প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-০৭ : সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরিফ ও আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
২২০/-
(দুইশত বিশ টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় ***উদ্ভাসের*** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায়-০৭ : সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ক্র. নং	বিষয়বস্তু	পৃষ্ঠা
০১	সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি	০৯
০২	ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের সমষ্টি সংক্রান্ত	১৩
০৩	tangent অথবা cotangent অনুপাত গুলোর গুণ আকৃতি	১৮
০৪	বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক সূত্র ব্যবহার করে মান নির্ণয়	২০
	প্রশ্নমালা-৭.১	
০৫	যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	২৫
০৬	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত	২৯
০৭	$A \pm B$ সংক্রান্ত সূত্রাবলি	৩১
০৮	বিস্তৃতি সংক্রান্ত	৩৭
০৯	$\frac{\cos A \pm \sin A}{\cos A \mp \sin A}$ সূত্রাবলি সংক্রান্ত	৩৮
১০	$A+B=$ ধ্রুবক সংক্রান্ত	৩৮
১১	ত্রিকোণমিতিক রাশির সর্বোচ্চ/ সর্বনিম্ন মান নির্ণয়	৪০
	প্রশ্নমালা-৭.২	
১২	$\sin(A+B)\pm\sin(A-B)$ বা $\cos(A+B)\pm\cos(A-B)$ সংক্রান্ত সূত্রাবলি	৪৩
১৩	$TF_1(C)\pm TF_2(D)$ সংক্রান্ত	৪৭
১৪	$\sin A+\cos A$ সংক্রান্ত	৪৯
	প্রশ্নমালা-৭.৩	
১৫	গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	৫২
১৬	2A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত সমস্যাবলি	৫৩
১৭	ধারা সংক্রান্ত	৫৮
১৮	পর্যায়ক্রমিক বর্গমূল সংক্রান্ত	৬০
১৯	3A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	৬৩
২০	নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	৬৫
২১	2A ও 3A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করে অন্যান্য গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়	৬৭
	প্রশ্নমালা-৭.৪	
২২	উপগুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	৭১
২৩	প্রমাণ সংক্রান্ত	৭২
২৪	$\cos x+\cos y$ ও $\sin x+\sin y$ এর মান থেকে বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় সংক্রান্ত	৭৫
	প্রশ্নমালা-৭.৫	
২৫	ত্রিকোণমিতিক অভেদ	৮২
২৬	tangent ও cotangent সংক্রান্ত	৮৩
২৭	sine ও cosine সংক্রান্ত	৮৫
	প্রশ্নমালা-৭.৬	
২৮	ত্রিভুজের ধর্মাবলি	৯৭
২৯	ত্রিভুজের সাইন সূত্র (sine rule) সংক্রান্ত	৯৯
৩০	ট্যানজেন্ট সূত্র (tangent rule or Napier's formula)	১০৫
৩১	ট্যানজেন্ট সূত্র সংক্রান্ত সমস্যাবলি	১০৬
৩২	কোসাইন সূত্র (cosine rule)	১০৭
৩৩	ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র সংক্রান্ত	১০৮
৩৪	অভিক্ষেপ সূত্র (Projection rule)	১১১
৩৫	লম্ব অভিক্ষেপ সংক্রান্ত	১১২
৩৬	প্রগমন/অনুক্রম এবং ধারা সংক্রান্ত	১১৬
৩৭	ত্রিভুজের অর্ধ-কোণ সমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	১১৯
৩৮	ত্রিভুজ সমাধানের কৌশল	১২০
৩৯	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত	১২১
৪০	ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত	১২৩
৪১	শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের প্রকৃতি নির্ণয়	১২৬
	প্রশ্নমালা-৭.৭	
৪২	Brainstorming Question	১৩১
৪৩	একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র	১৩১
৪৪	গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম	১৩৩

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে . . .

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-07, Bangla Version, Page-17, Question-14, দেওয়া আছে, (1) কিন্তু হবে (0)

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৭ সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সাগর অনেক মেধাবী এবং ভ্রমণপিপাসু। দেশ-বিদেশ ভ্রমণ করেও সাগরের ভ্রমণের পিপাসা মেটেনি। মহাকাশ থেকে পৃথিবীকে দেখার ইচ্ছা তার অনেক দিনের। সৌভাগ্যবশত নাসা সিদ্ধান্ত নেয় যে, তারা সারা পৃথিবী থেকে দশজন মেধাবীকে আন্তর্জাতিক স্পেস স্টেশনে একমাস ভ্রমণ করার সুযোগ দিবে। নানা ধরনের কঠিন পরীক্ষা-নিরীক্ষার মাধ্যমে দশজনকে বাছাই করা হলো যার মধ্যে স্থান হলো বাংলাদেশের প্রখর মেধাবী সাগরের। সাগরের অনেক দিনের ইচ্ছা পূরণ হলো।

সাগর এখন মহাকাশে। নাসার প্রোগ্রামের অংশ হিসেবেই প্রত্যেককে প্রতিদিন নানা রকমের কাজ করতে দেওয়া হয়। একদিন সাগরকে বলা হলো বাংলাদেশের উপর দিয়ে যাওয়ার সময় আন্তর্জাতিক স্পেস স্টেশন থেকে টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার দূরত্ব বের করতে। সাগর মনে মনে হাসল কারণ সাগরের ত্রিকোণমিতির জ্ঞান ছিল। (ফলে সে নিমিষেই sextant যন্ত্র ও টেকনাফ থেকে তেঁতুলিয়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব বিবেচনায় আন্তর্জাতিক স্পেস স্টেশন হতে জায়গা দুটির দূরত্ব নির্ণয় করে ফেলল।)

যদি তোমরাও সাগরের মত দ্রুত আন্তর্জাতিক স্পেস স্টেশন হতে টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার দূরত্ব বের করতে চাও তাহলে অধ্যায়টি মনোযোগ সহকারে পড়ো।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

গণিতশাস্ত্রের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা হলো ত্রিকোণমিতি। ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণের মধ্যকার সম্পর্কের বিষয়টি ত্রিকোণমিতিতে আলোচনা করা হয়। ত্রিকোণমিতির ইতিহাস অনেক প্রাচীন, বিশাল ও কিছু কিছু ক্ষেত্রে বিতর্কিত। আমরা নিচে সংক্ষিপ্ত আকারে ত্রিকোণমিতির ইতিহাস জানার চেষ্টা করব।

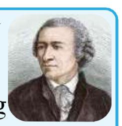
300 BC: ব্যবলনীয়ানরা কোণ পরিমাপে ষাট মূলক পদ্ধতি ব্যবহার করেন। তারা প্রথম তারা গুলোকে স্থানাঙ্ক হিসেবে প্রকাশ করেন।

180-125 BC: Hipparchus বৃত্তের জ্যা এর উপর 12টি বই লিখেছিলেন যা ত্রিকোণমিতির সর্বপ্রথম কাজ হিসেবে ধারণা করা হয়।

100 CE: গোলকীয় ত্রিকোণমিতির উপর সর্বপ্রথম কাজ করা হয় যা Menelaus spherica নামে পরিচিত।

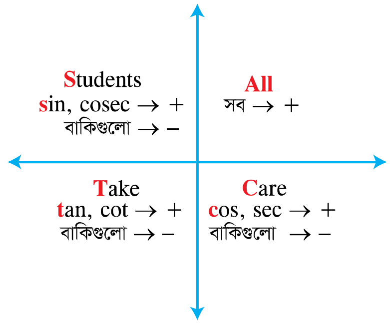
100 - 178 CE: এই সময় Claudius Ptolemy ত্রিকোণমিতির উপর গুরুত্বপূর্ণ কাজ করেছেন। তার বিখ্যাত কাজ হলো Mathematike Syntaxis (Mathematical Collection) যা Almagest নামে

