প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-০৬ : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরিফ ও আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১২০/-
(একশত বিশ টাকা মাত্র)

কপিরাইট © উদ্ভাস

সমস্ত অধিকার সংরক্ষিত। এই বইয়ের কোনো অংশই প্রতিষ্ঠানের লিখিত অনুমতি ব্যতীত ফটোকপি, রেকর্ডিং, বৈদ্যুতিক বা যান্ত্রিক পদ্ধতিসহ কোনোও উপায়ে পুনরুৎপাদন বা প্রতিলিপি, বিতরণ বা প্রেরণ করা যাবে না। এই শর্ত লঙ্ঘিত হলে উপযুক্ত আইনি ব্যবস্থা গ্রহণ করা হবে।

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায়-০৬ : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রশ্নমালা-৬.১

প্রশ্নমালা-৬.২

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

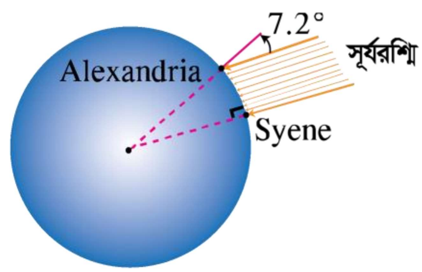
উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-06, Bangla Version, Page-35, Question-10, দেওয়া আছে, [2] কিন্তু হবে [-1]

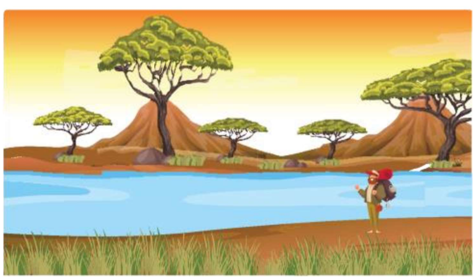
ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৬
ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

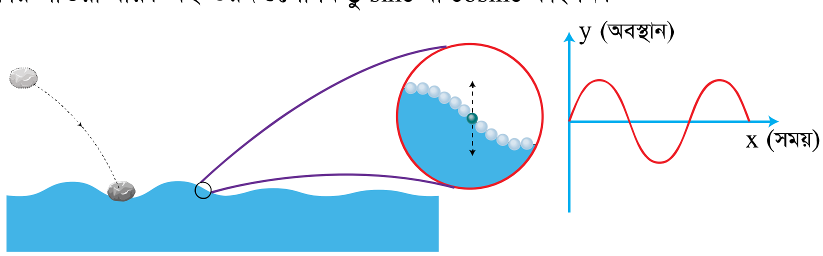
প্রায় ২০০০ বছর আগে গ্রীক গণিতবিদ এরাটোস্থেনিস Eratosthenes (276-195 BC) গোলাকার পৃথিবীর ধারণা থেকে এর পরিধি ও ব্যাসার্ধের মান পরিমাপ করেন। তিনি দেখেন একটি নির্দিষ্ট দিনে ভরদুপুরে সূর্যরশ্মি প্রাচীন মিশরের Syene (বর্তমান Aswan) নামক জায়গার একটি কুয়ার উপর সরাসরি লম্বভাবে আপতিত হয়। এতে ঐ কুয়ার চারিপাশে কোনো ছায়া পড়েনি। কিন্তু বছরের একই দিনে একই সময়ে Alexandria নামক জায়গায় তিনি একটি লাঠি দাঁড় করিয়ে রেখে দেখেন যে সেখানে ছায়া পড়েছে। অর্থাৎ, সূর্যরশ্মি লম্বভাবে পড়ে নাই, পড়েছে তীর্যকভাবে। তিনি পরিমাপ করে দেখেন, রশ্মিগুলো লাঠির সাথে 7.2° কোণে আপতিত হয়েছে। কিন্তু, পৃথিবী সমতল হলে কি এমন হওয়ার কথা ছিল? পরবর্তীতে Eratosthenes তার পর্যবেক্ষণ থেকে পৃথিবীর পরিধি ও ব্যাসার্ধ মাপতে সক্ষম হয়েছিলেন।





এখন চলো, বর্তমানে ফিরে এসে শহরের কোলাহলপূর্ণ পরিবেশ থেকে বেরিয়ে গ্রামে ভ্রমণ করি। নদী দেখার চেয়ে উত্তম আর কী হতে পারে? ধরো, সৌন্দর্য উপভোগ করার জন্য তুমি নদীর পাড়ে বসে আছো। চারিদিকের প্রকৃতি অত্যন্ত মনোমুগ্ধকর। নদীর অপর পাড়ের প্রকৃতি আরো সুন্দর; পাহাড়-পর্বত, সুউচ্চ বৃক্ষের সমারোহ। হঠাৎ নদীর পাড়ে বসে তোমার অপর পাড়ে অবস্থিত একটি গাছের উচ্চতা মাপার ইচ্ছা হলো। তুমি তো নদী পাড়ি দিয়ে ঐ গাছের মগডালে উঠে তার উচ্চতা মাপতে পারবে না (যদিও ইচ্ছা থাকলেই উপায় হয়)। এমতাবস্থায় তুমি কোণ, ত্রিভুজের জ্ঞানের সাহায্যে অনেক সহজে গাছের উচ্চতা মেপে ফেলতে পারবে। কীভাবে? চলো, পরবর্তী অংশে আমরা উপরে আলোচিত সমস্যা দুটির সমাধান খোঁজার চেষ্টা করি।

বিজ্ঞানের যুগে ত্রিকোণমিতির ধারণা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। আধুনিক জগতের কথা যদি বলি, কম্পিউটারে শব্দ বা সঙ্গীত শ্রবণের ক্ষেত্রেও লুকিয়ে আছে ত্রিকোণমিতি। কারণ, শব্দ তরঙ্গ আকারে প্রবাহিত হয়। এমনকি তুমি যদি একটি শান্ত পুকুরে ঢিল ছোঁড় তাহলে দেখবে, যে স্থানে ঢিল পানিকে স্পর্শ করেছে সেই স্থান থেকে চারিদিকে শক্তি তরঙ্গ আকারে প্রবাহিত হয়। আরও সূক্ষ্মভাবে পর্যবেক্ষণ করলে দেখবে পানির উপরস্থ প্রতিটি কণা স্থিতিস্থাপকতা দরুন নিজের জায়গায় থেকে উপরে-নিচে দুলতে থাকে। সাম্যাবস্থা হতে কণার সরণকে সময়ের সাথে লেখচিত্রে স্থাপন করলে তরঙ্গের আকার পাওয়া যায়। এই তরঙ্গগুলো কিন্তু sine বা cosine ফাংশন।



সেই প্রাচীনকাল থেকে নানা গণিতবিদের চেষ্টায় তিলে তিলে গড়ে উঠেছে ত্রিকোণমিতির জ্ঞানভাণ্ডার। এই অধ্যায় সেই জ্ঞানভাণ্ডারের সূচনামাত্র।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

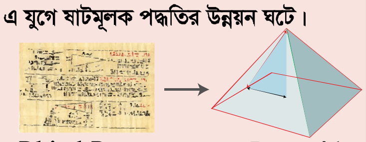
রোম যেমন একদিনে তৈরি হয়নি। ত্রিকোণমিতিও তেমনি একদিনে বা একজনের হাতে সম্পূর্ণতা পায়নি। ত্রিকোণমিতির ইতিহাস অনেক প্রাচীন, বিশাল ও কিছু কিছু ক্ষেত্রে বিতর্কিত। আমরা নিচে সংক্ষিপ্ত আকারে ত্রিকোণমিতির ইতিহাস সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব।

1800 BC Babylon

ব্যবলীয় সভ্যতায় গণিতবিদেরা জানত যে আয়তের একটি অংশ হল সমকোণী ত্রিভুজ। Plimpton 322 নামক ম্যানুস্ক্রিপ্ট এ ষাটমূলক পদ্ধতির উল্লেখ পাওয়া যায় সাথে সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় ও তাদের সম্পর্কের বিষয় উল্লেখ ছিল।

