প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-০৪ : বৃত্ত

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আঃ মালেক, আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৭৫/-
(একশত পঁচাত্তর টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

চতুর্থ অধ্যায়: বৃত্ত

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-04, Bangla Version, Page-23, Question-10, দেওয়া আছে, উত্তর: [4] কিন্তু হবে [2]

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

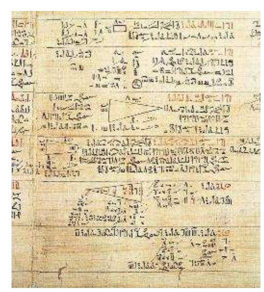
অধ্যায় ০৪
বৃত্ত

আচ্ছা, তোমাদের মনে কি কখনো প্রশ্ন জেগেছে যে, আগেকার যুগের বিভিন্ন স্থাপনা তৈরিতে যেসকল ভারী ও বিশাল বিশাল পাথরের ব্যবহার হয়েছে, তা কীভাবে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে স্থানান্তর করা হয়েছিলো? হয়তো সাধারণ বুদ্ধিতে মনে হতে পারে যে, অনেকজন শ্রমিক একসাথে টেনে টেনে পাথর একস্থান থেকে অন্যস্থানে নিত। কিন্তু, একটু ভেবে দেখো তো, একেকটি পাথরের ওজন ছিল প্রায় কয়েক হাজার কেজির মতো; যাকে টেনে একস্থান থেকে অন্য স্থানে নেয়া অসম্ভবই বলা চলে।

পরে, ভাবা হলো ভারী ভারী এসব পাথরের নিচে যদি গোলাকার কোন বস্তু রেখে এরপর টানা হয় তবে, সেক্ষেত্রে টানা অনেক সুবিধাজনক হচ্ছে। পরে আরো দেখা গেল, গোলাকার বস্তু যদি পুরোপুরি সুষম গোলাকার হয়, তবে পাথরগুলো টানা সর্বোচ্চ সহজ হয়। এই যে পাথর টানতে গিয়ে সুষম গোলাকার বস্তুর যে আবির্ভাব ঘটলো, এই গোলাকার বস্তুর যেকোন প্রস্থচ্ছেদের আকৃতিকে বলা হয় বৃত্ত।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস (Brief History)

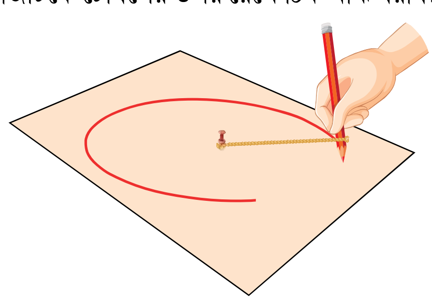
বৃত্ত (Circle) শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ 'Kirkos' থেকে যার অর্থ হলো আংটি সভ্যতার আদিলগ্ন থেকেই বৃত্তের ব্যবহার দৈনন্দিন জীবনে প্রবেশ করে খ্রিস্টপূর্ব 1700 অব্দে রাইন্ড প্যাপিরাস বইয়ে (The Rhind Mathematical Papyrus) বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি উল্লেখ করা হয়। খ্রিস্টপূর্ব 300 অব্দে ইউক্লিড তাঁর এলিমেন্ট গ্রন্থের তৃতীয় খণ্ডে বৃত্তের বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করেন প্লেটো বৃত্তের সংজ্ঞা, অঙ্কন, ব্যাখ্যা সম্পর্কে বিশদ ধারণা প্রদান করে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি, ক্যালকুলাস, জ্যোতির্বিদ্যা, কম্পিউটার, গ্রাফিক্স ডিজাইনে বৃত্ত সম্পর্কে অধ্যয়ন অতীব গুরুত্বপূর্ণ। প্রাচীন সময়ে চাকার আবির্ভাব বৃত্তের ধারণা থেকে সৃষ্ট যা সে সময়ে যোগাযোগ মাধ্যমে বিপ্লব এনেে



বৃত্ত (Circle)

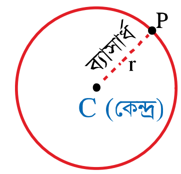
বৃত্তের ধারণা (Concept of Circle)

আমরা এখন কাগজ, পেন্সিল, সুতা ও পিনের সাহায্যে সহজ এক্সপেরিমেন্ট করব প্রথমে কাগজটিকে টেবিলের উপর রেখে ঠিক মাঝ বরাবর একটি পিন বসিয়ে দেই এরপর সুতার একপ্রান্ত পিনের সাথে এবং অপর প্রান্ত পেন্সিলের সাথে বেঁধে দেই এখন পিনকে কেন্দ্র করে সুতাকে টান টান রেখে পেন্সিলকে পিনের চারপাশে ঘুরালে একটি জ্যামিতিক আকৃতি পাওয়া যায়। এই জ্যামিতিক আকৃতিকে বৃত্ত বলা হয়।



পিনের পাদবিন্দুকে কেন্দ্র বলা হয় এবং পেন্সিলের তীক্ষ্ণ প্রান্তটি যেই পথ দিয়ে ঘুরছে সেই পথকে বৃত্ত বলা হয়। পেন্সিলের তীক্ষ্ণ প্রান্তটি একটি বিন্দু নির্দেশ করে যেটি কেন্দ্রের চারদিকে ঘূর্ণায়মান। বৃত্তটি অঙ্কনের সময় কেন্দ্র ও ঘূর্ণায়মান বিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ সুতার দৈর্ঘ্য সর্বদা অপরিবর্তিত ছিল কেন্দ্র ও ঘূর্ণায়মান বিন্দুর দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়