Modern era: আধুনিক ত্রিকোণমিতি প্রতিষ্ঠায় গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন Isaac Newton এবং James Stirling যা থেকে Leonhard Euler (1748) আধুনিক ত্রিকোণমিতির সূচনা করেন।



সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি (Trigonometric equations containing associated angles)

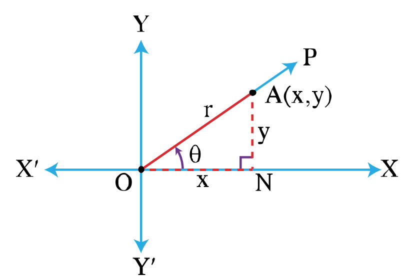
তোমরা ইতোপূর্বে ষষ্ঠ অধ্যায়ে চতুর্ভাগগুলোয় কোণের ত্রিকোণমিতি ফাংশনের চিহ্ন কী হবে জেনেছো। নিচে আবারও সার সংক্ষেপ দেওয়া হল:



এখন এই অধ্যায়ে আমরা θ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করার চেষ্টা করবো। এখন প্রশ্ন হল θ সংযুক্ত কোণ কী?
$(0 \times 90^\circ \pm \theta), (1 \times 90^\circ \pm \theta), (2 \times 90^\circ \pm \theta), (3 \times 90^\circ \pm \theta), (4 \times 90^\circ \pm \theta)$ ...ইত্যাদি আকারের কোণকে θ সংযুক্ত কোণ বলে (উল্লেখ্য, θ একটি সূক্ষ্মকোণ)।
অর্থাৎ, যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণকে $n \times 90^\circ \pm \theta$ আকারে লিখা যায় (যেখানে, n হল যেকোনো পূর্ণসংখ্যা)। যেমন: 1590° একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ, যাকে $17 \times 90^\circ + 60^\circ$ বা $18 \times 90^\circ - 30^\circ$ আকারে লিখা যায়।
তাহলে চলো θ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নিয়ে আলোচনা করি।

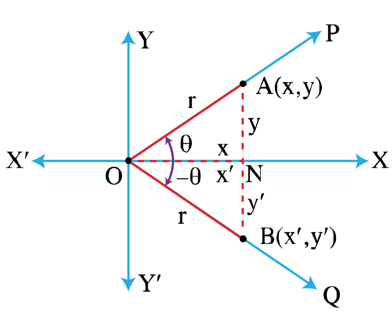
θ বা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। OP রেখার উপর যেকোনো বিন্দু A থেকে XOX' এর উপর AN লম্ব অঙ্কন করি। $\therefore \angle XOA = \theta$.
ΔOAN এ, $\angle AON = \theta$, $\angle ANO = 90^\circ$ এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y)
$ON = x$, $AN = y$ এবং ধরি, $OA = r$ সুতরাং $\sin\theta = \frac{y}{r}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$.
$\cos\theta = \frac{x}{r}$; $\sec\theta = \frac{r}{x}$.
$\tan\theta = \frac{y}{x}$; $\cot\theta = \frac{x}{y}$.



$(-\theta)$ বা ঋণাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি ঐ একই অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে ঘুরে θ কোণের সম-পরিমাণের $\angle XOQ$ উৎপন্ন করে। $\therefore \angle XOQ = -\theta$।
OP রেখার উপর যেকোনো বিন্দু A থেকে XOX' এর উপর AN লম্ব অঙ্কন করি। AN কে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন OQ কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

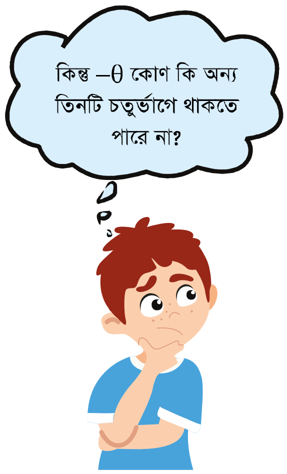


ΔOAN ও ΔOBN এ, $\angle AON = \angle BON = \theta$, $ON = ON$ [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]
$\angle ONA = \angle ONB = 90^\circ$
অতএব, $\Delta OAN \cong \Delta OBN$.
$\therefore AN = BN$ । ধরি, $OA = OB = r$
এবং, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y')
$x = ON, y = AN$ এবং $x' = ON, y' = -BN$
$\therefore x' = x$ এবং $y' = -BN = -AN = -y, \therefore y' = -y$
এখন, $\sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$; $\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta, \cot(-\theta) = -\cot\theta$.

আচ্ছা আমরা শুরুতে বলেছিলাম θ সূক্ষ্মকোণ। তাই $(-\theta)$ এর দরুন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে।



অবশ্যই থাকতে পারে। সেক্ষেত্রে কী $(-\theta)$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মত ফলাফল পাব?

বুঝানোর স্বার্থে আমরা ধরে নেই $(-\theta)$ যেকোন ঋণাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণ হতে পারে। খেয়াল কর, $(-\theta)$ এর এমন মান নেওয়া হয়েছে যেন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে থাকে। তার বিপরীতে ধনাত্মক θ কোণ ২য় চতুর্ভাগে থাকবে। যেমন: $-120°$ কোণের দরুন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে এবং $120°$ কোণ ২য় চতুর্ভাগে থাকে।

এখানে, $\Delta AON \cong \Delta OBN$.

$AN = BN$ । ধরি, $OA = OB = r$

এবং A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y')

$x = -ON, y = AN$ এবং $x' = -ON, y' = -BN$

$\therefore x' = x$ এবং $y' = -BN = -AN = -y$, $\therefore y' = -y$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r}$ (y হলো ত্রিকোণমিতিক লম্ব)

$\sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$

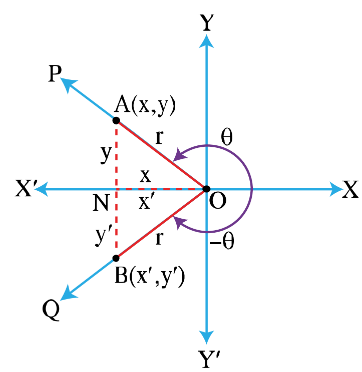
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$ (x হলো ত্রিকোণমিতিক ভূমি)

$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$

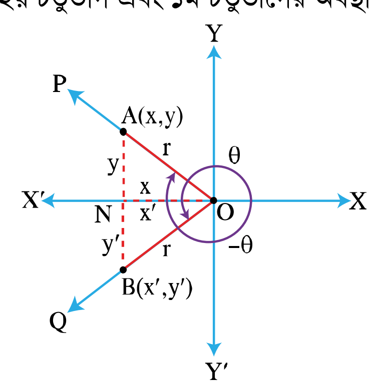
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$,

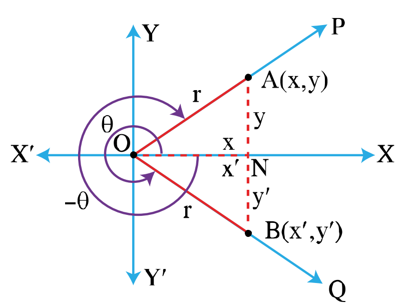
$\sec(-\theta) = \sec\theta, \cot(-\theta) = -\cot\theta$,

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



অনুরূপভাবে, $(-\theta)$ এর ঘূর্ণায়মান রশ্মির ২য় চতুর্ভাগ এবং ১ম চতুর্ভাগের অবস্থানের জন্যও সূত্রগুলো প্রমাণ করা যায়। তোমাদের সুবিধার জন্য নিচে ঘূর্ণায়মান রশ্মির ২য় চতুর্ভাগ এবং ১ম চতুর্ভাগের অবস্থানের চিত্র দেয়া হল। এখন নিজ দায়িত্বে প্রমাণ করার চেষ্টা কর।