1550 BC Egyptians

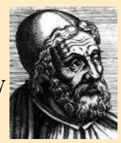
মিশরীয় সভ্যতায় পাওয়া Rhind Papyrus থেকে পিরামিডের নানান গণনা পাওয়া যায়। এ যুগে ষাটমূলক পদ্ধতির উন্নয়ন ঘটে।



Rhind Papyrus   Pyramid

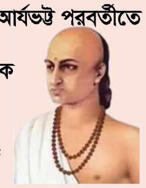
190 BC - 120 BC Greeks

গ্রীকদের মধ্যে Hipparchus এর অবদান বেশি। তাকে ত্রিকোণমিতির জনক বলা হয়। তিনি প্রথম ত্রিকোণমিতিক পদ্ধতিগত ব্যবহার করেন যার প্রমাণ পাওয়া যায়। Hipparchus ছাড়াও Ptolemy (100-170AC) তার Table of chords কাজের জন্য প্রসিদ্ধ।



200 - 600 AD Indians

ভারতবর্ষে সিদ্ধার্থ ও আর্যভট্ট পরবর্তীতে ভাস্করা-ও ও ব্রহ্মগুপ্ত বিপরীত ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ নিয়ে প্রচুর তত্ত্ব লিপিবদ্ধ করেন। আর্যভট্ট sine table তৈরি করেন।

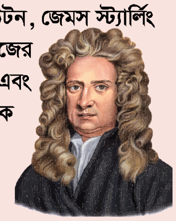


780 - 988 AD Persians

Muhammad Ibn Musa Al – Khwarizmi (780-847) প্রথম Table of tangents তৈরি করেন। তিনি নির্ভুলভাবে সাইন, কোসাইন টেবিল তৈরি করেন। Abu al-wafa Bujani (940-998) তিনি sin $(A \pm B)$ এর আধুনিক রূপ দান করেন। 15° অন্তর sine ও tangent এর table তৈরি করেন। secant, cosecant এবং সাইন সূত্র আবিষ্কার করে।

Morden era

স্যার আইজ্যাক নিউটন, জেমস স্ট্যার্লিং ত্রিকোণমিতিক সিরিজের বিস্তার নির্ণয় করেন এবং ত্রিকোণমিতি আধুনিক গণিতের গুরুত্বপূর্ণ অংশ হিসেবে উপনীত হয়।



ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

ত্রিকোণমিতিক প্রকারভেদ

ত্রিকোণমিতিকে কয়েকটি ভাগে ভাগ করা কঠিন এবং অনেকক্ষেত্রেই বিতর্কিত। তারপরেও সাধারণত গণিতবিদরা ত্রিকোণমিতিকে চার ভাগে ভাগ করেন। সেগুলো হলো:

(i) আদি ত্রিকোণমিতি: সমকোণী ত্রিভুজে কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করে।

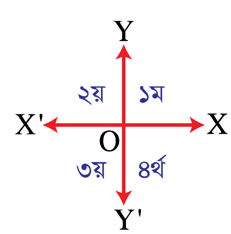
(ii) সমতলীয় ত্রিকোণমিতি: সমতলীয় ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করে।

(iii) গোলীয় ত্রিকোণমিতি: গোলীয় ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করে।

(iv) অ্যানালিটিক্যাল ত্রিকোণমিতি: লেখচিত্রে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন নিয়ে আলোচনা করে।

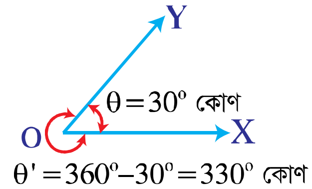
চতুর্ভাগ বা চৌকোণ (Quadrant)

পাশের চিত্রটি লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, পরস্পরচ্ছেদী দুইটি লম্ব সরলরেখা অর্থাৎ অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা কার্তেসীয় সমতল চারটি ভাগে বিভক্ত হয়েছে। এদের প্রত্যেকটি অংশকে একটি চতুর্ভাগ (Quadrant) বলা হয়। সমতলের $XOY, X'OY, X'OY'$ এবং XOY' অংশগুলোকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।



দ্বিমাত্রিক কোণ (Two-Dimensional Angle)

➲ জ্যামিতিক কোণ: **দুইটি সরলরেখা/রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হলে মিলন বিন্দুতে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয়। এই কোণ দুইটিকে বলা হয় জ্যামিতিক কোণ।**



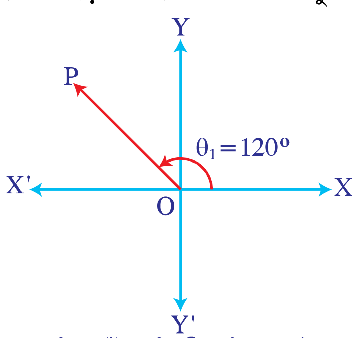
চিত্রে OX এবং OY দুইটি রশ্মি O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এখানে $\theta = 30°$ এবং $\theta' = 330°$ দুইটি কোণ তৈরি হয়েছে। θ কে কোণ এবং θ' কে প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়। অর্থাৎ, $0° < \theta < 180°$ হলে তাকে কোণ

এবং $180° < \theta < 360°$ হলে তাকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে। উল্লেখ্য, $\theta = 180°$ হলে, কোণ এবং প্রবৃদ্ধ কোণ একই। এক্ষেত্রে কোণদ্বয়কে সরলকোণ বলা হয়।

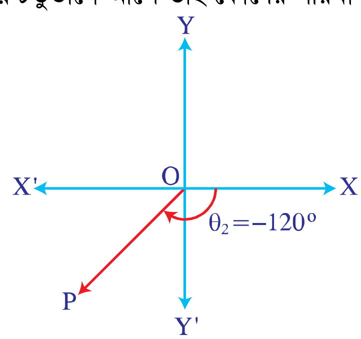
অর্থাৎ, $0° \leq$ জ্যামিতিক কোণ $< 360°$। **বলাই বাহুল্য, জ্যামিতিক কোণ ঋণাত্মক হতে পারে না।**

➲ ত্রিকোণমিতিক কোণ: **একটি স্থির অবস্থানকে কেন্দ্র করে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান হতে শেষ অবস্থানে আসতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ত্রিকোণমিতিক কোণ বলা হয়।** ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটার দিকে হলে ঋণাত্মক কোণ আর ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হলে ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন হয়।

মনে করি, XOX' ও YOY' রেখা দুইটি (যাদের যথাক্রমে x- অক্ষ ও y-অক্ষ বলা হয়) লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং সমতলকে চারটি ভাগে ভাগ করে। x- অক্ষের ধনাত্মক দিক ঘূর্ণায়মান রশ্মির আদি অবস্থানকে নির্দেশ করে। OP ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থানকে নির্দেশ করে। খেয়াল কর, ১ম চিত্রে OP ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $120°$ ঘুরে ২য় চতুর্ভাগে আসে তাই কোণের পরিমাণ $\theta_1 = 120°$। আবার, ২য় চিত্রে OP ঘড়ির কাঁটার দিকে $120°$ ঘুরে ৩য় চতুর্ভাগে আসে তাই কোণের পরিমাণ, $\theta_2 = -120°$ লিখা হয়।



ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন



ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণন

অর্থাৎ, ত্রিকোণমিতিক কোণ ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য (0) হতে পারে, এর কোনো সীমা নেই বা, $-\infty <$ ত্রিকোণমিতিক কোণ $< \infty$

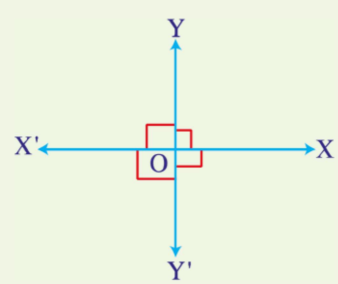
দ্বিমাত্রিক কোণের পরিমাপ (Measurement of two-dimensional angles)

আমরা এখন দ্বিমাত্রিক কোণের পরিমাপ পদ্ধতি সম্পর্কে জানবো। ত্রিকোণমিতিতে দ্বিমাত্রিক কোণের পরিমাপের জন্য সাধারণত তিনটি পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এ পদ্ধতিগুলো হলো:

(i) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System)
(ii) শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal System)
(iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