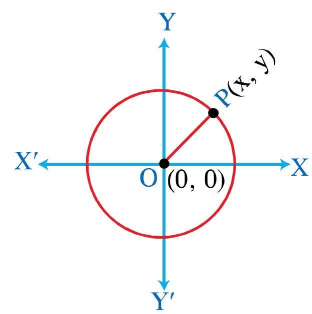
দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক   একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে সমদূরবর্তী অপর একটি চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে।



চিত্র: বৃত্ত

চিত্রে, C বৃত্তের কেন্দ্র এবং P বৃত্তের পরিধির উপর যেকোন একটি বিন্দু। P বিন্দুটি সর্বদা বৃত্তের কেন্দ্র C হতে সমান/নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থান করে   এই নির্দিষ্ট দূরত্ব, $CP = r$ হলো বৃত্তের ব্যাসার্ধ। দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করা যায় চলো, প্রথমে আমরা জেনে নিই যে, একটি বৃত্তের কেন্দ্র যদি মূলবিন্দু হয় এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ যদি r হয় তাহলে বৃত্তটির সমীকরণ কেমন হবে?

একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ (Equation of the circle with centre at the origin and radius r)



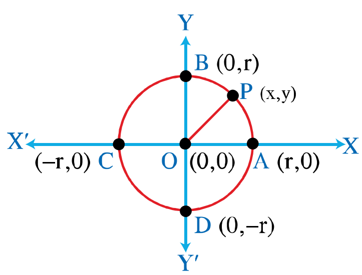
আমরা কার্তেসীয় তলে বৃত্তকে উপস্থাপন করার চেষ্টা করব চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O $(0, 0)$ তে অবস্থিত এবং বৃত্তের পরিধির উপরস্থ যেকোন একটি বিন্দু P (x, y)।

তাহলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, $OP = r$ একক।

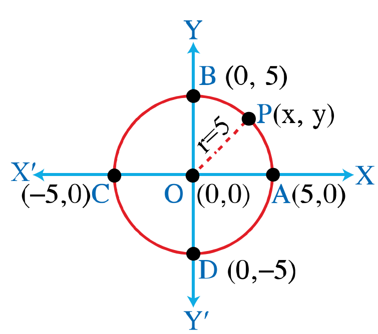
$\therefore OP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \therefore x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore$ একটি বৃত্তের কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = r^2$.



পাশের চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে বৃত্তটি x-অক্ষকে যথাক্রমে A, C এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে B, D বিন্দুতে ছেদ করে। কেন্দ্র $(0, 0)$ বিন্দু থেকে ব্যাসার্ধের সমান r একক দূরে বৃত্তটি ধনাত্মক x অক্ষকে A বিন্দুতে, ঋণাত্মক x-অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাই, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(r, 0)$ এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-r, 0)$। অনুরূপভাবে, কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে ব্যাসার্ধের সমান r একক দূরে বৃত্তটি ধনাত্মক y-অক্ষকে B বিন্দুতে, ঋণাত্মক y-অক্ষকে D বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, r)$ এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -r)$ হবে।



ধরো, একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 5 একক। বৃত্তটির সমীকরণ এবং বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করা যাক।

এখানে, কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 5$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 25$

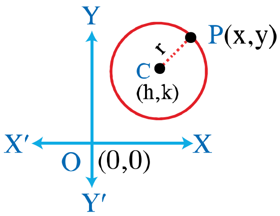
এবং x-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় $A(5, 0)$ এবং $C(-5, 0)$

আবার y-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় $B(0, 5)$ এবং $D(0, -5)$।

বৃত্তের কেন্দ্র কি সর্বদা মূলবিন্দুতেই থাকবে ?

বৃত্তের কেন্দ্র দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেকোন জায়গায় থাকতে পারে। চলো আমরা দেখে নিই বৃত্তের কেন্দ্র অন্যান্য যেকোনো বিন্দু হলে এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্তের সমীকরণ কি রকম হবে।

নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ (Equation of a circle with specific centre and radius)



মনে করি, একটি বৃত্তের কেন্দ্র $C(h, k)$ এবং বৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু $P(x, y)$।

তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $CP = r$ একক।

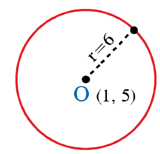
আবার, $CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$\Rightarrow r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \Rightarrow r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

$\therefore (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\therefore$ একটি বৃত্তের কেন্দ্র $C\ (h, k)$ এবং ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$।

তাহলে, একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 5)$ এবং ব্যাসার্ধ 6 একক হলে চলো আমরা বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করে ফেলি



এখানে, কেন্দ্র $O(1, 5)$ $\therefore h = 1, k = 5$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 6$ একক।

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 6^2$

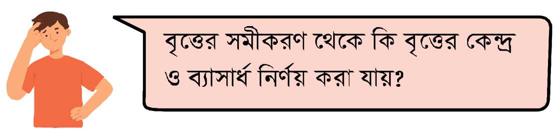
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 36 \therefore x^2 + y^2 - 2x - 10y - 10 = 0$