অর্থাৎ, θ এর যেকোনো ঋণাত্মক ত্রিকোণমিতিক কোণের জন্য নিম্নোক্ত সম্পক পাওয়া যাবে

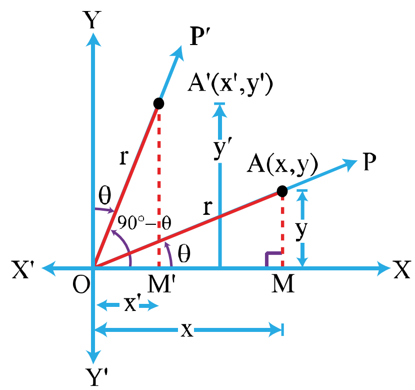
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

এখন, আমরা ধনাত্মক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করব।

$(90° - \theta)$ বা $(1 \times 90° - \theta)$ অর্থাৎ θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি প্রথমে $\angle XOP = \theta$ কোণ এবং পরবর্তীতে $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। এরপর ঘড়ির কাঁটার দিকে $\angle YOP' = \theta$ কোণে ঘুরে OP' অবস্থানে গিয়ে স্থির হয়। তাহলে $\angle XOP' = (90° - \theta)$

OP এবং OP' এর উপর দুইটি বিন্দু যথাক্রমে A ও A′ নিই যেন $OA = OA'$ হয়। A ও A′ হতে XOX′ (বা x অক্ষ) রেখার উপর যথাক্রমে AM ও A′M′ লম্ব টানি। ΔOAM এবং ΔOA′M′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।



$\therefore OM = A'M'$ এবং $AM = OM'$ ।

ধরি, A ও A′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y') এবং $OA = OA' = r$ হলে, $y' = x$ এবং $x' = y$

এখন, $\sin(90° - \theta) = \sin XOP' = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$। $\therefore \sin 90° - \theta = \cos\theta$

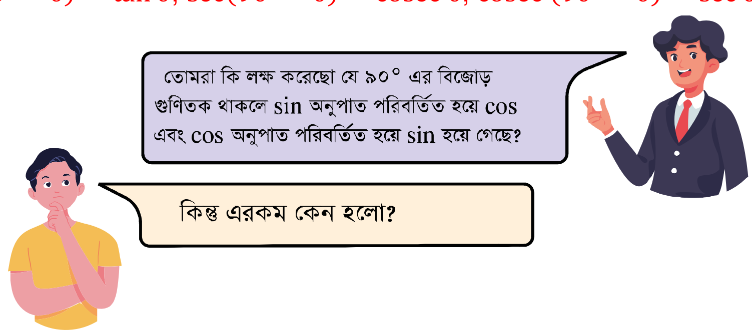
এখন, $\sin(90° - \theta) = \sin XOP' = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta$ । $\therefore \sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \cos XOP' = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta$ ।

$\therefore \cos 90° - \theta = \sin\theta$ $\cos(90° - \theta) = \cos\ XOP' = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta$ । $\therefore \cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\tan(90° - \theta) = \tan XOP' = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \cot\theta$ । $\therefore \tan(90° - \theta) = \cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$, $\sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$



তোমরা লক্ষ করে দেখো তো $(90° - \theta)$ কোণযুক্ত ত্রিভুজের [ΔA′OM′] লম্ব হলো A′M′, যা θ কোণ যুক্ত ত্রিভুজের [ΔAOM] ভূমি OM এর সমান? আবার লক্ষ করো $(90° - \theta)$ কোণ যুক্ত ত্রিভুজের ভূমি হলো OM′ , যা θ কোণ যুক্ত ত্রিভুজের লম্ব AM এর সমান। কিন্তু উভয় ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য একই। এভাবে 90° এর বিজোড় গুণিতক কোণ যুক্ত ত্রিভুজের ভূমি এবং লম্ব θ কোণ যুক্ত ত্রিভুজের লম্ব এবং ভূমির সাথে Exchange হয়ে যায় নিম্নরূপে: ভূমি→ লম্ব এবং লম্ব→ভূমি

তাই, 90° এর বিজোড় গুণিতক কোণ যুক্ত ত্রিভুজের লম্ব ও অতিভুজের অনুপাত θ কোণ যুক্ত ত্রিভুজের ভূমি ও অতিভুজের অনুপাতের সমান। অর্থাৎ, sine অনুপাত cosine অনুপাতের সমান। একইভাবে cosine অনুপাত হয়ে যায় sine অনুপাতের সমান। ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের এই ধরনের পরিবর্তনকে বলা হয় Co-function এর পরিবর্তন। চলো Co-function সম্পর্কে বিস্তারিত জেনে নিই।

Cofunction:

আমরা আগেই আলোচনা করেছি, θ সংযুক্ত কোণ বলতে $(n \times 90° \pm \theta)$ আকারের ত্রিকোণমিতিক কোণকে বুঝায়। যেখানে θ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং n হলো পূর্ণসংখ্যা। নিচে θ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করার নিয়ম দেওয়া হয়েছে।

খেয়াল কর, $$\underbrace{\begin{array}{l}\sin(90° - \theta) = \cos\theta \ ; \ \tan(90° - \theta) = \cot\theta \\ \cos(90° - \theta) = \sin\theta \ ; \ \cot(90° - \theta) = \tan\theta\end{array}}_{f(90° - \theta) = g(\theta)}$$

$(90° - \theta)$ ও θ কোণদ্বয় পরস্পর পূরক কোণ। যে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের (f ও g) কারণে তারা সমান হয় তাদেরকে (f ও g) একে অপরের co-function বলে। যেমন: উপরেই দেখেছি $\sin(90° - \theta)$ ও $\cos\theta$ সমান এবং $(90° - \theta)$ ও θ পরস্পর পূরক কোণ। তাহলে একটি ফাংশনকে sine বলা হলে অপরটিকে co-funciton of sine বা cosine বলা হয়। তেমনি tangent (tan) ও co-funciton of tangent (cotangent বা cot); secant (sec) ও co-function of secant (cosecant বা cosec) এর ক্ষেত্রেও একই কথা প্রযোজ্য।

নিয়ম: আমরা যেকোনো ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে $TF(n \times 90° \pm \theta°)$ হিসেবে প্রকাশ করতে পারি যেখানে,

TF = Trigonometric function → (sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant)

CTF = Co Trigonometric function → (cosine, sine, cotangent, tangent, cosecant, secant)

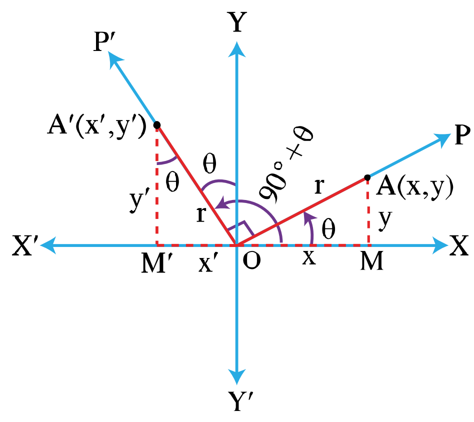
$(90° + \theta)$ বা $(1 \times 90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX থেকে O বিন্দুর সাপেক্ষে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপর দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং আরো ঘুরে $\angle POP' = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, $\angle XOP' = 90° + \theta$ ও $\angle YOP' = \theta$.

