাঙ্কগুলোকে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর:

(i) $(1,\sqrt{3})$ (ii) $(-1,\sqrt{3})$ **[JB'19; DB, Din.B'17]** (iii) $(-1,-\sqrt{3})$ **[DB'21; JB'21; CB'21]**

(iv) $(1,-\sqrt{3})$ (v) $(5,0)$ (vi) $(0,5)$ (vii) $(-5,0)$ (viii) $(0,-5)$

সমাধান:

(i) $(1,\sqrt{3})$ বিন্দুটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থি

$\therefore r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \theta = \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$ ∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

(ii) $(-1,\sqrt{3})$ বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

(iii) $(-1,-\sqrt{3})$ বিন্দুটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ $[-\pi < \theta \le \pi$ সীমায়$]$

অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ $[0 \le \theta < 2\pi$ সীমায়$]$

∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(2,-\frac{2\pi}{3}\right)$ অথবা $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

(iv) $(1,-\sqrt{3})$ বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 ; \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = -\frac{\pi}{3}$ $[-\pi < \theta \le \pi$ সীমায়$]$

অথবা, $\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ $[0 \le \theta < 2\pi$ সীমায়$]$

∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$ অথবা, $\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

(v) $(5,0)$ বিন্দুটি ধনাত্মক x- অক্ষের উপর অবস্থি

$\therefore r = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5; \theta = 0$ অথবা, $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{0}{5}\right| = 0$ ∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $(5,0)$ **(Ans.)**

(vi) $(0,5)$ বিন্দুটি ধনাত্মক y- অক্ষের উপর অবস্থিত

$\therefore r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5; \theta = \frac{\pi}{2}$ অথবা $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{5}{0}\right| = \cot^{-1}\left|\frac{0}{5}\right| = \frac{\pi}{2}$ ∴ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$ **(Ans.)**

(vii) $(-5,0)$ বিন্দুটি ঋণাত্মক x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore r=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5\,;\theta=\pi$ অথবা, $\theta=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{0}{-5}\right|=\pi-0=\pi$ $[-\pi<\theta\leq\pi$ সীমায়$]$

অথবা, $\theta=\pi+\tan^{-1}\left|\frac{0}{-5}\right|=\pi+0=\pi$ $[0\leq\theta<2\pi$ সীমায়$]$ $\therefore$ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $(5,\pi)$ **(Ans.)**

(viii) $(0,-5)$ বিন্দুটি ঋণাত্মক y অক্ষের উপর অবস্থিত।

$\therefore r=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5;\ \theta=-\frac{\pi}{2}$ অথবা $\frac{3\pi}{2}$ [যখন $-\pi<\theta\leq\pi$ অথবা $0\leq\theta<2\pi$]

অথবা, $\theta=-\pi+\tan^{-1}\left|\frac{-5}{0}\right|=-\pi+\cot^{-1}\left|\frac{0}{-5}\right|=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ $[-\pi<\theta\leq\pi$ সীমায়$]$

অথবা, $\theta=\pi+\tan^{-1}\left|\frac{-5}{0}\right|=\pi+\cot^{-1}\left|\frac{0}{-5}\right|=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ $[0\leq\theta<2\pi$ সীমায়$]$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্কে বিন্দুটি $\left(5,-\frac{\pi}{2}\right)$ অথবা $\left(5,\frac{3\pi}{2}\right)$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০২: নিচের পোলার স্থানাঙ্কগুলোকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর

(i) $(3,90°)$ **[JB'19]** (ii) $\left(\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right)$

সমাধান: **(i)** $(3,90°)$ এর জন্য, $x=r\cos\theta=3\cos 90°=0; y=r\sin\theta=3\sin 90°=3$

$\therefore$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0,3)$ **(Ans.)**

(ii) $\left(\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right)$ এর জন্য, $x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$

এবং $y=r\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=-1$

$\therefore$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1,-1)$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৩: নিচের কার্তেসীয় সমীকরণগুলোকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর।