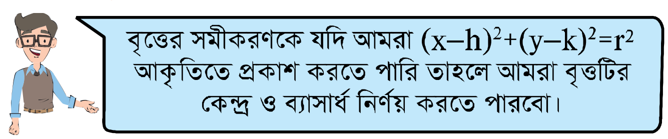
অর্থাৎ, যদি একটি বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকে তাহলে তা ব্যবহার করে আমরা যেকোন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি

উদাহরণ-০১: একটি বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ 5 একক। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে $h = 1, k = 2$ এবং $r = 5$ $\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 25 \therefore x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ **(Ans)**





চলো একটি উদাহরণ দেখা যাক। মনে করো তোমাকে বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া হলো যা নিম্নরূপ,

$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

দেখো (i) নং সমীকরণের বামপক্ষে x^2 ও $-6x$ রয়েছে। আমরা যদি $3^2 = 9$ যোগ করি তাহলে পাওয়া যাবে $x^2 - 6x + 9$ বা $(x-3)^2$। আবার, (i) নং সমীকরণের বামপক্ষে y^2 ও $-10y$ আছে। আমরা যদি $5^2 = 25$ যোগ করি তাহলে পাওয়া যাবে $y^2 - 10y + 25$ বা $(y-5)^2$। বামপক্ষে 9 ও 25 যোগ করলে ডানপক্ষেও তা যোগ করতে হবে।

চলো উপরে আলোচিত কাজগুলো আমরা ধাপে ধাপে করে ফেলি। (i) নং সমীকরণটি ছিলো:

$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 10y = 15$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 - 10y + 5^2 = 15 + 3^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 - 2.x.3 + 3^2 + y^2 - 2.y.5 + 5^2 = 15 + 9 + 25$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = 49 \therefore (x-3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$

সমীকরণটিকে $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $h = 3, k = 5$ এবং $r = 7$.

$\therefore$ **(i)** বৃত্তের কেন্দ্র $C(3, 5)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 7$ একক। **(Ans.)**

উদাহরণ-০২: $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 1 \quad = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 - 8x - 12y - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x.4 + 4^2 + y^2 - 2.y.6 + 6^2 = 12 + 4^2 + 6^2$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-6)^2 = 64 \Rightarrow (x-4)^2 + (y-6)^2 = 8^2$

এখন $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ এবং সাথে তুলনা করে পাই, $h = 4, k = 6, r = 8$ $\therefore$ কেন্দ্র (4,6) এবং ব্যাসার্ধ 8 একক।

শুরুর উদাহরণে লক্ষ করে থাকবে যে, বৃত্তের কেন্দ্র $C(1,5)$ এবং ব্যাসার্ধ $r=6$ একক জানা থাকলে আমরা বৃত্তের সমীকরণ পেয়েছিলাম $(x-1)^2+(y-5)^2=6^2$. এটাকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ বললে খুব একটা ক্ষতি হবে না। বৃত্ত সংক্রান্ত সকল সমস্যাই এই সূত্র দিয়ে চাইলে সমাধান করে ফেলা যায়।

কিন্তু লক্ষ করে দেখো $(x-1)^2+(y-5)^2=6^2$ কে পরবর্তীতে আমরা দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্র ভেঙে সরলীকরণ করে $x^2+y^2-2x-10y-10=0$ আকৃতিতে নিয়ে গিয়েছিলাম। গণিতবিদদের কাছে পরবর্তীতে প্রাপ্ত (সরলীকরণকৃত) সমীকরণটি বেশি পছন্দের। তাই তারা নতুনভাবে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণটিকে তৈরি করেছেন। পরবর্তী অংশে সেই সাধারণ সমীকরণ নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ (General Equation of Circle)

ধরি, একটি বৃত্তের কেন্দ্র $C(h,k)$ এবং ব্যাসার্ধ $=r$. তাহলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

এই সমীকরণকে বিস্তার করলে পাওয়া যায়, $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0 \ldots\ldots\ldots(i)$

লক্ষ করো, (i) নং সমীকরণে h^2, k^2 এবং r^2 তিনটিই ধ্রুবক। ফলে $h^2+k^2-r^2$ ও একটি ধ্রুবক। যাকে আমরা c দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। অর্থাৎ, $c=h^2+k^2-r^2$

তাহলে (i) নং সমীকরণ হবে নিম্নরূপ, $x^2+y^2-2hx-2ky+c=0 \ldots\ldots\ldots(ii)$

(ii) নং সমীকরণকেই বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ বলা যেতো কিন্তু এখানে দেখা যাচ্ছে যে, x এবং y এর সহগ ঋণাত্মক গণিতবিদরা এই $(-)$ চিহ্ন দূর করার জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করেছে

$$(ii) \Rightarrow x^2+y^2+2(-h)x+2(-k)y+c=0 \ldots\ldots\ldots(iii)\ [\text{যেখানে, } c=h^2+k^2-r^2]$$

(iii) নং সমীকরণে যদি আমরা $-h$ কে g এবং $-k$ কে f দ্বারা প্রতিস্থাপন করি তাহলে তা নিম্নরূপ হবে,

(iii) $\Rightarrow\ x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \ldots\ldots\ldots(iv)$ একে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ বলা হয়।

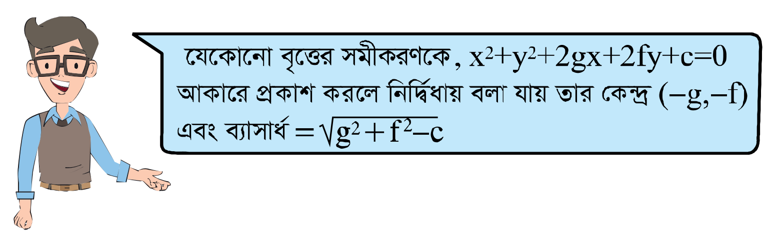
এখানে, $-h=g \therefore h=-g$ এবং $-k=f \therefore k=-f$ অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্র $(h,k)\equiv(-g,-f)$.