জেনে রাখো

দুইটি সরলরেখা যদি এমনভাবে আপতিত হয় যে সন্নিহিত কোণগুলো (পাশাপাশি থাকা কোণগুলো) পরস্পর সমান হয়, তাহলে কোণগুলোকে সমকোণ এবং সরলরেখাদ্বয়কে বলা হয় পরস্পরের উপর লম্ব। চিত্রে, XOX' এবং YOY' দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব এবং $\angle XOY$ এবং $\angle X'OY$ দুইটি সন্নিহিত কোণ যারা পরস্পর সমান। তাই এরা সমকোণ। অনুরূপভাবে, $\angle X'OY'$ এবং $\angle XOY'$ কোণ দুইটিও সমকোণ। সমকোণ একটি স্থির বা ধ্রুব (Constant) কোণ। তাই, ষাটমূলক ও শতমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়।



ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System):

এ পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করে তার প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি ডিগ্রীকে আবার সমান 60 ভাগে ভাগ করা হয় যার প্রতি 60 ভাগের এক ভাগকে বলা হয় এক (ষাটমূলক) মিনিট ($'$)। আবার, প্রতি মিনিটকে সমান 60 ভাগে ভাগ করা হয় যার প্রতি 60 ভাগের এক ভাগকে বলা হয় এক (ষাটমূলক) সেকেন্ড ($''$)।

অতএব, ষাটমূলক পদ্ধতিতে আমরা পাই,

1 সমকোণ $= 90 \times 1^\circ =$ 90 ডিগ্রি (90°).

1 ডিগ্রি $(1^\circ) = 60 \times 1' = 60'$ (অর্থাৎ ষাট মিনিট).

1 মিনিট $(1') = 60 \times 1'' = 60''$ (অর্থাৎ ষাট সেকেন্ড).

শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal System):

শতমূলক পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে, প্রতিটি ভাগকে এক গ্রেড বলা হয়। প্রতি গ্রেডকে আবার সমান 100 ভাগে ভাগ করে তার প্রতিটি ভাগকে এক (শতমূলক) মিনিট ($'$) বলা হয়। পুনরায়, প্রতি মিনিটকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে তার প্রতিটি ভাগকে এক (শতমূলক) সেকেন্ড ($''$) বলা হয়। অতএব, শতমূলক পদ্ধতিতে আমরা পাই,

1 সমকোণ $= 100 \times 1^g =$ 100 গ্রেড (100^g).

1 গ্রেড $(1^g) = 100 \times 1' =$ 100 মিনিট $(100')$.

1 মিনিট $(1') = 100 \times 1'' =$ 100 সেকেন্ড $(100'')$.

জেনে রাখো

ষাটমূলক এবং শতমূলক দুই পদ্ধতিতেই মিনিট এবং সেকেন্ড থাকলেও তাদের মান কিন্তু সমান না। তাই বোঝার সুবিধার্তে ষাটমূলক এবং শতমূলক শব্দটি উল্লেখ করে দেওয়া হয়েছে।

ষাটমূলক পদ্ধতি ও শতমূলক পদ্ধতির মধ্যকার সম্পর্ক নিম্নরূপ:

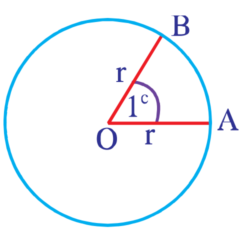
1 সমকোণ $= 90^\circ = 100^g \Rightarrow 90^\circ = 100^g \Rightarrow 1^\circ = \left(\frac{100}{90}\right)^g = \left(\frac{10}{9}\right)^g$

অর্থাৎ, 1 ডিগ্রি $= \frac{10}{9}$ গ্রেড।

আবার, $100^g = 90^\circ \Rightarrow 1^g = \left(\frac{90}{100}\right)^\circ \Rightarrow 1^g = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$

অর্থাৎ, 1 গ্রেড $= \frac{9}{10}$ ডিগ্রি

বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System):



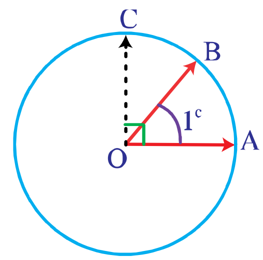
এ পদ্ধতিতে কোণ পরিমাপের একক হলো রেডিয়ান। **একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান বলে।** এক রেডিয়ানকে 1^c প্রতীকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। চিত্রে, AB বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r$। কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে রেডিয়ানকে বৃত্তীয় একক বলা হয়।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ যাই হোক না কেন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ দ্বারা বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন এক রেডিয়ান কোণের মান একটি ধ্রুবক। অর্থাৎ, রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।

চলো আমরা এই উক্তিটির সত্যতা যাচাই করি।

রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের (r) সমান বৃত্তচাপ AB। তাহলে, সংজ্ঞানুযায়ী $\angle AOB = 1^c$।



OA সরলরেখার O বিন্দুতে OC লম্ব আঁকি। তাহলে, $\angle AOC =$ এক সমকোণ এবং

বৃত্তচাপ, AC = বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4}.(2\pi r) = \frac{\pi r}{2}$

আমরা জানি যে, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

সুতরাং, $\frac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC} \Rightarrow \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } A}$

$\Rightarrow \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \Rightarrow \frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{2}{\pi}$

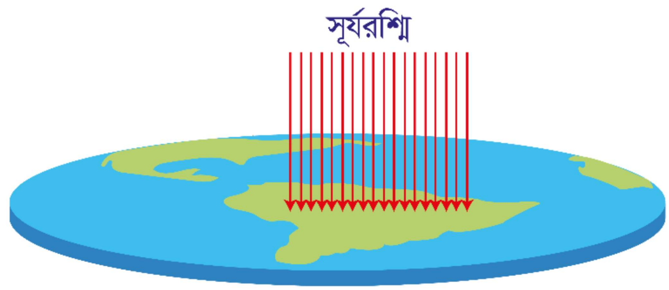
এখন, $\angle AOB$ এর স্থলে এক রেডিয়ান ও $\angle AOC$ এর স্থলে এক সমকোণ বসিয়ে পাই, $\frac{1 \text{ রেডিয়ান}}{\text{এক সমকোণ}} = \frac{2}{\pi}$

$\Rightarrow 1$ রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ।

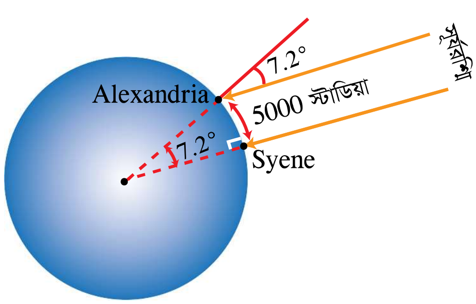
এখানে, $2, \pi$ এবং সমকোণ প্রত্যেকের মান ধ্রুবক। সুতরাং, এক রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ। তুমি যেকোনো বৃত্ত অঙ্কন কর না কেন, এক রেডিয়ানের মান সর্বদা সমান পাবে।

শুরুর দিকে Eratosthenes নিয়ে আলোচনা নিশ্চয় মনে আছে তোমাদের?