(i) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (ii) $x^2+y^2-ay=0$ **[CB.'19]** (iii) $y-x\cot\alpha=0$

সমাধান: (i) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\Rightarrow(r^2)^2=a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)$

$[\because x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ এবং $x^2+y^2=r^2]$ $\Rightarrow r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ [উভয়পক্ষকে r^2 দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow r^2=a^2\cos2\theta$ $[\because \cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta]$ **(Ans.)**

(ii) $x^2+y^2-ay=0\Rightarrow r^2-ar\sin\theta=0\Rightarrow r-a\sin\theta=0\therefore r=a\sin\theta$ **(Ans.)**

(iii) $y-x\cot\alpha=0\Rightarrow x\cot\alpha=y\Rightarrow\cot\alpha=\frac{y}{x}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$

$\Rightarrow\cot\alpha=\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\therefore\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৪: নিচের পোলার সমীকরণগুলোকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর

(i) $r=a$ (ii) $r(1+\cos\theta)=2$ **[CB.'21, 08, GST'21-22]**

সমাধান: (i) $r=a\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=a\therefore x^2+y^2=a^2$ **(Ans.)**

(ii) $r(1+\cos\theta)=2\Rightarrow r+r\cos\theta=2\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}+x=2$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2-x\Rightarrow x^2+y^2=4-4x+x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore y^2=4-4x$ **(Ans.)**

সতর্কতা!

এখন চলো পূর্বের প্রশ্নের (ii) নং এ প্রাপ্ত কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলারে নিয়ে যা

$\therefore y^2 = 4 - 4x \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow r^2 = (x-2)^2 \Rightarrow r = \pm(x-2)$

$(+)$ ve নিয়ে, $r = x - 2 = r\cos\theta - 2$	$(-)$ ve নিয়ে, $r = 2 - x \Rightarrow r = 2 - r\cos\theta$
$\Rightarrow r\cos\theta - r = 2 \Rightarrow r(\cos\theta - 1) = 2$	$\Rightarrow r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow r(\cos\theta + 1) = 2$

অর্থাৎ, আমরা দুইটি পোলার সমীকরণ পাই। আপাত দৃষ্টিতে দুইটি সমীকরণই সঠিক মনে হলেও $(+)$ ve নিয়ে প্রাপ্ত সমীকরণটি সঠিক নয় কারণ, ঐ সমীকরণে দেখা যাচ্ছে যে, $r\cos\theta - r = 2 \ldots\ldots\ldots (i)$

কিন্তু, $\cos\theta$ এর মান -1 থেকে 1 এর মধ্যে বা এদের সমান তাহলে, $r\cos\theta$ এর মান $-r$ থেকে r এর মধ্যে বা এদের সমান।

অর্থাৎ, $-r \le r\cos\theta \le r \Rightarrow -r - r \le r\cos\theta - r \le r - r$ [সকলপক্ষ থেকে r বিয়োগ করে]

$\therefore -2r \le r\cos\theta - r \le 0$ (এখানে $r \ge 0$)

অর্থাৎ, $r\cos\theta - r$ এর সর্বোচ্চ মান 0 এবং সর্বনিম্ন মান $-2r$ বা, $r\cos\theta - r$ এর মান 0 এর সমান বা 0 অপেক্ষা ছোট হবে (এবং $-2r$ এর সমান অথবা তা অপেক্ষা বড় হবে)। কিন্তু (i) হতে দেখা যায় $r\cos\theta - r$ এর মান 2, যা 0 অপেক্ষা বড় (যা সম্ভব নয়)। তাই $(+)$ ve নিয়ে প্রাপ্ত পোলার সমীকরণটি সঠিক নয়।

নিচে কিছু সাধারণ কার্তেসীয় সমীকরণের পোলার সমীকরণ তুলে ধরা হলো। তোমরা নিজে সমাধান করার চেষ্টা কর। পরবর্তী অধ্যায়গুলোতে আমরা বিস্তারিত আলোচনা করব।