আবার, $h^2+k^2-r^2=c \Rightarrow (-g)^2+(-f)^2-r^2=c \Rightarrow g^2+f^2-c=r^2 \Rightarrow r^2=g^2+f^2-c\ \ \Rightarrow r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

অর্থাৎ, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

এভাবেও চিন্তা করা যায়। এখানে, বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \Rightarrow x^2+2gx+y^2+2fy=-c$

$\Rightarrow x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c\ \Rightarrow (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$



$\therefore \{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2 \ldots\ldots\ldots(v)$

(v) নং সমীকরণটিকে বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

বৃত্তের কেন্দ্র $(h,k)\equiv(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$

জেনে রাখো

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর দিকে লক্ষ করলে দেখা যাচ্ছে যে এখানে তিনটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (Arbitrary Constant) আছে সেগুলো হলো g, f ও c. তাই বৃত্তের সমীকরণ বের করার জন্য g, f ও c নির্ণয়ের শর্ত জানা লাগবে

লক্ষ করো: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণে x এর সহগ $2g$. একে -2 দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায় $\frac{2g}{-2}=-g$, যা বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ নির্দেশ করে। অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ $=-g=\frac{2g}{-2}=\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}$

আবার, সমীকরণটির y এর সহগ 2f. একে −2 দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায় $\frac{2f}{-2} = -f$, যা বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি নির্দেশ করে অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি $= -f = \frac{2f}{-2} = \frac{\text{y এর সহগ}}{-2}$ আবার বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{(-g)^2+(-f)^2-c}$

$= \sqrt{\left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}\right)^2 + \left(\frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right)^2 - \text{ধ্রুবক পদ}}$ [∵ বৃত্তের সমীকরণে ধ্রুবক পদ = c]

জেনে রাখো

তাহলে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(-g,-f) \equiv \left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}, \frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{\left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}\right)^2 + \left(\frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right)^2 - \text{ধ্রুবক পদ}}$

যেমন: $x^2+y^2-6x-10y-15=0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে,

বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}, \frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right) \equiv \left(\frac{-6}{-2}, \frac{-10}{-2}\right) \equiv (3,5)$

এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{\left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}\right)^2 + \left(\frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right)^2 - \text{ধ্রুবক পদ}} = \sqrt{\left(\frac{-6}{-2}\right)^2 + \left(\frac{-10}{-2}\right)^2 - (-15)}$

$= \sqrt{3^2+5^2+15} = \sqrt{49} = 7$ একক।

সতর্কতা!

বৃত্তের সমীকরণ থেকে g, f, c এর মান নির্ণয়ের সময় খেয়াল রাখতে হবে যেন অবশ্যই x^2 ও y^2 এর সহগ 1 থাকে।

উদাহরণ-০৩: $\mathbf{x^2+y^2-6x-8y-7\quad = 0}$ **বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।**

সমাধান: $x^2+y^2-6x-8y-75=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2.(-3).x+2.(-4).y+(-75)=0$

উক্ত সমীকরণকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$g=-3, f=-4$ ও $c=-75$. অর্থাৎ, $(-g,-f) \equiv (3,4)$ যা উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র।

এবং ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2-(-75)} = \sqrt{9+16+75} = \sqrt{100} = 10$ একক **(Ans.)**

উদাহরণ-০৪: $\mathbf{2x^2+2y^2-20x+20y+\quad = 0}$ **বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ কত হবে?**

সমাধান: এখানে, বৃত্তের সমীকরণ, $2x^2+2y^2-20x+20y+5=0$.

লক্ষ করে দেখো x^2, y^2 এর সহগ +1 নয়। তাহলে সর্বপ্রথম কাজ এদের সহগ +1 করতে হ   তাই বৃত্তের সমীকরণটিকে আমরা 2 দিয়ে ভাগ কর   তাহলে আমরা পাই বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-10x+10y+\frac{5}{2}=0$

সমীকরণটিকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে, $g=-5, f=5, c=\frac{5}{2}$

∴ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g,-f) \equiv (5,-5)$ অথবা, এভাবেও বৃত্তের কেন্দ্র বের করা যায় $\left(\frac{\text{x এর সহগ}}{-2}, \frac{\text{y এর সহগ}}{-2}\right) \equiv \left(\frac{-10}{-2}, \frac{10}{-2}\right) \equiv (5,-5)$

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{(-5)^2+5^2-\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{95}{2}}$ একক। **(Ans.)**

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণের কিছু বৈশিষ্ট্য / বৃত্তের সমীকরণের শর্ত
(Some Characteristics of general equation of circle / Conditions for the equation of circle)

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

(i) এটি x ও y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ii) x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান।

(iii) xy সম্বলিত কোনো পদ নেই বা xy এর সহগ শূন্য (0) হয়।

(iv) $g^2+f^2-c \geq 0$ হলে, এটি একটি বাস্তব বৃত্ত নির্দেশ করবে

কনিকের সাধারণ সমীকরণ: $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$; দ্বিতীয় পত্রে আমরা কনিক সম্পর্কে বিস্তারিত জানব। বৃত্তও এক ধরনের কনিক। বৃত্তের সমীকরণের শর্ত থেকে আমরা দেখতে পারি, একটি কনিক বৃত্ত হতে হলে নিম্নোক্ত শর্ত পূরণ করতে হয়:

- $a = b$ হতে হবে; কারণ x^2 ও y^2 এর সহগ পরস্পর সমান হতে হয়।
- $h = 0$ হবে। যেহেতু xy এর সহগ শূন্য (0) হয়।
- $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হবে, বাস্তব বৃত্ত হতে হলে।

উদাহরণ-০৫: **$ax^2 + 3y^2 + (2a - b)xy + 24x + 48y + b^2 = 0$ যদি কোন বৃত্তের সমীকরণ হয়, তবে a ও b এর মান এবং বৃত্তের সমীকরণটি নির্ণয় কর।**

সমাধান: আমরা জানি, বৃত্তের সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর সহগ পরস্পর সমান হয়। এখানে x^2 এবং y^2 এর সহগ যথাক্রমে a এবং 3। তাই, এখানে, $a = 3$ হবে।

আবার, বৃত্তের সমীকরণে xy এর সহগ শূন্য হয়। এখানে xy এর সহগ $2a - b$.

তাই, $2a - b = 0 \Rightarrow 2 \times 3 - b = 0\ [\because a = 3]\ \therefore b = 6$

তাহলে, বৃত্তটির সমীকরণ হবে: $3x^2 + 3y^2 + (2.3 - 6)xy + 24x + 48y + 6^2 = 0$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 + 24x + 48y + 36 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 8x + 16y + 12 = 0$ **(Ans)**

বিভিন্ন চতুর্ভাগে g ও f এর চিহ্ন (The sign of g and f in different quadrants)

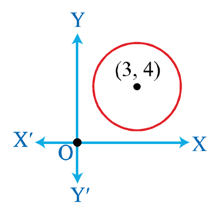
তোমরা হয়তো খেয়াল করেছো যে আমরা $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ সমীকরণকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এ রূপান্তর করেছি। প্রথম সমীকরণের ক্ষেত্রে বৃত্তের কেন্দ্র (h, k)। এই (h, k) বিন্দুটি কিন্তু দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অবস্থিত একটি বিন্দু। পরবর্তীতে দ্বিতীয় সমীকরণটি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে এই সমীকরণের ক্ষেত্রে বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ দুই ক্ষেত্রেই বৃত্তের কেন্দ্র কিন্তু একই। আমরা আমাদের সমীকরণকে সুন্দরভাবে উপস্থাপনের সুবিধার্থে $g = -h$ এবং $f = -k$ বসিয়েছিলাম। লক্ষ কর, (g, f) এবং (h, k) কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। চলো উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি।

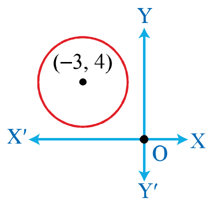
মনে করো, একটি বৃত্তের কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে (3,4) বিন্দুতে অবস্থি

তাহলে $h = 3$ এবং $k = 4$ বা $(h, k) \equiv (3,4)$

যেহেতু, $(h, k) \equiv (-g, -f) \Rightarrow (3,4) \equiv (-g, -f) \therefore g = -3$ এবং $f = -4$

অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে হলে $(h, k) \equiv (+ve, +ve)$ কিন্তু $(g, f) \equiv (-ve, -ve)$





আবার যদি একটি বৃত্তের কেন্দ্র দ্বিতীয় চতুর্ভাগে (−3,4) বিন্দুতে অবস্থিত হয়,

তাহলে $h = -3$ এবং $k = 4$ বা, $(h, k) \equiv (-3,4)$

যেহেতু, $(h, k) \equiv (-g, -f) \Rightarrow (-3,4) \equiv (-g, -f) \therefore g = 3$ এবং $f = -4$

অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্র দ্বিতীয় চতুর্ভাগে হলে $(h, k) \equiv (-ve, +ve)$ কিন্তু $(g, f) \equiv (+ve, -ve)$

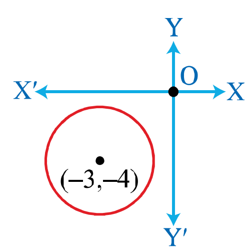
এবার যদি একটি বৃত্তের কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে $(-3, -4)$ বিন্দুতে অবস্থিত হয়

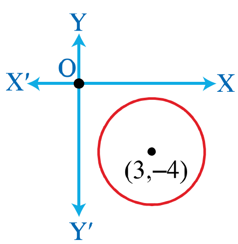
তাহলে $h = -3$ এবং $k = -4$ বা $(h, k) \equiv (-3, -4)$

যেহেতু, $(h, k) \equiv (-g, -f)$

$\Rightarrow (-3, -4) \equiv (-g, -f) \therefore g = 3$ এবং $f = 4$

অর্থাৎ, বৃত্তের কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে হলে $(h, k) \equiv (-ve, -ve)$ কিন্তু $(g, f) \equiv (+ve, +ve)$





এখন যদি একটি বৃত্তের কেন্দ্র চতুর্থ চতুর্ভাগে $(3, -4)$ বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তাহলে $h = 3$ এবং $k = -4$ বা $(h, k) \equiv (3, -4)$

যেহেতু, $(h, k) \equiv (-g, -f) \Rightarrow (3, -4) \equiv (-g, -f)$

$\therefore g = -3$ এবং $f = 4$

অর্থাৎ, চতুর্থ চতুর্ভাগে $(h, k) \equiv (+ve, -ve)$ কিন্তু $(g, f) \equiv (-ve, +ve)$

সতর্কতা!