OP এবং OP′ এর উপর দুইটি বিন্দু যথাক্রমে A ও A′ নেয়া হলো যেন OA = OA′ হয়। এখন A ও A′ থেকে OX ও OX′ এর উপর যথাক্রমে AM ও A′M′ লম্ব আঁকি।

এখন, ΔOAM এবং $\Delta OA'M'$ এ, $\angle AOM = \angle YOA' =$ একান্তর $\angle OA'M' = \theta, \angle OMA = \angle OM'A' = 90°$

এবং $OA = OA'$.



অতএব, $\Delta OAM \cong \Delta OA'M'$.

$\therefore OM = A'M'$ ও $AM = OM'$

ধরি, $OA = OA' = r$

এবং A ও A′ বিন্দু স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y').

তাহলে, $x = OM, y = AM$ এবং $x' = -OM', y' = A'M'$

$x' = -OM' = -AM = -y$

এবং $y' = A'M' = OM = x$

$\Rightarrow \sin(90° + \theta) = \sin XOA' = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos XOA = \cos\theta$ । $\therefore \sin(90° + \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° + \theta) = \cos XOA' = \frac{x'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin XOA = -\sin\theta$ । $\therefore \cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

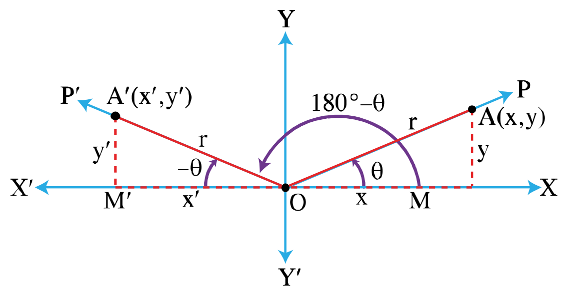
$\tan(90° + \theta) = \tan XOA' = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot XOA = -\cot\theta$ ।$\therefore \tan(90° + \theta) = -\cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta, \sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

$(180° - \theta)$ বা $(2 \times 90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করি, কোণ উৎপন্নকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মি প্রথমে $\angle XOP = \theta$ কোণ এবং পরবর্তীতে $\angle XOX' = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে, ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে θ কোণ ঘুরে, $\angle XOP' = 180° - \theta$.

OP এবং OP' এর উপর দুইটি বিন্দু যথাক্রমে A ও A' নেওয়া হলো যেন $OA = OA$ হয়। A ও A' হতে XOX' রেখার উপর যথাক্রমে AM এবং $A'M'$ লম্ব টানি। OAM এবং $OA'M'$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।



$\therefore OM = OM', AM = A'M'$

এবং A ও A' বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y').

এবং $OA = OA' = r$ হলে $x' = -x, y' = y$

$\because \sin(180° - \theta) = \sin XOP' = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta$

$\therefore \sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$\because \cos(180° - \theta) = \cos XOP' = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$

$\therefore \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

এবং $\tan(180° - \theta) = \tan XOP' = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

$\therefore \tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

সুতরাং, $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$, $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

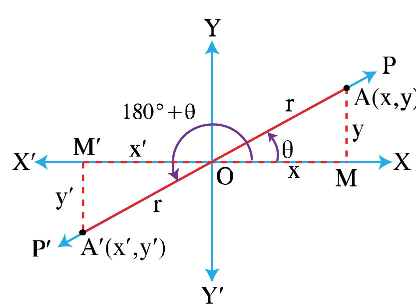
$(180° + \theta)$ বা $(2 \times 90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

ধরি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির আদি অবস্থান OX থেকে O বিন্দুর সাপেক্ষে যদি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং আরো ঘুরে $\angle POP' = 180°$ কোণ উৎপন্ন করে। ফলে, OP ও OP' রেখা দুইটি একই সরলরেখা এবং $\angle XOP' = 180° + \theta$। তাহলে, $\angle X'OP' = \theta$. এখন OP ও OP' এর উপর যথাক্রমে A ও A' দুইটি বিন্দু নিই যেন, $OA = OA'$ হয় এবং A ও A' থেকে OX ও OX' এর উপর যথাক্রমে AM ও $A'M'$ লম্ব আঁকি। এখন, ΔOMA ও $\Delta OM'A'$ এ, $\angle AOM =$ বিপ্রতীপ $\angle A'OM' = \theta$, $\angle OMA$

$= \angle OM'A' = 90°$ এবং $OA = OA'$

$\therefore \Delta OMA \cong \Delta OM'A'$

$\therefore OM = OM'$ এবং $AM = A'M'$.



ধরি, $OA = OA' = r$

এবং A ও A' বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও (x', y').

তাহলে, $x = OM, y = AM$ এবং $x' = -OM', y' = -A'M'$

এখানে, $x' = -OM' = -OM = -x$, $\quad \therefore x' = -x$

এবং $y' = -A'M' = -AM = -y$, $\quad \therefore y' = -y$

অতএব, $\sin(180° + \theta) = \sin XOA' = \frac{y'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin XOA = -\sin\theta$ $\therefore \sin(180° + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(180° + \theta) = \cos XOA' = \frac{x'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos XOA = -\cos\theta$ $\therefore \cos(180° + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180° + \theta) = \tan XOA' = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan XOA = \tan\theta$ $\therefore \tan(180° + \theta) = \tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$, $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

$(270° - \theta)$ বা $(3 \times 90° - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

ধরি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে আসে এবং $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। পরবর্তীতে আরও ঘুরে $\angle XOP' = 270° - \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন OP ও OP′ এর উপর যথাক্রমে A ও A′ দুইটি বিন্দু নেই যেন, $OA = OA'$ হয় এবং A ও A′ থেকে OX ও OX′ এর উপর যথাক্রমে AM ও A′N লম্ব আঁকি।

এখন, ΔOMA ও $\Delta ONA'$ এ, $\angle AOM = \angle A'OY' =$ একান্তর $\angle OA'N = \theta$, $\angle OMA = \angle ONA' = 90°$ এবং $OA = OA'$

এখানে, $\Delta OAM \cong \Delta OA'N \therefore OA = OA'; AM = ON; OM = A'N$

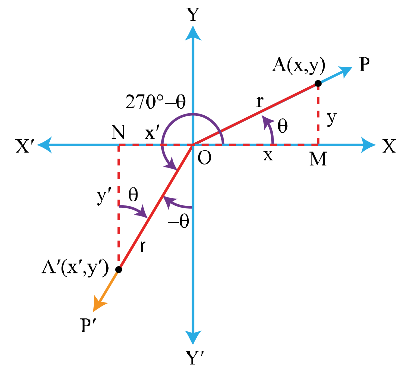
$\therefore x' = -ON; y' = A'N \therefore x = OM = A'N = y'$

$\therefore y = AM = ON = -x'$ এখন, $\sin\theta = \frac{AM}{OA} = \frac{y}{r}$

$\cos(270° - \theta) = \frac{ON}{OA'} = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta \therefore \cos(270° - \theta) = \sin\theta$

$\tan\theta = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{x}$

$\cot(270° - \theta) = \frac{ON}{A'N} = \frac{-x'}{-y'} = \frac{y}{x} = \tan\theta \therefore \cos(270° - \theta) = \tan\theta$



অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

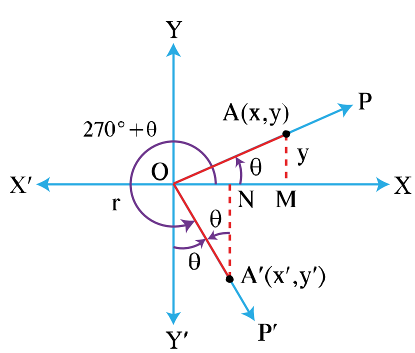
$\operatorname{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta, \sec(270° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\tan(270° - \theta) = \cot\theta; \sin(270° - \theta) = -\cos\theta.$

$(270° + \theta)$ বা $(3 \times 90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