তোমরা জানো যে পৃথিবী গোল কিন্তু প্রাচীনকালে মানুষ সেটাও জানতো না। Eratosthenes এর ঐ পরীক্ষণের মাধ্যমে গোলাকার পৃথিবীর ধারণা শুরু হয়। কারণ, পৃথিবী সমতল হলে সূর্যরশ্মি সমান্তরাল ভাবে আপতিত হত। কিন্তু Eratosthenes এর পরীক্ষণে দেখা যায় Syene নামক জায়গায় লম্বভাবে পড়লেও Alexandria তে বছরের একই দিনে একই সময়ে উল্লম্বের 7.2° কোণে আপতিত হয়। একমাত্র গোলাকার পৃথিবীর ধারণাতেই এটা সম্ভব।



সমতল পৃথিবী



তিনি পরবর্তীতে Syene থেকে Alexandria-র দূরত্ব মেপে দেখেন তার পরিমাপ 5000 স্টেডিয়া (প্রাচীন গ্রীসে দূরত্বে একক) বা 800 km বা 500 miles বৃত্তের বৈশিষ্ট্য থেকে পরবর্তীতে তিনি একটি সমীকরণ তৈরি করেন।

$\frac{360^\circ}{7.2^\circ} = \frac{\text{পৃথিবীর পরিধি}}{\text{Alexandria থেকে Syene এর দূরত্ব}} \therefore \frac{360^\circ}{7.2^\circ} = \frac{\text{পৃথিবীর পরিধি}}{5000}$

$\therefore$ পৃথিবীর পরিধি = 250000 স্টেডিয়া = 25000 miles = 40,000 km

যা বর্তমানে নির্ণয়কৃত মানের প্রায় সমান।

পৃথিবীর পরিধির মান থেকে আমরা পৃথিবীর ব্যাস বা ব্যাসার্ধ ও নির্ণয় করে ফেলতে পারি।

$\therefore$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = \frac{40000}{2\pi}$ km [$\because$ পরিধি $= 2\pi r$]

$= 6366.2$ km (প্রায়)

ডিগ্রি ও রেডিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between Degrees and Radians)

উপরের আলোচনা থেকে পাই, $1^c = \frac{2}{\pi} \times 90°$

$\Rightarrow 1^c = \frac{180°}{\pi} \Rightarrow 1^c = \frac{180}{\pi} \times 1°$

$\Rightarrow \pi \times 1^c = 180 \times 1°$ [অর্থাৎ, 1^c এর $\pi(\approx 3.1416)$ গুণ, $1°$ এর 180 গুণ এর সমান]

$\Rightarrow \pi^c = 180°$

আবার, $180° = \pi^c \Rightarrow 180 \times 1° = \pi^c \Rightarrow 1° = \frac{\pi^c}{180}$

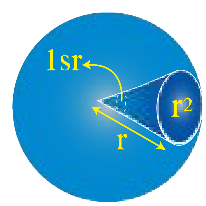
ধরি, একটি কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ যথাক্রমে $D°$ ও R^c।

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi^c}{180} \Rightarrow D \times 1° = \frac{D\times\pi\times1^c}{180} = R^c = R \times 1^c$

$\Rightarrow \frac{D\times\pi\times1^c}{180} = R \times 1^c \Rightarrow \frac{D\times\pi}{180} = R \therefore \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

ত্রিমাত্রিক কোণ ও এর পরিমাপ (Three-Dimensional Angle and its Measurement)

একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের বৃত্তাকার অংশ গোলকের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ত্রিমাত্রিক কোণ বা ঘনকোণ (Solid Angle) বলে, যার একক স্টেরেডিয়ান (sr)। একটি গোলকের ব্যাসার্ধের বর্গের সমান গোলক-পৃষ্ঠের অংশ গোলকের কেন্দ্রে যে ঘনকোণ তৈরি করে তাকে এক স্টেরেডিয়ান (1sr) বলে।



r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠের A ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট অংশ গোলকের কেন্দ্রে Ω ঘনকোণ উৎপন্ন করলে,

$\Omega = \frac{A}{r^2}$ sr. আমরা জানি, গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, $A = 4\pi r^2$. অর্থাৎ, সম্পূর্ণ গোলকপৃষ্ঠ দ্বারা গোলকের কেন্দ্রে উৎপন্ন ঘনকোণ, $\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ sr.

কোণের ষাটমূলক, বৃত্তীয় ও শতমূলক পদ্ধতির পারস্পরিক রূপান্তর সংক্রান্ত সমস্যাবলী (Problems related to interconversion of sexagesimal, centesimal, and circular systems of angle)

উদাহরণ-০১: $\frac{7\pi}{20}$ রেডিয়ানকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। **[JU'14-15, 18-19]**

সমাধান: $D = \frac{R}{\pi} \times 180°$

$= \frac{\frac{7\pi}{20}}{\pi} \times 180°$

$= 63°$

Ans: $63°$

তোমরা চাইলে,
$\pi^c = 180°$ তে পরিবর্তন করে করতে পার।
$\therefore \frac{7\pi^c}{20} = \frac{7\times180°}{20} = 63°$

উদাহরণ-০২: **$50° 37' 30''$** কে রেডিয়ানে বা বৃত্তীয় এককে প্রকাশ কর।

সমাধান: আমরা জানি, $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ এবং $1' = \left(\frac{1}{60}\right)°$

এখানে, $30'' = \left(\frac{30}{60}\right)' = \left(\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{\frac{1}{2}}{60}\right)° = \left(\frac{1}{2\times60}\right)° = \left(\frac{1}{120}\right)°$ এবং $37' = \left(\frac{37}{60}\right)°$

$\therefore 50° 37' 30'' = 50° + \left(\frac{37}{60}\right)° + \left(\frac{1}{2\times60}\right)° = \frac{6000+74+1}{120} = \left(\frac{405}{8}\right)°$

$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ হতে, $\therefore R = \frac{D}{180} \times \pi = \frac{405}{8\times180} \times \pi = \frac{9\pi}{32}$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৩: **$27^g\ 57'\ 36''$ কে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় এককে রূপান্তর কর।**

সমাধান: আমরা জানি, $1' = \left(\frac{1}{100}\right)^g$ এবং $1'' = \left(\frac{1}{100\times100}\right)^g$

এখানে, $36'' = \left(\frac{36}{100}\right)' = \left(\frac{36}{100\times100}\right)^g$ এবং $57' = \left(\frac{57}{100}\right)^g$

$\therefore 27^g\ 57'\ 36'' = 27^g + \left(\frac{57}{100}\right)^g + \left(\frac{36}{100\times100}\right)^g$

$= \left(\frac{270000+5700+36}{10000}\right)^g$

$= 27.5736^g$

$\therefore 27.536^g = \left(27.5736\times\frac{9}{10}\right)^\circ = 24.81624^\circ = \left(24.81624\times\frac{\pi}{180}\right)^c = 0.433^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

উদাহরণ-০৪: **দুইটি কোণের সমষ্টি এবং অন্তর যথাক্রমে $\frac{2\pi}{5}$ এবং 18° কোণ। কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, কোণ দুইটি x° ও y°.

এখন, $\frac{2\pi^c}{5} = \frac{2\times180^\circ}{5} = 72^\circ$

শর্তানুসারে, $x + y = 72 \ldots\ldots\ldots$ (i) এবং $x - y = 18 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $x = 45$ এবং (i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই, $y = 27$

Ans: 45° এবং 27°

উদাহরণ-০৫: **কোন ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর প্রগমন শ্রেণিভুক্ত। এর সর্বোচ্চ কোণের রেডিয়ান ও সর্বনিম্ন কোণের ডিগ্রি অনুপাত $\pi : 90$। কোণ তিনটি ডিগ্রিতে নির্ণয় কর।** [CB'15]

সমাধান: মনে করি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $(a-d)^\circ$, a° ও $(a+d)^\circ$ আমরা জানি, তিনটি কোণের সমষ্টি 180°.

$\therefore (a-d) + a + a + d = 180^\circ$

$\Rightarrow a - d + a + a + d = 180^\circ \Rightarrow 3a = 180^\circ$ বা, $a = 60^\circ$

এখানে সর্বনিম্ন কোণ $= (a-d)^\circ = (60-d)^\circ$

এবং সর্বোচ্চ কোণ $= (a+d)^\circ = (60+d)^\circ = (60+d)\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi(60+d)}{180}$ রেডিয়ান

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\pi(60+d)}{180} : (60-d) = \pi : 90$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi(60+\ )}{180}}{60-d} = \frac{\pi}{90} \Rightarrow \frac{60+d}{180(60-d)} = \frac{1}{90}$$

$\Rightarrow 2(60-d) = 60 + d \Rightarrow 120 - 2d = 60 + d \Rightarrow 3d = 60 \Rightarrow d = 20$

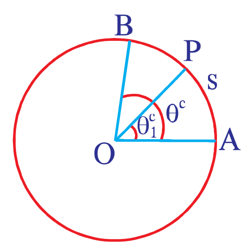
অতএব, কোণ তিনটি যথাক্রমে $40^\circ, 60^\circ$ এবং 80°।

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (Determination of length of arc)