অবশ্যই একটি বিষয় লক্ষ রাখবে যে, বৃত্তের কেন্দ্র কিন্তু (g, f) নয় বৃত্তের কেন্দ্র হলো $(-g, -f)$.

Y

২য় চতুর্ভাগে:
$(h, k) \equiv (-, +)$
$(g, f) \equiv (+, -)$

১ম চতুর্ভাগে:
$(h, k) \equiv (+, +)$
$(g, f) \equiv (-, -)$

X′ O (0,0) X

৩য় চতুর্ভাগে:
$(h, k) \equiv (-, -)$
$(g, f) \equiv (+, +)$

৪র্থ চতুর্ভাগে:
$(h, k) \equiv (+, -)$
$(g, f) \equiv (-, +)$

Y′

$\therefore$ অর্থাৎ, বিভিন্ন চতুর্ভাগে ভুজ ও কোটির যে চিহ্ন, g ও f এর চিহ্ন হবে তার যৌগিক বিপরীতক বা বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট কিন্তু h ও k এর চিহ্ন এবং ভুজ ও কোটির চিহ্ন একই।

বৃত্তের শ্রেণিবিভাগ (Classification of Circle)

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ থেকে আমরা জেনেছি বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ একক $g^2 + f^2 - c$ রাশিটির সাপেক্ষে আমরা বৃত্তের শ্রেণিবিভাগ করতে পারি

$\mathbf{g^2 + f^2 - c}$	বৃত্তের অবস্থা
$g^2 + f^2 - c > 0$	এক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ একটি অশূন্য ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হবে। এক্ষেত্রে বৃত্তটিকে বাস্তব বৃত্ত বলা হয়। **উদাহরণ:** $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে, এক্ষেত্রে, $2g = -6 \Rightarrow g = -3$ $2f = -8 \Rightarrow f = -4$ এবং $c = -24$ তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ $= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 - (-24)} = \sqrt{9 + 16 + 24} = \sqrt{49} = 7$ একক। অর্থাৎ, এখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্য তাই এটি বাস্তব বৃত্ত নির্দেশ করছে
$g^2 + f^2 - c = 0$	এক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 0$ হবে। ফলে, বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = -c$ $\Rightarrow (x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c$ $\Rightarrow (x + g)^2 + (y + f)^2 = 0$[$\because$ এক্ষেত্রে, $g^2 + f^2 - c = 0$] দুইটি বর্গের যোগফল শূন্য হলে প্রতিটি বর্গের মান পৃথকভাবে শূন্য হবে। $\therefore (x + g)^2 = 0 \Rightarrow x + g = 0 \Rightarrow x = -g$ $\therefore (y + f)^2 = 0 \Rightarrow y + f = 0 \Rightarrow y = -f$ $\therefore (x, y) \equiv (-g, -f)$ সুতরাং, বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য হলে বৃত্তের সমীকরণটি শুধুমাত্র একটি বিন্দু $(-g, -f)$ নির্দেশ করে। ফলে বৃত্তটি বিন্দুতে পরিণত হবে। এরূপ বৃত্তকে বিন্দুবৃত্ত বলে। **উদাহরণ:** $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে, এক্ষেত্রে, $2g = -6 \Rightarrow g = -3$; $2f = -8 \Rightarrow f = -4$ এবং $c = 25$ তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 - 25} = \sqrt{9 + 16 - 25} = 0$ অর্থাৎ, এখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য। তাই এটি বিন্দুবৃত্ত নির্দেশ করছে বৃত্তটি $(-g, -f) \equiv (3,4)$ বিন্দু নির্দেশ করে। বিন্দুবৃত্ত ও একটি বাস্তব বৃত্ত।

$g^2+f^2-c<0$	এক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ অবাস্তব (কাল্পনিক) সংখ্যা হবে। ফলে আমরা বাস্তবে কোন বৃত্ত পাবো না অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অবাস্তব বা কাল্পনিক বৃত্ত পাওয়া যাবে। উদাহরণ: $x^2+y^2-6x-8y+34=0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে, এক্ষেত্রে, $2g=-6 \Rightarrow g=-3$ $2f=-8 \Rightarrow f=-4$ এবং $c=34$ তাহলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ $=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2-34}=\sqrt{9+16-34}=\sqrt{-9}=3i\ [\because i^2=-1]$ অর্থাৎ, এক্ষেত্রে বৃত্তের ব্যাসার্ধ অবাস্তব (কাল্পনিক) সংখ্যা। তাই এক্ষেত্রে অবাস্তব বা কাল্পনিক বৃত্ত পাওয়া যাবে।

টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন

■ বৃত্ত হওয়ার শর্ত ■ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয়

বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. নিচের কোন শর্তে $ax^2+by^2=c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? [CB'22] [Ans: d]
(a) $c=0$ (b) $c=r^2$
(c) $a\neq b$ (d) $\frac{a}{b}=1, b\neq 0$

02. বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ- [All.B'18]
(a) $x^2-y^2=0$
(b) $x^2+y^2=0$
(c) $x^2+y^2=r^2$
(d) $x^2+y^2+x+y+1=0$
সমাধান: (b); বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য (0) [x^2 ও y^2 এর সহগ সমান]