কার্তেসীয় সমীকরণ	পোলার সমীকরণ
$y = mx + c$	$r = \frac{c}{\sin\theta - m\cos\theta}$
$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$	$r = \frac{p}{\cos(\theta-\alpha)}$
$x^2 + y^2 = p^2$	$r = p$
$x^2 = 4ay$	$r = 4a\tan\theta.\sec\theta$
$y^2 = 4ax$	$r = 4a\cot\theta.\operatorname{cosec}\theta$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}}$

টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান

স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার রূপান্তর সংক্রান্ত

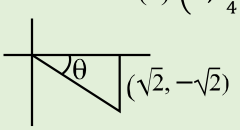
বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত? **[DB'21]**

(a) $\left(4, \frac{7\pi}{4}\right)$ (b) $\left(6, \frac{-\pi}{4}\right)$

(c) $\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$ (d) $\left(2, \frac{-\pi}{4}\right)$

সমাধান: (d);



$r = \sqrt{2+2} = 2$

$\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = -\frac{\pi}{4}$

02. $r = 3\cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? **[RB'21]**

(a) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 3x = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 3y = 0$

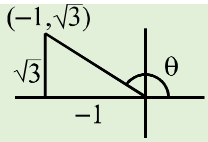
সমাধান: (a); $r = 3\cos\theta$ বা, $r^2 = 3r\cos\theta$

বা $x^2 + y^2 = 3x \therefore x^2 + y^2 - 3x = 0$

03. $(-1, \sqrt{3})$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক- **[Ctg.B'21; JB'19; DB, Din,B'17]**

(a) $(2, -60°)$ (b) $(2, 30°)$

(c) $(2, 120°)$ (d) $(2, 240°)$

সমাধান: (c); 

$r = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \frac{2\pi}{3} = 120°$

04. $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? **[SB'21]**

(a) $\left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$ (b) $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$
(c) $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

সমাধান: (c); $r = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right| = \frac{3\pi}{4}$

05. $(-\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কত? **[Din.B'21]**

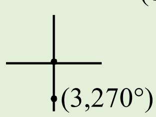
(a) $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ (b) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$
(c) $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ (d) $\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$

সমাধান: (a); $r = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

06. $(3, 270°)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক- **[MB'21]**

(a) $(-3, 0)$ (b) $(0, -3)$
(c) $(3, -3)$ (d) $(0, 0)$

সমাধান: (b); 

$x = 3\cos 270° = 0; y = 3\sin 270° = -3$

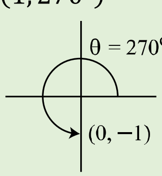
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি রেখার সমীকরণ $x + 3y + 3 = 0$.

07. রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RB'19]**

(a) $(-1, 0°)$ (b) $(1, 0°)$
(c) $(1, 90°)$ (d) $(1, 270°)$

সমাধান: (d); y অক্ষের উপর $x = 0$ বসালে পাই,
$y = -1$
∴ y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, -1)$
এখন, $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1; \theta = 270°$
∴ পোলার স্থানাঙ্ক $(1, 270°)$



08. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(5, 90°)$ হলে, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক হবে- **[JB'19]**

(a) $(0, 0)$ (b) $(0, 5)$ (c) $(5, 0)$ (d) $(5, 5)$

সমাধান: (b); পোলার স্থানাঙ্ক $(r, \theta) \equiv (5, 90°)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = r\cos\theta$
$= 5\cos 90° = 0$
এবং $y = r\sin\theta = 5\sin 90° = 5$ ∴ $(x, y) \equiv (0, 5)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x - 4y - 12 = 0$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

09. B বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? **[DB'17]**

(a) $(4, 0)$ (b) $(0, 4)$ (c) $(0, -3)$ (d) $(0, 3)$

সমাধান: (c); y অক্ষের উপর $x = 0$
∴ $3 \times 0 - 4y - 12 = 0$
$\Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$ ∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$