ধরি, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে আসে এবং $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। পরবর্তীতে আরও ঘুরে $\angle XOP' = 270° + \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন OP ও OP′ এর উপর যথাক্রমে A ও A′ দুইটি বিন্দু নেই যেন, $OA = OA'$ হয় এবং A ও A′ থেকে OX ও OX′ এর উপর যথাক্রমে AM ও A′N′ লম্ব আঁকি।

এখন, ΔOMA ও $\Delta ONA'$ এ, $\angle AOM = \angle A'OY' =$ একান্তর $\angle OA'N = \theta, \angle OMA = \angle ONA' = 90°$ এবং $OA = OA'$



এখানে, $\Delta OAM \cong \Delta OA'N$

$\therefore OA = OA'; AM = ON; OM = A'N \therefore x = OM = A'N = -y'$

$\therefore y = AM = ON = x'$ এখন, $\sin\theta = \frac{AM}{OA} = \frac{y}{r}$

$\cos(270° + \theta) = \frac{ON}{OA'} = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta$ । $\therefore \cos(270° + \theta) = \sin\theta$

$\tan\theta = \frac{AM}{OM} = \frac{y}{x}$

$\cot(270° + \theta) = \frac{ON}{A'N} = \frac{x'}{-y'} = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$ ।

$\therefore \cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\operatorname{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta, \sec(270° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta; \sin(270° + \theta) = -\cos\theta.$

$(360° - \theta)$ বা $(4 \times 90° - \theta)$ এবং $(360° + \theta)$ বা $(4 \times 90° + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যথাক্রমে $(-\theta)$ ও $(+\theta)$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অনুরূপ।

➲ এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

জেনে রাখো

01. $\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta, \tan(-\theta) = -\tan\theta,$
$\text{cosec}\,(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta, \cot(-\theta) = -\cot\theta.$
02. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta, \cos(90° - \theta) = \sin\theta, \tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\sin(90° + \theta) = \cos\theta, \cos(90° + \theta) = -\sin\theta, \tan(90° + \theta) = -\cot\theta.$
03. $\sin(180° - \theta) = \sin\theta, \cos(180° - \theta) = -\cos\theta, \tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta, \cos(180° + \theta) = -\cos\theta, \tan(180° + \theta) = \tan\theta$
04. $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta, \cos(270° - \theta) = -\sin\theta, \tan(270° - \theta) = \cot\theta$
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta, \cos(270° + \theta) = \sin\theta, \tan(270° + \theta) = -\cot\theta$
05. $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta, \cos(360° - \theta) = \cos\theta, \tan\ (360° - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(360° + \theta) = \sin\theta, \cos(360° + \theta) = \cos\theta, \tan\ (360° + \theta) = \tan\theta$

আমরা এতক্ষণ $(n \times 90° \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিয়ে আলোচনা করেছি। n এর যেকোনো মানের (n হলো পূর্ণসংখ্যা) জন্য উপরে উল্লেখিত ১০ ধরনের $(\pm\theta, 90° \pm \theta, 180° \pm \theta, 270° \pm \theta, 360° \pm \theta)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মধ্যেই পড়বে।

এত চিন্তার কোন কারণ নাই। উপরে শুধু বিস্তারিতভাবে প্রতিটি চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান বের করা হয়েছে। মনে রাখাও সহজে মান নির্ণয়ের জন্য নিচের আলোচনায় মনোযোগ দাও। পরবর্তীতে আমরা যেকোনো কোণের $(n \times 90° \pm \theta)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করব মাত্র ৩ টি ধাপ অনুসরণ করে।

তার আগে খেয়াল করো, n এর মান বিজোড় যেমন $(1 \times 90° \pm \theta)$ ও $(3 \times 90° \pm \theta)$- এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ তার co-function এ পরিবর্তিত হয়। আবার, n এর মান জোড় হলে $(2 \times 90° \pm \theta)$ ও $(4 \times 90° \pm \theta)$-এর ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের কোনো পরিবর্তন হয় না।
আবার খেয়াল কর $(n \times 90° \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন $(+/-)$ ষষ্ঠ অধ্যায়ে আলোচিত যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অনুরূপ। **All Student Take Care** এর কথা আশা করি তোমাদের মনে আছে।

উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পর্যবেক্ষণ থেকে নিচের ধাপগুলো পাওয়া যায়।
ধাপ-১: প্রথমে প্রশ্নে উল্লেখিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে TF $(n \times 90° \pm \theta°)$ আকারে প্রকাশ করবো। যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।
ধাপ-২: n-জোড় হলে, TF(θ) লিখবো [TF = Trigonometric function অর্থাৎ cofunction এ পরিবর্তিত হবে না] এবং
n- বিজোড় হলে, CTF (θ) লিখবো [CTF = Co-Trigonometric function অর্থাৎ cofunction এ পরিবর্তিত হবে]
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta\ ;\ \tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta\ ;\ \cot(90° - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta\ ;\ \text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
ধাপ-৩: এখন চিহ্নের জন্য আমরা শুধু প্রশ্নে উল্লেখিত TF কে বিবেচনায় নিব। All Students Take Care অনুসারে চিহ্ন নির্ধারণ করব।

উল্লেখ্য, কোণ যদি ঋণাত্মক হয় তখন আমরা আগে নিম্নোক্ত উপায়ে ধনাত্মক কোণে প্রকাশ করেও ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বের করতে পারবো। এখানে, θ দ্বারা সকল বাস্তব মানের কোণ বোঝানো হচ্ছে।
(i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (ii) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (iii) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
(iv) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ (v) $\sec(-\theta) = \sec\theta$ (vi) $\text{cosec}\,(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$

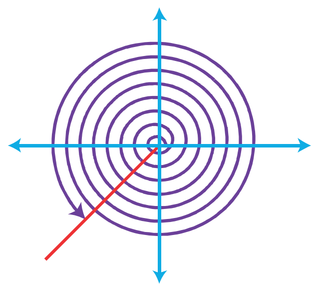
এখন আমরা বিভিন্ন সমস্যা ও তাদের সমাধান দেখব। তোমাদের সুবিধার সমস্যাগুলোকে টাইপে ভাগ করা হয়েছে। বলে রাখা ভালো ত্রিকোণমিতিক সমস্যা সমাধান বা অভেদ প্রমাণের সুনির্দিষ্ট নিয়মাবলি নেই। একই ত্রিকোণমিতিক সমস্যা বিভিন্নভাবে সমাধান করা যায়। তবে সমাধানের আঙ্গিকতা (pattern) আঁচ করার জন্য অভিজ্ঞতা ও অভ্যাস প্রয়োজন। যেহেতু ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ ত্রিভুজ থেকে এসেছে, তাই অনেকক্ষেত্রে ত্রিভুজ বা অন্যান্য জ্যামিতিক চিত্র এঁকে জ্যামিতিক উপপাদ্য বা বৈশিষ্ট্য কাজে লাগিয়ে সমস্যা সহজে সমাধান করা যায়।

সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি (Trigonometric equations containing associated angles)

Case-01: ডিগ্রি পরিমাপ

উদাহরণ-০১: **sin (2040°) এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কত?** **[KU'07-08, JU' 14-15]**

সমাধান:

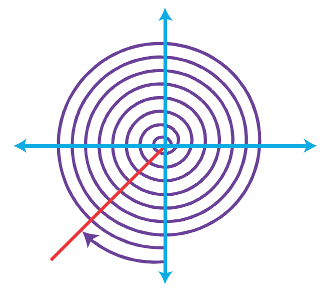


ধাপ-১: $\sin(2040°) = \sin(22 \times 90° + 60°)$

ধাপ-২: $\sin(60°)$ [$\because n = 22$ জোড়]

ধাপ-৩: 2040° কোণের দরুন রশ্মির শেষ অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে sine $(-ve)$ বা ঋণাত্মক হয়।