03. $2x^2+2y^2+4x-2y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? [CB'22, 19]
(a) $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$
(c) $(-2,1)$ (d) $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$
সমাধান: (a); $2x^2+2y^2+4x-2y+4=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2x-y+2=0$ ∴ বৃত্তের কেন্দ্র,
$\equiv\left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2},\frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right)\equiv\left(\frac{2}{-2},\frac{-1}{-2}\right)\equiv\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2+y^2+6x-2y-10=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

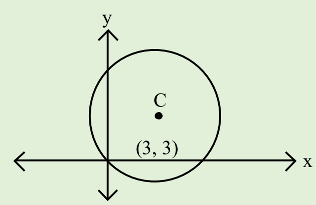
04. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [Din.B'19]
(a) $5\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{30}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{10}$
সমাধান: (c); $\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{3^2+1^2+10}$
$=2\sqrt{5}$ একক

05. $3x^2+3y^2+x-2y+\frac{1}{2}=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? [JB'17]
(a) $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{3}\right)$
সমাধা (c); $x^2+y^2+\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{1}{6}=0$
∴ কেন্দ্র $\equiv\left(\frac{\frac{1}{3}}{-2},\frac{-\frac{2}{3}}{-2}\right)\equiv\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$

এডমিশন MCQ ও সমাধান

06. 3 টি বৃত্তের (Circle) কেন্দ্র $(0,0)$। ১ম বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$, ২য় বৃত্তের ব্যাস 16 এবং ৩য় বৃত্তের ব্যাস 36। [CU'16-17] [Ans: a, b, c]
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) ১ম বৃত্ত ⊂ ২য় বৃত্ত
(b) ২য় বৃত্ত ⊂ ৩য় বৃত্ত
(c) ১ম বৃত্ত ∪ ২য় বৃত্ত ∪ ৩য় বৃত্ত = ৩য় বৃত্ত
(d) ১ম বৃত্ত ∩ ২য় বৃত্ত ∩ ৩য় বৃত্ত = {(0,0)}

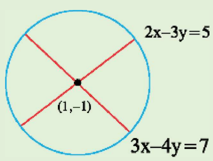
07. In the following circle, the area is $K\pi$, what is the value of K? [IUT'17-18]



(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 18
Solution: (d); $r=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$
$\therefore K\pi=\pi r^2=\pi(3\sqrt{2})^2=18\pi \Rightarrow K=18$

08. 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয় $2x-3y=5$ এবং $3x-4y=7$ হলে বৃত্তের সমীকরণ হবে- **[RUET'10-11, KUET'08-09]**
(a) $x^2+y^2+2x-2y=62$
(b) $x^2+y^2+2x-2y=47$
(c) $x^2+y^2-2x+2y=47$
(d) $x^2+y^2-2x+2y=62$
(e) None

সমাধান: (c);



$2x-3y=5, 3x-4y=7$
সমাধান করে পাই, বৃত্তের কেন্দ্র; $(1,-1)$; $\pi r^2=154$
$\therefore r=7$ $\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)^2+(y+1)^2=49$
$\therefore x^2+y^2-2x+2y-47=0$

09. c- এর মান কত হলে, $x^2+y^2+8x-6y+c=0$ বৃত্তটি একটি বিন্দুবৃত্ত হবে? **[RU' 21-22]**
(a) 15 (b) 25 (c) $\sqrt{15}$ (d) 5

সমাধান: (b); $x^2+y^2+8x-6y+c=0$ কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=4, f=-3$
বৃত্তটি বিন্দুবৃত্ত হলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\sqrt{g^2+f^2-c}=0$
$\Rightarrow g^2+f^2-c=0 \Rightarrow 4^2+(-3)^2-c=0$
$\therefore c=25$
বিকল্প $x^2+y^2+8x-6y+c=0$
$\Rightarrow x^2+8x+16+y^2-6y+9=16+9-c$
$\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=25-c=\left(\sqrt{25-c}\right)^2$
বৃত্তটি বিন্দুবৃত্ত হলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{25-c}=0$
$\Rightarrow 25-c=0 \therefore c=25$

10. $p^2x^2+2px+qy+p^2y^2=0$ সমীকরণটি দ্বারা কি নির্দেশ করে? **[BUTEX'14-15]**
(a) একজোড়া সরলরেখা (b) বৃত্ত
(c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

সমাধান: (b); কারণ x^2 ও y^2 এর সহগ একই এবং xy বিশিষ্ট কোন পদ নেই।

11. $x^2+y^2-6x=0$ এবং $x^2+y^2-8y=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[JnU'16-17]**
(a) 1 (b) 5 (c) 7 (d) 10

সমাধান: (b); $x^2+y^2-6x=0$ এর কেন্দ্র $(3,0)$;
$x^2+y^2-8y=0$ এর কেন্দ্র $(0,4)$
$\therefore$ দূরত্ব $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$=\sqrt{3^2+4^2}=5$ একক

12. $x^2+y^2-8x+6y+16=0$ সমীকরণ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? **[JnU'14-15]**
(a) 9.43 sq. unit (b) 9π sq. unit
(c) 1620 sq. unit (d) 4π sq. unit

সমাধান: (b); $x^2+y^2-8x+6y+16=0$
এখানে, $g=-4,\ f=3,\ c=16$
$\therefore r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{16+9-16}=3$
$\therefore \Delta=\pi r^2=\pi\times 3^2=9\pi$ sq. unit