এডমিশন MCQ ও সমাধান

10. OP রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঘুরানোতে নতুন অবস্থান হলো OQ। P এর স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, -3)$ হলে Q এর পোলার স্থানাঙ্ক হবে- **[KUET'14-15]**

(a) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ (b) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(c) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$ (e) $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

সমাধান: (d); $P \equiv (-\sqrt{3}, -3) \equiv \left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$
∴ $Q \equiv \left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \equiv \left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$

11. $r = a\sin\theta$ পোলার সমীকরণের কার্তেসীয় সমীকরণ কত? **[BUTEX'12-13]**

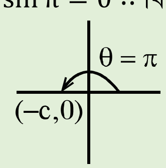
(a) $ax^2 + y^2 - y = 0$ (b) $x^2 + y^2 + ay = 0$
(c) $x^2 + y^2 - ay = 0$ (d) $x^2 + ay^2 - y = 0$

সমাধান: (c); $r = a\sin\theta \Rightarrow r^2 = ar\sin\theta$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = ay$ [$r^2 = x^2 + y^2$ ও $y = r\sin\theta$]
$\Rightarrow x^2 + y^2 - ay = 0$

12. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (c, π) হলে বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক কত? **[DU'21-22]**

(a) $(-1, 0)$ (b) $(-c, 0)$
(c) $(c, -c)$ (d) $(-c, c)$

সমাধান: (b); $x = r\cos\theta = c\cos\pi = -c$
$y = r\sin\theta = c\sin\pi = 0$ ∴ বিন্দুটি $(-c, 0)$



13. $r\cos^2\theta + \cos\theta - r = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বক্ররেখা একটি- **[Agri. Guccho'19-20]**

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) অর্ধবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: (d); $r\cos^2\theta + \cos\theta - r = 0$

$\Rightarrow \frac{r^2\cos^2\theta}{r} + \frac{r\cos\theta}{r} - r = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{r} + \frac{x}{r} = r$

$\Rightarrow \frac{x^2+x}{r} = r \Rightarrow x^2 + x = r^2 \Rightarrow x^2 + x = x^2 + y^2$

$\Rightarrow y^2 = x \Rightarrow y^2 = 4.\frac{1}{4}.x$ [যা একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ] $[y^2 = 4ax]$

14. $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ- **[DU'18-19]**

(a) $y^2 = 1 + 2x$ (b) $y^2 = 4(1-x)$
(c) $y^2 = 4(1+x)$ (d) $x^2 = 4(1+y)$

সমাধান: (a); $r \times 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1; r(1-\cos\theta) = 1$

$\Rightarrow r - r\cos\theta = 1 \Rightarrow 1 + r\cos\theta = r$

$\Rightarrow r^2 = (1 + r\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = (1+x)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2 \Rightarrow y^2 = 1 + 2x$

15. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0, -2)$ হলে, বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কত? **[BAU'18-19, JU'18-19]**

(a) $(2, 70°)$ (b) $(2, 170°)$
(c) $(1, 270°)$ (d) $(2, 270°)$

সমাধান: (d); $r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

$\theta = 2\pi - \tan^{-1}\left|\frac{-2}{0}\right| = -\frac{\pi}{2}$

$= 2\pi - \cot^{-1}\frac{0}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = 270°$

16. $r\cos(\theta - \alpha) = k$, সমীকরণটির কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? **[RU'17-18]**

(a) $x\cos\theta + y\sin\theta = k$
(b) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = k$
(c) $x\cos\alpha - y\sin\alpha = k$
(d) $x\cos\alpha - y\sin\alpha - k = 0$

সমাধান: (b); $r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = k$

$\therefore x\cos\alpha + y\sin\alpha = k$

17. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(3, 150^o)$ হলে, ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক- **[DU'15-16, JU'14-15]**

(a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
(c) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

সমাধান: (c); $x = r\cos\theta = 3\cos 150^o$

$= 3(-\sin 60^o) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$y = r\sin\theta = 3\sin 150^o = 3\cos 60^o = \frac{3}{2}$