আমরা জানি, কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে 1^c (এক রেডিয়ান) কোণ বলে। চিত্রে $\angle AOP = 1^c$ যেখানে বৃত্তচাপ, $AP = s = r$ ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং AB একটি বৃত্তচাপ যার দৈর্ঘ্য, $AB = s$। বৃত্তচাপটি বৃত্তের কেন্দ্রে θ^c কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, বৃত্তচাপ কর্তৃক বৃত্তের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ ঐ চাপের সমানুপাতিক।



$\therefore \angle AOB \propto$ চাপ AB

$\Rightarrow \frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ AP}}$

$\Rightarrow \frac{\theta^c}{1^c} = \frac{s}{r}$

$\Rightarrow \frac{s}{r} = \theta$ [θ বৃত্তীয় কোণ/রেডিয়ান কোণ]

$\therefore s = r\theta$

এখন আমরা, কোণের মান ডিগ্রীতে রেখে কীভাবে বৃত্তের চাপ বের করতে হয় দেখবো। ধরি, AB চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $\angle AOB = \theta_1^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।অর্থাৎ, θ_1 একটি ষাটমূলক কোণ।

এখানে, $\theta_1^\circ = \theta^c \therefore \left(\frac{\theta_1 \pi}{180}\right)^c = \theta^c$। $[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}]$

$\therefore$ AP চাপ $= s = r\,\theta^c = \frac{r\,\theta_1\,\pi}{180}$

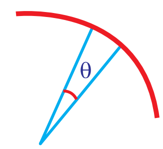
উদাহরণ-০৬: **একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 56° উৎপন্ন করলে, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।** **[BB'15]**

সমাধান: দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 8$ cm

বৃত্তচাপ কর্তৃক কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 56^\circ = \left(56 \times \frac{\pi}{180}\right)^c$

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= r \times \theta = 8 \times 56 \times \frac{\pi}{180} = 7.82$ cm

উদাহরণ-০৭: **দুইটি স্থান পৃথিবীর কেন্দ্রে $45'$ কোণ উৎপন্ন করে। ভূপৃষ্ঠে স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6400$ km]**



সমাধান: এখানে, $\theta = 45' = \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{45}{60} \times \frac{\pi}{180}\right)^c$

$\therefore$ স্থানদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $s = R\theta$

$= 6400 \times \frac{45}{60} \times \frac{\pi}{180}$ km $[\because R = 6400 \text{ km}] = \frac{80\pi}{3}$km (**Ans.**)

উদাহরণ-০৮: **80 m ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 20 m লম্বা বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, বৃত্তচাপ, $s = 20$ mm এবং ব্যাসার্ধ, $r = 80$mm

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ, $\theta = \frac{s}{r} = \left(\frac{20}{80}\right)^c = \left(\frac{1}{4}\right)^c$ (**Ans.**)

উদাহরণ-০৯: **একটি গরুকে 8.1 মিটার লম্বা দঁড়ির সাহায্যে একটি খুঁটির সঙ্গে বাধা হল। যদি গরুটি দঁড়িটিকে সর্বদা টান রেখে পরিভ্রমণ করে, তবে গরুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে যেখানে 70° কোণ চিহ্নিত করে?**

সমাধান: দেওয়া আছে, উৎপন্ন কোণ, $\theta = 70^\circ = \left(70 \times \frac{\pi}{180}\right)^c$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 8.1$ m

$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, $s = r\theta = \left(8.1 \times 70 \times \frac{\pi}{180}\right)$ m $= 9.9$ m (প্রায়) (**Ans.**)

উদাহরণ-১০: **একটি গাড়ি বৃত্তাকার পথে প্রতি সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 28° কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 60 মিটার হয়, তবে গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 28^\circ = 0.4887^c$ (প্রায়) এবং বৃত্তের ব্যাস, $d = 60$m $\therefore r = 30$m

$\therefore$ বৃত্তচাপ, $S = r\theta = 30 \times 0.4887^c = 14.66$ m (প্রায়)

অর্থাৎ, গাড়ি 1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 14.66m

$\therefore$ গাড়ি 3600 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $= (14.66 \times 3600)$m [$\because$ 1 ঘণ্টা $= 3600$ সেকেন্ড]

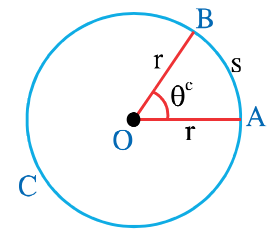
$= 52778.76$m (প্রায়) $= 52.79$ km (প্রায়)

$\therefore$ গতিবেগ $= 52.79\ \text{kmh}^{-1}$ (**Ans.**)

Shortcut

গতিবেগ $= \frac{1 \text{ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব} \times 3600}{1000}\text{kmh}^{-1} = \frac{14.66 \times 3600}{1000} = 52.79\ \text{kmh}^{-1}$

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Determination of area of sector)



চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r. OAB বৃত্তকলাটি বৃত্তের কেন্দ্রে θ^c কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore AB = s = r\theta$; যেখানে θ একটি রেডিয়ান কোণ।

O কেন্দ্রবিশিষ্ট ৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

$\therefore 2\pi r$ পরিধি বা একটি পূর্ণ চাপ πr^2 বর্গ এককবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল সৃষ্টি করে।

$\therefore$ AB চাপ কর্তৃক সৃষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\pi r^2}{2\pi r} \times AB$

$= \frac{r}{2} \times s = \frac{r}{2} \times r\theta = \frac{1}{2} r^2\theta$

অর্থাৎ, AB চাপ দ্বারা সৃষ্ট বৃত্তকলাটির ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r^2\theta$ বর্গ একক যেখানে θ রেডিয়ান এককে।

চলো এখন আমরা, কোণের মান ডিগ্রীতে রেখে কীভাবে ক্ষেত্রফল বের করতে হয় দেখবো। ধরি, AB চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $\angle AOB = \theta_1^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। $\therefore \left(\frac{\theta_1\pi}{180}\right)^c = \theta^c$. $[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}]$

$\therefore$ AOB এর ক্ষেত্রফল$= \frac{1}{2}r^2\theta^c = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\theta_1\pi}{180} = \frac{\theta_1}{360}\pi r^2$ [যেখানে, θ_1 ডিগ্রী পরিমাপে]

উদাহরণ-১১: একটি বৃত্তচাপ 30 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। চাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর **[JB'15]**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta = 60^\circ = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{\pi^c}{3}$

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta = \left\{\frac{1}{2} \times (30)^2 \times \frac{\pi}{3}\right\} m^2$

$= 471.24\ m^2$

বিকল্প: এখানে, $\theta_1 = 60^\circ$

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta_1}{360}\pi r^2 = \frac{60}{360} \times \pi \times 30^2$

$= 471.24\ m^2$

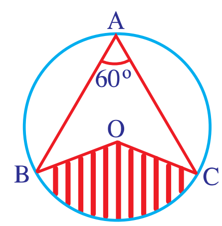
উদাহরণ-১২: একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 56° উৎপন্ন করলে, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[BB'15]**

সমাধান: দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 8$ cm

বৃত্তচাপ কর্তৃক কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 56^\circ = \left(56 \times \frac{\pi}{180}\right)^c$

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times r^2 \times \theta = \frac{1}{2} \times (8)^2 \times 56 \times \frac{\pi}{180} = 31.28\ cm^2$

উদাহরণ-১৩: বৃত্তের ক্ষেত্রফল 49π হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান: $\because$ কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

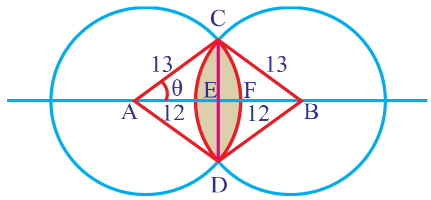
$\therefore \angle BOC = 2 \times \angle BAC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{2\pi^c}{3}$

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 \Rightarrow 49\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 49 \therefore r = 7$ একক।

$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times r^2\theta = \frac{1}{2} \times (7)^2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{49}{3}\pi$ বর্গ একক। **(Ans.)**

উদাহরণ-১৪: চিত্রে, 13 সে.মি. ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত পরস্পর উপরিপাতিত হয়ে তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 24 সে.মি.। সাধারণ অংশের পরিধি ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর



সমাধান: ΔCAE- এ $AE = \frac{1}{2}AB = 12$

$\cos\theta = \frac{AE}{AC} = \frac{12}{13}$ বা, $\theta = 0.3948$ রেডিয়ান

সাধারণ অংশের পরিধি $= 2 \times$ চাপ $CD = 2 \times 13 \times \angle CAD$

$= 2 \times 13 \times 2\theta$

$= 2 \times 13 \times 2 \times 0.3948 = 20.5$ সে.মি.

সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল $= 2 \times CDF$ অংশের ক্ষেত্রফল

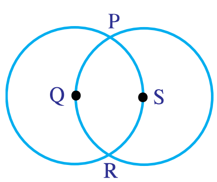
$= 2(ACD$ বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $- \Delta ACD$- এর ক্ষেত্রফল$)$

$= 2\left[\frac{1}{2} \times AC^2 \times \angle CAD - \frac{1}{2} \times AD \times AC \times \sin\angle CAD\right]$

$= 2\left[\frac{1}{2} \times 13^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times 13^2 \times \sin 2\theta\right] = 2\left[\frac{1}{2} \times 13^2 \times 2 \times 0.3948 - \frac{1}{2} \times 13^2 \times \sin(2 \times 0.3948)\right]$

$= 2\,[66.7212 - 60.0011] = 13.44$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ-১৫:

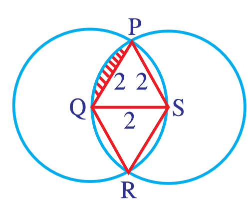


চিত্রে 2 একক ব্যাসার্ধ এবং **Q** ও **S** কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে **P** ও **R** বিন্দুতে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করে। **PQRS** ক্ষেত্রের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: P, Q; Q, S এবং P, S যোগ করি।

ফলে ΔPQS একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার $PQ = QS = PS = 2$ একক এবং $\angle P = \angle Q = \angle S = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \Delta PQS$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.2^2 = \sqrt{3}$ বর্গ একক। $[\because a = PQ = 2$ একক$]$



PQS বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}.2^2.\frac{\pi}{3}$ বর্গ একক । $[\because a = PQ = 2$ একক$]$

$= \frac{2\pi}{3}$ বর্গ একক

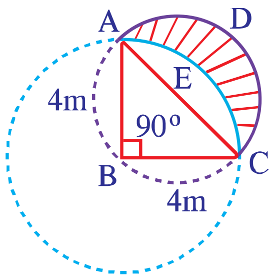
$\therefore$ PQ রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ বৃত্তের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

$\therefore$ PQRS ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta PQS$ এর ক্ষেত্রফল $+ 4 \times$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= \left\{2\sqrt{3} + 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)\right\}$ বর্গ একক

$= \left(2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

$= \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

উদাহরণ-১৬: 

চিত্রে ABC সমকোণী ত্রিভুজে ADC একটি অর্ধবৃত্ত ও AECB একটি বৃত্তকলা। বৃত্তাংশ AEC এর দৈর্ঘ্য এবং AECD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $AB = BC = 4m$

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ মিটার

ADC অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$ মিটার

$\therefore$ ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 8 = 4\pi$ বর্গ মিটার

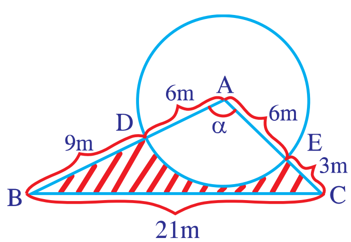
AEC এর দৈর্ঘ্য $= r\theta = 4 \times \frac{\pi}{2} = 6.28$ মিটার

$\therefore$ AECB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}4^2 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$ বর্গ মিটার

ΔABC অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ বর্গ মিটার

$\therefore$ AECD এর ক্ষেত্রফল = ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − AEC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ADC অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল − (AECB এর ক্ষেত্রফল − ΔABC এর ক্ষেত্রফল) $= 4\pi - 4\pi + 8 = 8$ বর্গ মিটার

উদাহরণ-১৭: 

চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [RB'17]

সমাধান: cosine সূত্র হতে পাই,

$\cos\alpha = \frac{15^2+9^2-21^2}{2.15.9} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore \alpha = 120° = \left(120 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \frac{2\pi^c}{3}$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 15 \times 9 \times \sin 120° = \frac{135\times\sqrt{3}}{4} m^2$

ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times r^2\theta$

$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2\pi}{3} = 12\pi\ m^2$

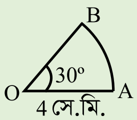
$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \frac{135\times\sqrt{3}}{4} - 12\pi = 20.76m^2$ (প্রায়)

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ সূত্রটি তোমরা পরবর্তী অধ্যায়ে জানতে পারবে।

টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন

■ কোণের ষাটমূলক, বৃত্তীয় ও শতমূলক পদ্ধতির পারস্পরিক রূপান্তর সংক্রান্ত সমস্যাবলি
■ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় ■ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয়

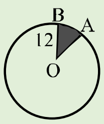
বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. 

OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.? [Din.B'19]

(a) 1.05 (b) 2.09 (c) 4.19 (d) 8.38

সমাধান: (c); $\pi \times 4^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = 4.19$ sq. cm.

02. 

$\angle AOB = 30^o$ এবং $OB = 12$ একক হলে, AOB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কোনটি? [CB'17]

(a) π (b) 2π (c) 12π (d) 24π

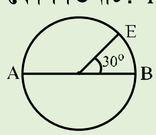
সমাধান: (c); বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (12)^2 = 12\pi$

03. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, কোণ তিনটির পরিমাপ হবে- [JB'19]

(a) $30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ (b) $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$
(c) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ (d) $50^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

সমাধান: (c); $3x + 4x + 5x = 180^\circ \therefore x = 15^\circ \therefore$ কোণ তিনটি: $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$।

04. 

; AB = 6cm, চাপ BE =? [RB'17]

(a) $\frac{\pi}{2}$ cm (b) $\frac{3\pi}{2}$ cm (c) π cm (d) 2π cm

সমাধান: (a); ব্যাসার্ধ, $r = 3$cm ; $\theta = 30^\circ$

$= \frac{\pi}{6}$; $S = r\theta = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ cm

এডমিশন MCQ ও সমাধান

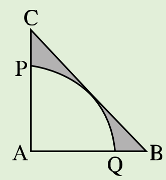
05. যদি 6 একক ব্যাসার্ধ ও O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি ব্যাস AB ও CD হয় এবং $\angle AOD = 160^\circ$ হয়, তবে AOC ও BOD বৃত্তাংশদ্বয়ের মোট ক্ষেত্রফল কত একক হবে? [RU'17-18]

(a) 4π (b) 6π (c) 7.5π (d) 3π

সমাধান: (a); $2 \times \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= 2 \times \frac{20^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 6^2 = 4\pi$ বর্গ একক।

06. The isosceles right triangle has a side AC of length 5 cm and PQ shows the arc of a circle centered at A. Find the area of the shaded region given below. [IUT'19-20]



(a) 1.2547 cm^2 (b) 2.4142 cm^2
(c) 1.8174 cm^2 (d) 2.6825 cm^2

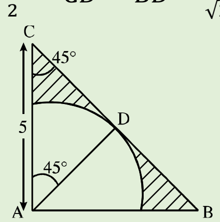
Solution: (d); ΔABC, isosceles right triangle

$\therefore AB = AC = 5$ cm

$\therefore BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ cm

If, D is the midpoint of BC then,

$CD = BD = \frac{5\sqrt{2}}{2} \therefore CD = BD = \frac{5}{\sqrt{2}}$ cm



Again, as ΔADC is isosceles, $AD = CD = \frac{5}{\sqrt{2}}$ cm

$\therefore$ Area of the shaded region

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{4} \times \pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.6825$ cm^2

07. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 24^o কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তের ব্যাস 49 মিটার হয় তবে বৃত্ত কলার ক্ষেত্রফল কত? [BUTEX'16-17]

(a) 125.72 sq. meter (b) 124.72 sq. meter
(c) 123.72 sq. meter (d) 122.72 sq. meter