13. $(3,-1)$ বিন্দুগামী এবং $x^2+y^2-6x+8y=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[DU'13-14]**
(a) $x^2+y^2+6x-8y+16=0$
(b) $x^2+y^2-6x+8y-16=0$
(c) $x^2+y^2-6x+8y+16=0$
(d) $x^2+y^2-6x-8y+16=0$

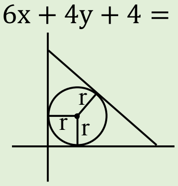
সমাধা (c); কেন্দ্র $(3,-4)$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(3-3)^2+(-1+4)^2}=3$
$\therefore (x-3)^2+(y+4)^2=9$
$x^2+y^2-6x+8y+16=0$

14. k এর কোন মানের জন্য $(x-y+3)^2+(kx+2)(y-1)=0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? **[CUET'11-12]**
(a) 2 (b) –1 (c) 2 (d) None of these

সমাধান: (a, c); $(x-y+3)^2+(kx+2)(y-1)=0$
বা, $x^2+y^2+9-2xy-6y+6x+kxy-kx+2y-2=0$
বা, $x^2+y^2+(6-k)x-4y+(k-2)xy+7=0$
কিন্তু বৃত্তের ক্ষেত্রে xy যুক্ত কোন পদ থাকতে পারবে না।
$\therefore k-2=0 \therefore k=2$

15. A circle whose center is in the first quadrant and touches the x and y axes, and the line $3x-4y=12$, the equation of the circle is **[IUT'14-15]**
(a) $x^2+y^2+4x+4y-1=0$
(b) $x^2+y^2-6x-6y+9=0$
(c) $x^2+y^2+4x-6y+4=0$
(d) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$

Solution: (b);



The equation of the circle is, $x^2+y^2+2(-r)x+2(-r)y+r^2=0$
The point (r, r) has a distance of r from the straight line $3x-4y=12$ $\therefore \frac{|3r-4r-12|}{5}=r \Rightarrow r+12=\pm 5r$
$\Rightarrow r=3,-2$ **(Not possible)**
$\therefore$ The equation of the circle is,
$x^2+y^2-6x-6y+9=0$

16. মূলবিন্দু হইতে (h, k) বিন্দু দিয়া গমনকারী রেখাসমূহের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ কোনটি? **[KUET'10-11]**

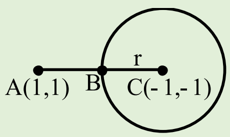
(a) $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$
(b) $x^2 + y^2 - h - 2k = 0$
(c) $x^2 + y^2 = 2h + k$
(d) $x^2 + y^2 - 5h - k = 0$
(e) $x^2 + y^2 - 4h - 7k = 0$

সমাধা **(a);** $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$
সমীকরণটি (h, k) বিন্দুগামী।

17. $(1, 1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2(x + y) = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[BUTEX'11-12]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{6}$
(c) $\sqrt{7}$ (d) কোনটিই নয়

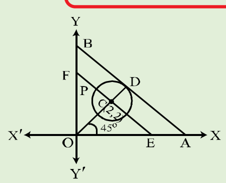
সমাধান: **(d);**



$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$
কেন্দ্র, $C(-1, -1)$; ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2}$
$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $BC = r = \sqrt{2}$
$\therefore AB = AC - BC = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ একক;

বোর্ড সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

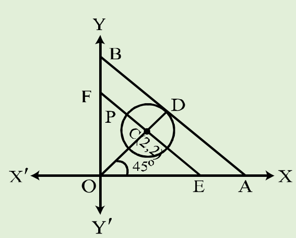
01. **[All.B'18]**



(গ) যদি $OD = 3\sqrt{2}$ হয় তবে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর

সমাধান

গ.



$OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $OD = 3\sqrt{2}$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = CD = OD - OC = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$
$= \sqrt{2}$ একক
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{2})^2$
$\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ **(Ans.)**

02. (ক) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **[Ctg.B'17]**

সমাধান

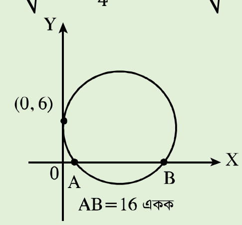
ক. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8 = 0$
$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4) = 0$
$\Rightarrow (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + 4 = 0$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4} - 1 = 0$
$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$
বৃত্তের সমীকরণের শর্ত $(g^2 + f^2 - c \geq 0)$ মানে না ফলে এটি কাল্পনিক বৃত্ত। তাই কেন্দ্র ব্যাসার্ধ নেই।

03. (ক) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **[BB'17]**

সমাধান

ক. $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2\left(\frac{5}{2}\right)y - 2 = 0$
আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করলে,
$g = -2, f = \frac{5}{2}, c = -2 \;\therefore$ কেন্দ্র $\equiv (-g, -f) \equiv \left(2, \frac{-5}{2}\right)$
এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-2)}$
$= \sqrt{4 + \frac{25}{4} + 2} = \sqrt{\frac{16+25+8}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ একক ।

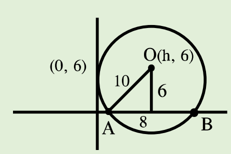
04. **[CB'22]**



(গ) চিত্রের AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান

গ. চিত্র হতে পাই,



কেন্দ্র, $O = (h, 6)$ ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির সমীকরণ হলো, $(x - h)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$ ……… (i)
বৃত্তটি $(0, 6)$ বিন্দুগামী
$\therefore (0 - h)^2 + (6 - 6)^2 = 10^2$
$\Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$ [O প্রথম চতুর্ভাগে]
$\therefore$ (i) $\Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$