$= -\sin(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



ধাপ-১: $\sin(2040°) = \sin(23 \times 90° - 30°)$

ধাপ-২: $\cos(30°)$ [$\because n = 23$ বিজোড়]

ধাপ-৩: 2040° কোণের দরুন রশ্মির শেষ অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে sin $(-ve)$ বা ঋণাত্মক হয়।

$= -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

তোমাদের বুঝানোর স্বার্থে ধাপ আকারে দেয়া হয়েছে। পরীক্ষায় এভাবে না লিখলেও হবে। নিম্নে সংক্ষিপ্ত রূপ দেয়া হল।

সমাধান: $\sin(2040°)$

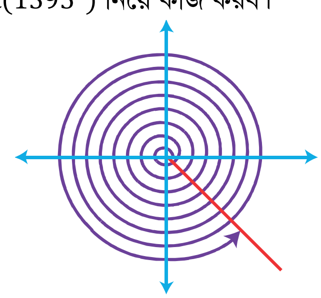
$= \sin(22 \times 90° + 60°)$ বা $\sin(23 \times 90° - 30°)$

$= -\sin(60°)$ বা $-\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০২: **cot(−139 °) এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কত?** **[KU'11-12]**

সমাধান: যেহেতু −1395° ঋণাত্মক কোণ এবং আমরা জানি একটি ঋণাত্মক কোণের cotangent তার সমপরিমাণ ধনাত্মক কোণের cotangent এর (-1) গুণের সমান বা, $\cot(-\theta) = -\cot\theta$, $\cot(-1395°) = -\cot(1395°)$

এখন $\cot(1395°)$ নিয়ে কাজ করব।



ধাপ-১: $= \cot(15 \times 90° + 45°)$

ধাপ-২: $\tan 45°$ [$\because$ n বিজোড়]

ধাপ-৩: 1395° কোণের শেষ অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। ৪র্থ চতুর্ভাগে cot $(-)$ বা ঋণাত্মক হয়।

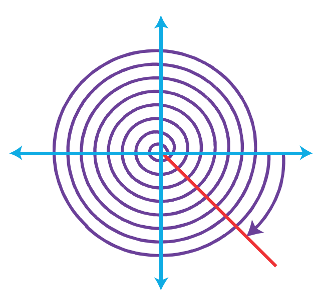
$= -\tan 45° = -1$

$\therefore \cot(-1395°) = -(-1) = 1$ **(Ans.)**

নিম্নে সংক্ষিপ্ত আকারে দেয়া হল।

$\therefore \cot(-1395°) = -\cot(15 \times 90° + 45°)$

$= -(-\tan 45°) = -(-1) = 1$



ধাপ-১: $= \cot(16 \times 90° - 45°)$

ধাপ-২: $\cot 45°$ [$\because$ n জোড়]

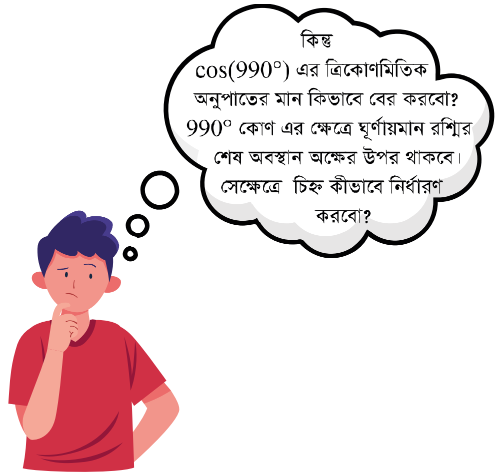
ধাপ-৩: 1395° কোণের শেষ অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। ৪র্থ চতুর্ভাগে cot $(-)$ বা ঋণাত্মক হয়।

$= -\cot 45° = -1$

$\therefore \cot(-1395°) = -(-1) = 1$ **(Ans.)**

$\therefore \cot(-1395°) = -\cot(16 \times 90° - 45)$

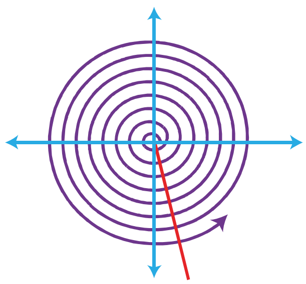
$= -(-\cot 45°) = -(-1) = 1$



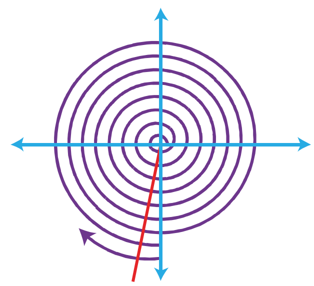
একটি ধারণা থাকা জরুরি যে অনেক ক্ষুদ্র সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)-কে আমরা শূন্যের (0) নিকটবর্তী হিসেবে ধরতে পারি যেমন: 0.00000000007 বা 7×10^{-11} এতই ছোট যে একে আমরা 0 হিসেবে চিন্তা করতে পারি।

উদাহরণ-০৩: **cos(990°)** এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কত?

সমাধান:

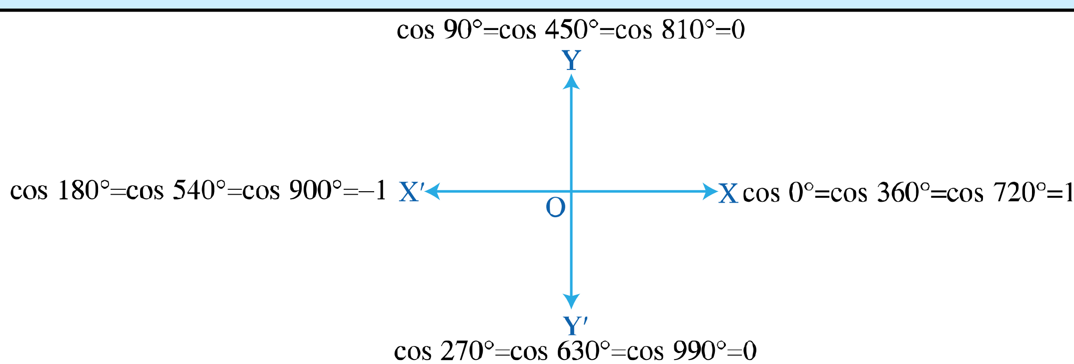


ধাপ-১: $\cos(990°)=\cos(11\times 90°+\theta)$
[যেখানে $\theta = 0$]
ধাপ-২: $\sin(0°)$ [$\because n = 11$ (বিজোড়)]
ধাপ-৩: $11\times 90°+\theta$ কোণে ধরি $\theta, 0°$ এর অনেক কাছাকাছি একটি সংখ্যা। ফলে রশ্মির শেষ অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকবে। ৪র্থ চতুর্ভাগে cosine $(+ve)$ বা ধনাত্মক হয়। $\therefore \sin(0°) = 0$



ধাপ-১: $\cos(990°) = \cos(11\times 90° - \theta)$
[যেখানে $\theta = 0$]
ধাপ-২: $\sin(0°)$ [$\because n = 11$ (বিজোড়)]
ধাপ-৩: $11\times 90° - \theta$ কোণে ধরি $\theta, 0°$ এর অনেক কাছাকাছি একটি সং ফলে রশ্মির শেষ অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে থাকবে। ৩য় চতুর্ভাগে cosine $(-ve)$ বা ঋণাত্মক হয়।
$\therefore -\sin(0°) = 0$

অক্ষীয় কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত আমরা আরো সহজে নির্ণয় করতে পারি। খেয়াল করো, অক্ষীয় ত্রিকোণমিতিক কোণের দরুন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান যতবার x অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর আসে cosine এর মান হয় 1। x অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর আসলে cosine এর মান -1 হয় y- অক্ষে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক দিক বরাবর থাকলে cosine এর মান 0 হয়



উদাহরণ-০৪: sin 900° এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কত?