সমাধান: (a); ক্ষেত্রফল $= \frac{24}{360} \times \pi \times \left(\frac{49}{2}\right)^2$ m^2

$= 125.72$ m^2

08. $\frac{7\pi}{15}$ রেডিয়ানকে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে কোনটি হবে? [JU'18-19, 14-15]

(a) 84° (b) 85° (c) 86° (d) 87°

সমাধান: (a); $\frac{7\pi}{15} = \frac{7 \times 180^\circ}{15} = 84^\circ$

09. একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ যথাক্রমে $72°53'51''$ এবং $37°6'9''$ হলে তৃতীয় কোণটির মান রেডিয়ানে কত? **[JU'18-19]**

(a) $\frac{\pi}{18}$ (b) $\frac{5\pi}{18}$ (c) $\frac{7\pi}{18}$ (d) $\frac{11\pi}{18}$

সমাধান: (c); $x = 180 - 72°53'51'' - 37°6'9''$
$= 70° = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$

10. 5 cm ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি চাপ কেন্দ্রে 40° কোণ উৎপন্ন করলে ঐ চাপের দৈর্ঘ্য কত cm? **[KU'19-20]**

(a) 3.491 (b) 3.520 (c) 3.641 (d) 4.00

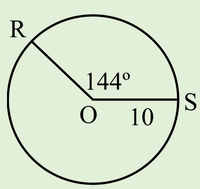
সমাধান: (a); $r = 5\text{cm}, \theta = 40° = \left(40 \times \frac{\pi}{180}\right)$
$= \frac{2\pi}{9}$ $\therefore s = r\theta = 5 \times \frac{2\pi}{9} = \frac{10\pi}{9}$
$= 1.11\pi = 3.491$ cm

11. If a particle reaches one end of a diameter from other end along circumference of a circle of radius 35 cm in 10 second then what is its average velocity in cm? **[KU'17-18]**

(a) 3.5 (b) 7 (c) 11 (d) 109

Solution: (b); $v = \frac{s}{t} = \frac{2r}{t} = \frac{2\times35}{10} = 7\text{cms}^{-1}$

12. In the following circle, what is the length of arc RS? **[IUT'17-18]**

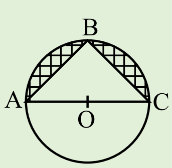


(a) 8 (b) 20 (c) 8π (d) 20π

Solution: (c); $RS = OS \times \theta = 10 \times \left(\frac{144\times\pi}{180}\right) = 8\pi$

বোর্ড সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

01. **[RB'19]**



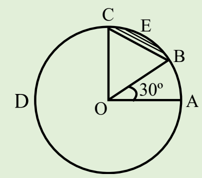
ব্যাসার্ধ $OC = 6.5$ cm ও $BC = 5$ cm

(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. ব্যাসার্ধ, $r = OC = 6.5\text{cm}$
$AC = 13\text{cm}$ ও $BC = 5\text{cm}$. $\angle B = 90°$
$\therefore$ ΔABC সমকোণী এ অতিভুজ AC
$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$ $\boxed{AB = 12}$
অর্ধবৃত্ত ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi r^2$ cm^2
$= \frac{1}{2}\pi(6.5)^2$ cm$^2 = 66.366$ cm^2
$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{1}{2} \times AB \times BC\sin 90°\right)$ cm^2
$= \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 5 \times 1\right)$ cm$^2 = 30$ cm^2
$\therefore$ নির্ণেয় ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল
$= (66.366 - 30)$ cm$^2 = 36.366$ cm^2 **(Ans.)**

02. **[Ctg.B'19]**



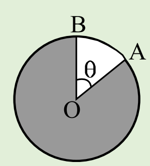
$\angle AOC = 90°$, $OA = 2$

(খ) চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. OBC বৃত্তাংশটুকুর ক্ষেত্রফল, $S_1 = \frac{\pi r^2\theta}{360}$ বর্গ একক
$= \frac{\pi\times2^2\times60}{360}$ বর্গ একক
$\therefore S_1 = \frac{2\pi}{3}$ বর্গ একক
এখন, ΔOBC একটি ত্রিভুজ যার $OC = OB = 2 = r$ এবং $\angle BOC = 60°$
$\therefore$ Δ OBC এর ক্ষেত্রফল$= \frac{1}{2} \times OC \times OB \times \sin60°$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin60° = \sqrt{3}$ বর্গ একক
ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ বর্গ একক **(Ans.)**

03. দৃশ্যকল্প-১: **[BB'19]**

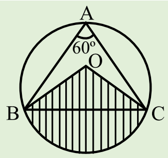


$\theta = 58°$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ প্রদর্শিত বৃত্তের পরিধি 31.416 সে.মি. হলে বৃত্তটির ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. পরিধি $= 31.416 \Rightarrow 2\pi r = 31.416$
$\therefore r = 5$ সে.মি. ; $\theta = 58° = \left(\frac{58\times\pi}{180}\right)^c$
$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 - \frac{\pi r^2\theta}{2\pi}$
$= \pi \times 5^2 - 12.654 = 65.8858$ cm^2

04. দৃশ্যকল্প-১ : 

[SB'19]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বৃত্তের ক্ষেত্রফল 49π হলে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

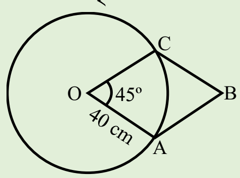
সমাধান

খ. $\angle BAC = 60° \therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 120°$

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= 49\pi \times \frac{120°}{360}$

$= \frac{49}{3}\pi$ **(Ans.)**

05. দৃশ্যকল্প-২: OABC একটি রম্বস এবং OAC বৃত্তকলা O কেন্দ্রিক বৃত্তের অংশ। [Din.B'19]



(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ABCA অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান

খ. OABC রম্বসের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin\angle AOC$

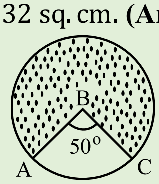
$= 40 \times 40 \times \sin 45° = 800\sqrt{2}$ sq. cm.

OACO বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল$= \pi r^2 \times \frac{45°}{360°}$

$= \pi \times 40^2 \times \frac{1}{8} = 200\pi$ sq. cm.

$\therefore$ ABCA অংশের ক্ষেত্রফল$= (800\sqrt{2} - 200\pi)$ sq. cm.

$= 503.05232$ sq. cm. **(Ans.)**

06. দৃশ্যকল্প-২: 

[All.B'18]

(গ) AB = 5 সে.মি. হলে গাঢ় অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান

গ. ব্যাসার্ধ, $r = AB = 5$ cm

ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল, $A_1 = \frac{1}{2} r^2 \theta$

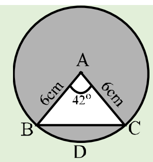
$= \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{50\pi}{180} = 10.9083 cm^2$

সমগ্র বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A_2 = \pi r^2$

$= \pi \times 5^2 = 78.5398 cm^2$

$\therefore$ গাঢ় অংশের ক্ষেত্রফল $= A_2 - A_1$

$= 67.6315\ cm^2$ **(Ans.)**

07. 

[DB'17]

(ক) বৃত্তকলা ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2

(গ) ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 6$cm

এবং $\theta = 42° = \frac{42\pi}{180} = \frac{7\pi}{30}$

অতএব, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{r^2\theta}{2} = \frac{21\pi}{5}$ বর্গ সে.মি.

গ. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 36\pi$

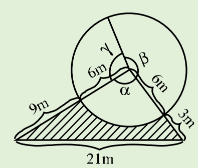
$= 36 \times 3.1416$ বর্গ সে.মি.$= 113.10$ বর্গ সে.মি.

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 42°$

$= 18 \sin 42° = 12.04$ বর্গ সে.মি.

অতএব, নির্ণেয় ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল

$= 113.10 - 12.04 = 101.06$ বর্গ সে.মি.

08. 