18. পোলার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে পোল এর স্থানাঙ্ক কত? **[RU'15-16] [Ans: a]**

(a) $(0, 0)$ (b) $(0, \pi)$ (c) $(0, -\pi)$ (d) $(0, 2\pi)$

19. $6r^3\sin\theta = 4 - \cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কী? **[RU'15-16]**

(a) $6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$

(b) $3y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 2x$

(c) $4y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 6\sqrt{x^2+y^2} - x$

(d) $2y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 3\sqrt{x^2+y^2}$

সমাধান: (a); $6r^3\sin\theta = 4 - \cos\theta$

$\Rightarrow 6r^4\sin\theta = 4r - r.\cos\theta$

$\Rightarrow 6 \times (r\sin\theta) \times r^3 = 4r - r\cos\theta$

$\Rightarrow 6y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 4\sqrt{x^2+y^2} - x$

20. পোলার সমীকরণ $r^2\sin 2\theta = 2a^2$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কত? **[JU'14-15]**

(a) $2xy = a^2$ (b) $xy = a^2$
(c) $xy = 2a^2$ (d) $xy = a$

সমাধান: (b); $r^2\sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow r^2 \times 2\sin\theta\cos\theta = 2a^2$

$\Rightarrow 2(r\sin\theta)(r\cos\theta) = 2a^2 \Rightarrow y.x = a^2 \Rightarrow xy = a^2$

21. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ সমীকরণটির পোলার সমীকরণ হবে- **[CU'14-15]**

(a) $r = 2a\cos\theta$ (b) $r^2 = 2a\cos\theta$
(c) $r = 2a\sin\theta$ (d) $r^2 = 2a\sin\theta$

সমাধান: (a); $x^2 + y^2 = 2ax$

$\Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \Rightarrow r = 2a\cos\theta$

বোর্ড সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

01. (ক) $(-\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[DB'21]**

সমাধান

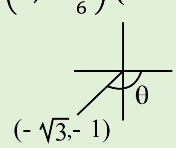
ক. ধরি, $(-\sqrt{3}, -1) \equiv (x, y)$

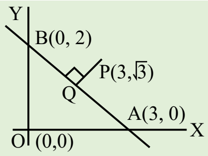
পোলার স্থানাঙ্কে, $r = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$= \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2} + (-1)^2 + \sqrt{4} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)$ **(Ans.)**



02. 

[DB'19]

(ক) P বিন্দুর পোলার-স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান

ক. $P(3, \sqrt{3}) \equiv P(x, y)$; $x = 3$; $y = \sqrt{3}$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore P(3, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ **(Ans.)**

03. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(a, -1), B(0, -2)$ এবং $C(-2, -4)$। [SB'17]

(ক) $(-2, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান

ক. $x = -2, y = -\sqrt{2}$

$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = -144.73°$

$\therefore r = \sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক, $(\sqrt{6}, -144.73°)$

নিজে করো

01. নিচের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক থেকে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর:
(i) $(3, 3\sqrt{3})$ **[DB'19]** (ii) $(0, -3)$ **[Ans: (i)** $\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$অথবা, $\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$, **(ii)** $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$**]**

02. নিচের পোলার স্থানাঙ্ক থেকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর:
(i) $(7\sqrt{2}, 45°)$ (ii) $(2\sqrt{2}, 135°)$ **[MB'21]** **[Ans: (i)**$(7, 7)$, **(ii)** $(-2, 2)$**]**

03. নিচের কার্তেসীয় সমীকরণগুলোকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর:
(i) $x^2 - y^2 = a^2$ (ii) $x^3 = y^2(2a - x)$ **[Ans: (i)** $r^2 \cos 2\theta = a^2$, **(ii)** $r = 2a \sin\theta \tan\theta$**]**

04. পোলার সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর:
(i) $r^2 - a^2 = \cos 2\theta$ (ii) $r = 6\cos\theta - 2\sin\theta$
[Ans: (i)$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)$, **(ii)**$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$**]**

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between 2 points)