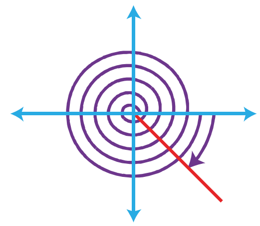
সমাধান: 900° কোণের দরুন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান x অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর আসে

$\because \sin 180° = 0 \quad \therefore \sin 900° = 0$ **(Ans.)**

Case-02: রেডিয়ান পরিমাপ

তোমরা চাইলে রেডিয়ান কোণকে ডিগ্রিতে রূপান্তরিত করে সমস্যাগুলোর সমাধান করতে পারো। কিন্তু এখানে রেডিয়ান এককে রেখেই সমাধান পদ্ধতি দেখানো হবে।

উদাহরণ-০৫: $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) = ?$



সমাধান: $\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{24\pi-\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(8 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

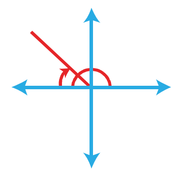
$= -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

উল্লেখ্য $\frac{23\pi}{6}$ কোণের দরুন ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে হয়। যেখানে sine এর চিহ্ন (−) বা ঋণাত্মক হবে।

উদাহরণ-০৬: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = ?$

সমাধান: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(5 \times \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$ [খেয়াল কর $\frac{2\pi}{3}$ সূক্ষ্মকোণ নয়। কিন্তু ধরে নিই $\frac{2\pi}{3} = \theta$]

$\therefore \sin\left(5 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$



আবার, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \therefore \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৭: n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে, ta $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$ এর মান নির্ণয় কর

সমাধান: যদি n একটি জোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে ধরি, $n = 2m$

যেখানে, $m = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$

$\therefore \tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left\{2m \times \frac{\pi}{2} + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

আবার যদি n একটি বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে ধরি, $n = 2m + 1$

যেখানে, $m = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$

$\therefore \tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\left\{(2m+1) \times \frac{\pi}{2} + (-1)^{2m+1}\frac{\pi}{4}\right\} = \tan\{(2m+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

সুতরাং n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান 1 হবে।

Case-03: সরল কর বা মান নির্ণয় কর

উদাহরণ-০৮: tan 18° + cos 102° + tan 162° + cos 438° =? [SB'06]

সমাধান: $\tan 18° + \cos 102° + \tan 162° + \cos 438°$

$= \tan 18° + \cos(90° + 12°) + \tan(180° - 18°) + \cos(360° + 78°)$

$= \tan 18° - \sin 12° - \tan 18° + \cos 78°$

$= \tan 18° - \tan 18° - \sin 12° + \sin 12° = 0$ **(Ans.)** $[\therefore \cos 78° = \sin 12°]$

উদাহরণ-০৯: $\mathbf{\cos(420^\circ)\sin(-300^\circ)-\sin(870^\circ)\cos(570^\circ)}=?$

সমাধান: $\cos(420^\circ)\sin(-300^\circ)-\sin(870^\circ)\cos(570^\circ) \ = -\cos 420^\circ \sin 300^\circ - \sin 870^\circ \cos 570^\circ$

$=-\cos(4\times 90^\circ+60^\circ)\sin(4\times 90^\circ-60^\circ)-\sin(9\times 90^\circ+60^\circ)\cos(6\times 90^\circ+30^\circ)$

$=-\cos 60^\circ(-\sin 60^\circ)-\cos 60^\circ(-\cos 30^\circ)=\cos 60^\circ \cos 30^\circ+\cos 60^\circ.\cos 30^\circ$

$=2\times\cos 60^\circ\times\cos 30^\circ=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১০: $\mathbf{\dfrac{\cos(540^\circ-A)\sin(1080^\circ-A)\cot(105^\circ+A)}{\tan(195^\circ+A)\cos(-A)\tan(630^\circ-A)}}=?$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি: $\dfrac{\cos(6\times 90-A)\sin(12\times 90^\circ-A)\cot(90^\circ+15^\circ+A)}{\tan(2\times 90^\circ+15^\circ+A)\cos A\ \tan(7\times 90^\circ-A)}=\dfrac{(-\cos A)(-\sin A)\{-\tan(15^\circ+A)\}}{\tan(15^\circ+A)\cos A\cot A}$

$=\dfrac{-\sin A}{\cot A}=-\sin A\tan A$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১১: $\mathbf{\tan\frac{17\pi}{6}\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+\sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right)\ cosec\left(\frac{25\pi}{6}\right)}=?$

সমাধান: $\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)+\sec\left(-\frac{34\pi}{3}\right)\ \mathrm{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)+\sec\left(\frac{34\pi}{3}\right)\ \mathrm{cosec}\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

$=\tan\left(\frac{18\pi-\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{4}\right)+\sec\left(\frac{33\pi+\pi}{3}\right)\ \mathrm{cosec}\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right)$

$=\tan\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{cosec}\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\tan\left(6\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(6\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(22\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cosec}\left(8\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\left\{-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}\left\{-\cos\frac{\pi}{4}\right\}+\left\{-\sec\frac{\pi}{3}\right\}\left(\mathrm{cosec}\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+(-2)\times(2)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}-4=\frac{1}{\sqrt{6}}-4=\frac{1-4\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১২: $\mathbf{\tan 15^\circ+\tan 4\ \ ^\circ+\tan 75^\circ+\cdots+\tan 165^\circ}=?$

সমাধান: $\frac{165-15}{30}+1=6$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\tan 15^\circ+\tan(180^\circ-15^\circ)+\tan 45^\circ+\tan(180^\circ-45^\circ)+\tan 75^\circ+\tan(180^\circ-75^\circ)$

$=\tan 15^\circ-\tan 15^\circ+\tan 45^\circ-\tan 45^\circ+\tan 75^\circ-\tan 75^\circ=0$ **(Ans.)**

উদাহরণ-১৩: **n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে যোগফল নির্ণয় কর:**

$\cos\theta+\cos(\pi+\theta)+\cos(2\pi+\theta)+\ldots\ldots+\cos(n\pi+\theta)$

সমাধান: $\cos\theta+\cos(\pi+\theta)+\cos(2\pi+\theta)+\ldots\ldots+\cos(n\pi+\theta)$

$=\cos\theta+\{-\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta+\ \ldots\ldots+(-1)^n\cos\theta\}$

$n=2$ হলে, যোগফল $=\cos\theta+\{\cos(\pi+\theta)+\cos(2\pi+\theta)\}=\cos\theta+(-\cos\theta+\cos\theta)=\cos\theta$

$n=4$ হলে, যোগফল $=\cos\theta+\{\cos(\pi+\theta)+\cos(2\pi+\theta)+\cos(3\pi+\theta)+\cos(4\pi+\theta)\}$

$=\cos\theta+(-\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta+\cos\theta)=\cos\theta$

সুতরাং, n জোড় হলে যোগফল $\cos\theta$

আবার, $n=1$ হলে, যোগফল $=\cos\theta+\cos(\pi+\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$

$n=3$ হলে, যোগফল $=\cos\theta+\{\cos(\pi+\theta)+\cos(2\pi+\theta)+\cos(3\pi+\theta)\}$

$=\cos\theta+(-\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta)=\cos\theta-\cos\theta=0$

সুতরাং, n বিজোড় হলে যোগফল 0

সুতরাং, যোগফল $\cos\theta$ অথবা 0 যখন n যথাক্রমে জোড় অথবা বি

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের সমষ্টি সংক্রান্ত (Regarding the sum of squares of trigonometric ratios)