[RB'17]

(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. প্রদত্ত ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য 15 মি., 21 মি. ও 9 মি. $\therefore$ অর্ধ-পরিসীমা, $s = \frac{15+21+9}{2} = 22.5$

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল,

$= \sqrt{22.5(22.5-15)(22.5-21)(22.5-9)}$

$= \sqrt{22.5 \times 7.5 \times 13.5} = 58.46$ বর্গ একক।

আবার, ত্রিভুজটির একটি কোণ $= \alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{(15)^2+9^2-21^2}{2.15.9} = \frac{306-441}{270} = \frac{-135}{270}$

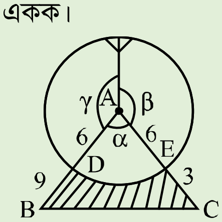
$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0.5) = 2.099$ রেডিয়ান

$\therefore$ ADE বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

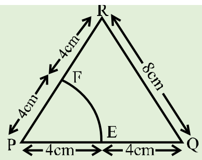
$= \frac{1}{2} \times 2.099 \times 6^2 = 37.782$

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= (58.46 - 37.782)$

$= 20.68$ বর্গ একক।



09. দৃশ্যকল্প-১: [Ctg.B’17]



(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ PEF একটি বৃত্তকলা হলে, EQRF এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. ΔPQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = \frac{\sqrt{3}\times 64}{4}$

$= \sqrt{3} \times 16 = 16\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

এখন, $\cos p = \frac{8^2+8^2-8^2}{2\times8\times8} \Rightarrow \cos p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos p = \cos 60° \Rightarrow p = 60° = \frac{\pi}{3}$

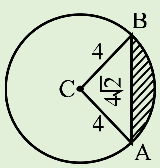
$\therefore$ বৃত্তকলা PEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2 p$

$= \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ EQRF এলাকার ক্ষেত্রফল $= \left(16\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right)$

$= 16\sqrt{3} - \frac{8\times3.1416}{3} = 19.3$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

10. দৃশ্যকল্প-১: [BB’17]



(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. ΔABC এ $AB = 4\sqrt{2}$

$AC = 4, BC = 4$

এখন, $AC^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

$(4\sqrt{2})^2 = AB^2 \therefore$ ABC সমকোণী

এবং $\angle C = 90° = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

এখন, ABC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times 4^2 = \frac{\pi}{4} \times 16 = 4\pi$ বর্গ একক।

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ বর্গ একক।

$\therefore$ ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল $= (4\pi - 8)$

$= (4 \times 3.1416 - 8) = 4.57$ বর্গ একক (প্রায়)।

11. (ক) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6371 কি.মি.। ঢাকা ও দিল্লী পৃথিবীর পৃষ্ঠের দুটি স্থান। ঢাকা ও দিল্লীর মধ্যবর্তী দূরত্ব 1882 কি.মি. হলে, স্থান দুটি পৃথিবীর কেন্দ্রে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করবে? [CB’19]

সমাধান

ক. আমরা জানি, $s = r\theta$

$\therefore \theta = \frac{s}{r} = \left(\frac{1882}{6371}\right)^c = \frac{1882}{6371} \times \frac{180}{\pi} = 16.925°$

$\therefore 16.925°$ কোণ তৈরি করবে।

12. দৃশ্যকল্প-১: A কলেজ থেকে একজন সাইকেল আরোহী প্রতি মিনিটে 250 মিটার বেগে B কলেজে পৌঁছাল। কলেজ দুটি পৃথিবীর কেন্দ্রে $1°5'$ কোণ উৎপন্ন করে। [JB’19]

(খ) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে সাইকেল আরোহীর A কলেজ থেকে B কলেজে যেতে কত ঘণ্টা সময় লাগবে তা নির্ণয় কর। 8

সমাধান

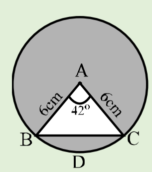
খ. $s = r\theta = vt$ এখন, $v = 250$ meter/min

$\theta = 1°5' = 0.0189077$ rad

$\therefore t = \frac{r\theta}{v} = \frac{6440\times10^3\times0.0189077}{250}$

$= 487.0632$ min $= 8.12$ hr **(Ans.)**

13. [DB’17]



(খ) ABDC এর পরিসীমা নির্ণয় কর। 8

সমাধান

খ. মনে করি, বৃত্তচাপ BDC এর দৈর্ঘ্য $= s$

সুতরাং $s = r\theta \Rightarrow s = 6 \cdot \frac{7\pi}{30} = \frac{7\pi}{5}$ সে.মি.

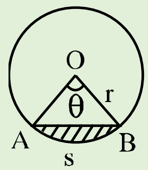
অতএব, ABDC এর পরিসীমা $= 6 + \frac{7\pi}{5} + 6$

$= \frac{30+7\pi+30}{5} = \frac{60+7\pi}{5}$ সে.মি.

এডমিশন লিখিত প্রশ্ন ও সমাধান

14. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm এবং AB চাপের দৈর্ঘ্য 14 cm। কোণ $\angle AOB$ এর মান বের কর এবং চাপ AB ও জ্যা AB দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[BUET'17-18]**

সমাধান



দেয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 10$ cm, AB চাপের দৈর্ঘ্য $s = 14$ cm

আমরা জানি, $s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r} = \frac{14}{10} = 1.4^c$ [রেডিয়ান] **(Ans.)**

ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল − ΔAOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times r^2\theta - \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}r^2\{1.4 - \sin(1.4^c)\}$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\{1.4 - \sin(1.4^c)\}$

$= 50 \times \{1.4 - 0.985\}$

$= 50 \times 0.415 = 20.73$ বর্গ সে.মি. **(Ans.)**

[**Note:** θ এর মান রেডিয়ানে আছে। তাই ক্যালকুলেটরে ডিগ্রি Mode থাকলে $\sin\left(1.4 \times \frac{180}{3.14}\right)$ এর মান বের করতে হবে।]

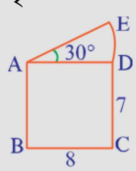
নিজে করো

01. রেডিয়ান বা বৃত্তীয় এককে প্রকাশ কর: (i) $18°33'45''$ (ii) $73°7'30''$ **[Ans: (i) $\frac{33\pi}{320}$ (ii) $\frac{13\pi}{32}$]**

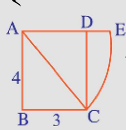
02. ডিগ্রিতে বা ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর: (i) $\frac{5\pi}{16}$ রেডিয়ান, (ii) $\frac{47\pi}{16}$ রেডিয়ান, (iii) $\frac{7\pi}{15}$ রেডিয়ান। **[Ans: (i) $56°15'$ (ii) $528°45'$ (iii) $84°$]**

03. একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটি সমান্তর শ্রেণিভুক্ত। ক্ষুদ্রতম ও মধ্যম কোণ দুইটিকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে তাদের অনুপাত 3 : 5। কোণগুলির মান রেডিয়ানে নির্ণয় কর। **[Ans: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}$]**

04. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 24° কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তের ব্যাস 49 মিটার হয়, তবে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য এবং এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[JB'15] [Ans: 10.26 মিটার; 125.716 বর্গমিটার]**

05. 

চিত্রে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 8 মিটার ও 7 মিটার এবং DAE ক্ষেত্রটি একটি বৃত্তকলা। ABCDE সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: 72.755 বর্গমিটার (প্রায়)]**

06. 

চিত্রে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 4 মিটার ও 3 মিটার এবং ACE ক্ষেত্রটি একটি বৃত্তকলা। CDE ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: 5.5912 বর্গমিটার (প্রায়)]**

07. একটি বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে 40° কোণ উৎপন্ন করে। যদি বৃত্তের ব্যাস 20 সে. মি. হয়, তবে বৃত্তচাপটির উপর দণ্ডায়মান বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: 139.63 বর্গমিটার]**

08. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার হলে পৃথিবীর উপর যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $32''$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব নির্ণয় কর। **[Ans: 1 কিলোমিটার (প্রায়)]**

09. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তিত হয়ে 800 মিটার অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **[Ans: 0.6366 মিটার]**

10. O কেন্দ্রবিশিষ্ট 8.5 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের পরিধির উপর A ও B দুইটি বিন্দু। যদি C বিন্দুটি বৃত্তের বৃহৎ বৃত্তচাপ AB এর উপর অবস্থান করে $\angle ACB = 0.4$ rad কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে বৃত্তটির ক্ষুদ্রচাপ AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[Ans: 6.8 cm]**