দুইটি কার্তেসীয় বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব:

মনে করি, A (x_1, y_1) এবং B (x_2, y_2) কার্তেসীয় সমতলে অবস্থিত দুইটি বিন্দু (চিত্র-০১)। A ও B বিন্দুদ্বয় হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AM ও BN লম্ব অঙ্কন করি।

$\therefore OM = x_1$; $ON = x_2$ এবং $AM = y_1$; $BN = y_2$ (চিত্র-০২)

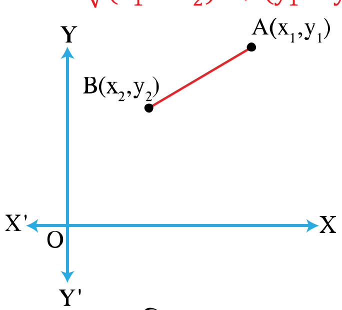
B হতে AM এর উপর BC লম্ব আঁকি। তাহলে, $BC = MN = OM - ON$

$\therefore BC = x_1 - x_2$ এবং $AC = AM - CM = AM - BN = y_1 - y_2$ (চিত্র-০৩)

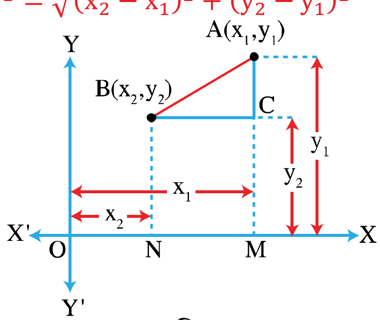
এখন, ΔABC সমকোণী। $\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

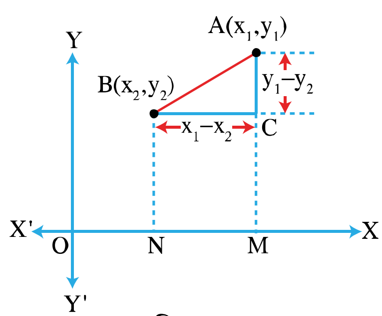
$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



চিত্র-০১



চিত্র-০২



চিত্র-০৩

জেনে রাখো

দুইটি কার্তেসীয় বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

বিকল্প প্রমাণ:

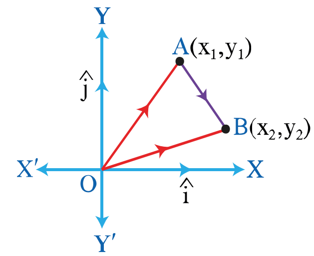
মনে করি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$.

ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j}) = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$

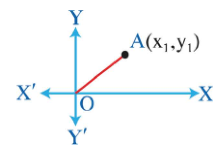
$\therefore$ A ও B বিন্দুর দূরত্ব $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



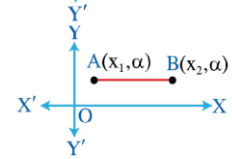
অনুসিদ্ধান্ত

(i) $A(x_1, y_1)$ এবং মূলবিন্দুর (0, 0) মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$



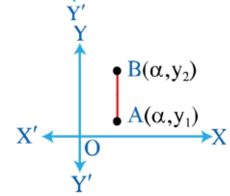
(ii) $A(x_1, \alpha)$ ও $B(x_2, \alpha)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\alpha - \alpha)^2} = |x_1 - x_2|$

$\Rightarrow$ x অক্ষের সমান্তরালে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব = |ভুজদ্বয়ের অন্তর|



(iii) $A(\alpha, y_1)$ ও $B(\alpha, y_2)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(\alpha - \alpha)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ y অক্ষের সমান্তরালে অবস্থিত দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব = |কোটিদ্বয়ের অন্তর|



দুইটি পোলার বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব:

$A(r_1, \theta_1)$ ও $B(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$

$x_1 = r_1 \cos\theta_1$; $y_1 = r_1 \sin\theta_1$

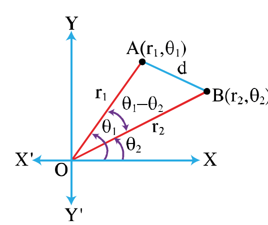
$x_2 = r_2 \cos\theta_2$; $y_2 = r_2 \sin\theta_2$

$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)^2}$

$= \sqrt{r_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + r_2^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) - 2r_1r_2(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_1.\sin\theta_2)}$

$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 \sim \theta_2)}$

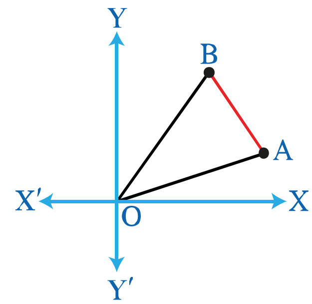


জেনে রাখো

'~' চিহ্ন পার্থক্য প্রকাশ করে। $\theta_1 > \theta_2$ হলে, $\theta_1 \sim \theta_2 = \theta_1 - \theta_2$ তবে, $\theta_2 > \theta_1$ হলে, $\theta_1 \sim \theta_2 = \theta_2 - \theta_1$

➲ বিকল্প প্রমাণ:

ΔOAB-এ $OA = r_1, \angle XOA = \theta_1$; $OB = r_2, \angle XOB = \theta_2$



$\therefore$ A বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $A(r_1, \theta_1)$ এবং B বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $B(r_2, \theta_2)$

ধরি, $AB = d$ এখন, ΔOAB-এ, $\cos\angle AOB = \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA.OB}$ [cosine Rule]

$\Rightarrow \cos(\theta_1-\theta_2) = \frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2} \Rightarrow 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = r_1^2+r_2^2-d^2$

$\Rightarrow d^2 = r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) \therefore d = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

$\because \cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\{-(\theta_2-\theta_1)\} = \cos(\theta_2-\theta_1)$ তাই

$\cos(\theta_1-\theta_2)$ এর পরিবর্তে $\cos(\theta_1 \sim \theta_2)$ লিখলে পাই, $d = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1\sim\theta_2)}$

[বি:দ্র: ত্রিকোণমিতির 7.7 অধ্যায়ে cosine rule সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে]

সারসংক্ষেপ

(i) কার্তেসীয় সমতলে দুইটি বিন্দুর $[A(x_1,y_1)$ ও $B(x_2,y_2)]$ মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

(ii) পোলার স্থানাঙ্কে দুইটি বিন্দু $A(r_1,\theta_1)$ এবং $B(r_2,\theta_2)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1\sim\theta_2)}$

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব সংক্রান্ত সমস্যা (Problems related to distance between 2 points)

Case-01: দূরত্ব নির্ণয় সংক্রান্ত সাধারণ সমস্যা

জেনে রাখো

(i) x-অক্ষ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= |y|$

(ii) y-অক্ষ হতে $P(x, y)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব $= |x|$

উদাহরণ-০৫: **$(4, 5)$ এবং $(-2, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর**

সমাধান: বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{5-(-3)\}^2} = \sqrt{(4+2)^2+(5+3)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক। **(Ans.)**

উদাহরণ-০৬: **$(2, 30°)$ এবং $(5, 60°)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?**

সমাধান: বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{2^2+5^2-2\times2\times5\times\cos(60°-30°)} = \sqrt{29-10\sqrt{3}}$ একক। **(Ans.)**

উদাহরণ-০৭: **x অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে $(0, 2)$ এবং $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** **[BUTEX'13-14]**

সমাধান: $\because$ P বিন্দুটি x অক্ষের উপর অবস্থিত, $\therefore$ ধরি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$। প্রশ্নমতে,

$\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{(\alpha-6)^2+(0-4)^2} \Rightarrow \alpha^2+4 = \alpha^2-12\alpha+36+16$

$\Rightarrow 12\alpha = 48 \therefore \alpha = 4 \therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 0)$ **(Ans.)**