বর্গ রাশির সরল সংক্রান্ত সমস্যায় $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1; \sec^2\theta-\tan^2\theta=1; \text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$ এই তিনটি সূত্রের প্রয়োজন অনুসারে প্রয়োগ করতে হয়। সমস্যাগুলো দুইটি Category তে আলোচনা করা হয়েছে।

Category-01: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের সমষ্টি আকৃতি (যেখানে কোণগুলো ধারা আকারে থাকে না)

প্রথমত, আমাদের sine, cosine; tangent, cotangent; secant, cosecant এর কম্বিনেশন ঠিক আছে কিনা দেখতে হবে। যদি না থাকে তাহলে প্রয়োজনীয় ত্রিকোণমিতি ফাংশন এ রূপান্তর করতে হবে। যেমন: সমান কোণবিশিষ্ট sine ফাংশন এর সাথে cosine ফাংশনের বর্গের সমষ্টি থাকতে হবে যাতে $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ সূত্রের প্রয়োগ করতে পারি। sine ও cosine ফাংশন একসাথে না থাকলে বা সকল ফাংশন একই হলে প্রয়োজনীয় সংখ্যক ফাংশনকে কো-ফাংশনে রূপান্তরিত করতে হবে

যেমন: $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$ এ ২য় ও ৪র্থ পদকে যথাক্রমে, $\sin^2\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right)=\cos^2\frac{\pi}{7}$ ও $\sin^2\left(\frac{7\pi+2\pi}{14}\right)=\cos^2\frac{\pi}{7}$ আকারে লিখা যায় এক্ষেত্রে লবের প্রথম রাশির π এর সহগকে প্রয়োজনানুসারে হরের 0.5 বা 1.5 বা 2.5.... ইত্যাদি গুণ আকারে প্রকাশ করতে হবে (এতে ত্রিকোণমিতিক কোণকে $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যাবে)।

দ্বিতীয়ত, সঠিক কম্বিনেশন পাওয়া গেলে (যেমন: দুইটি sine ফাংশন এর সাথে দুইটি cosine ফাংশন থাকলে) সবচেয়ে ছোট কোণ ব্যতীত বাকি সবগুলোর লবের প্রথম রাশির π এর সহগকে প্রয়োজন অনুসারে হরের 1 বা 2 বা 3 ... ইত্যাদি গুণ আকারে লিখতে হবে।

যেমন: উপরোক্ত গাণিতিক সমস্যা নিয়েই আলোচনা করা যাক।

$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$ কে এখন লিখা যায় $\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}$

দেখা যাচ্ছে, ১ম ও ২য় পদ মিলে 1 হওয়ার জন্য প্রস্তুত, কিন্তু ৩য় পদ ও ৪র্থ পদের মধ্যে এখনও কোণদ্বয় সমান হয় নাই

এখন, $\sin^2\frac{8\pi}{7}$ কে লিখা যায় $\sin^2\left(\frac{7\pi+\pi}{7}\right)=\sin^2\frac{\pi}{7}$ ফলে, ৩য় ও ৪র্থ পদ দাঁড়ায় $\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}$ যার মানও 1 হবে

চলো পরীক্ষায় যেভাবে করতে হবে সেভাবে সমস্যাটি সমাধান করে ফেলি।

উদাহরণ-১৪: $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=?$ **[JB'11; BB'10; SB'09; DB'02; Ctg.B'00; Mad.B'01, 09]**

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi+\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi+2\pi}{14}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}$

$=1+1=2$ **(Ans.)**

এই অঙ্কে সবগুলো sine ফাংশন। তাই দুটি sin কে cos বানাতে হবে। খেয়াল কর ২য় ও ৪র্থ পদের কোণ দুইটির লবের ১ম রাশির π এর সহগকে হরের $\frac{1}{2}$ বা 0.5 গুণ আকারে লেখা হয়েছে। এতে $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক $\left(1\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ আকারে পরিণত হয়। এতে $\frac{\pi}{2}$ বিজোড় গুণিতক $\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ আকারে পরিণত হয়।

উদাহরণ-১৫: $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\text{co}\ ^2\frac{3\pi}{8}=?$ **[DB'02; JB'11; BB'10; SB'09; Ctg.B'00; Mad.B'.01, 09]**

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\left\{\sin\left(\frac{18\pi-\pi}{18}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{8\pi-3\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(\frac{36\pi+\pi}{18}\right)\right\}^2+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\left\{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{18}\right)\right\}^2+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=1+1=2$ **(Ans.)**

এক্ষেত্রে 2 টি sine ও 2 টি cosine আছে। তাই আমাদের সবচেয়ে ছোট কোণ $\frac{3\pi}{8}$ ব্যতীত বাকি কোণগুলোর লবের ১ম রাশির π এর সহগকে হরের 1 বা গুণিতক আকারে লিখা হয়েছে। যে স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা হরকে গুণ করলে লবের কাছাকাছি বা সমান হয়, গুণিতক হিসেবে সেই সংখ্যাকেই বেছে নিতে হবে।

উদাহরণ-১৬: $\sec^2\frac{14\pi}{17}-\text{se}\ ^2\frac{39\pi}{17}+\cot^2\frac{41\pi}{34}-\cot^2\frac{23\pi}{34}=?$ **[JB'06; SB'06]**

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $\sec^2\frac{14\pi}{17}-\sec^2\frac{39\pi}{17}+\cot^2\frac{41\pi}{34}-\cot^2\frac{23\pi}{34}$

$=\sec^2\left(\frac{17\pi-3\pi}{17\pi}\right)-\sec^2\left(\frac{34\pi+5\pi}{17}\right)+\cot^2\left(\frac{51\pi-10\pi}{34}\right)-\cot^2\left(\frac{17\pi+6\pi}{34}\right)$

$=\left\{\sec\left(\pi-\frac{3\pi}{17}\right)\right\}^2-\left\{\sec\left(2\pi+\frac{5\pi}{17}\right)\right\}^2+\left\{\cot\left(3\times\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{17}\right)\right\}^2-\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{17}\right)\right\}^2$

$=\sec^2\frac{3\pi}{17}-\sec^2\frac{5\pi}{17}+\tan^2\frac{5\pi}{17}-\tan^2\frac{3\pi}{17}=\left(\sec^2\frac{3\pi}{17}-\tan^2\frac{3\pi}{17}\right)-\left(\sec^2\frac{5\pi}{17}-\tan^2\frac{5\pi}{17}\right)$

$=1-1=0$ **(Ans.)**

এক্ষেত্রে 2 টি cotangent কে tangent এ রূপান্তরের জন্য [কারণ, $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$] লবের ১ম রাশির π এর সহগদ্বয়কে যথাক্রমে হরের 1.5 ও 0.5 গুণিতক আকারে প্রকাশ করা হয়েছে। $\cot^2\left(\frac{41\pi}{34}\right)$ এ লবের ১ম রাশির π এর সহগকে হরের 1.5 গুণিতক আকারে প্রকাশ করার কারণ হলো 1.5 গুণিতক আকারেই θ এর পরিমাপ সবচেয়ে ছোট হয়।

উদাহরণ-১৭: **মান নির্ণয় কর:** $\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{31\pi}{24}+\text{co}\ ^2\frac{37\pi}{24}$.

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\frac{31\pi}{24}+\cos^2\frac{37\pi}{24}$

$=\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\left(\frac{12\pi+19\pi}{24}\right)+\cos^2\left(\frac{36\pi+\pi}{24}\right)$

$=\cos^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{19\pi}{24}\right)+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\cos^2\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\right)$

$=\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}+\cos^2\frac{19\pi}{24}+\sin^2\frac{19\pi}{24}$

$=1+1=2$ **(Ans.)**

এক্ষেত্রে 2 টি cosine কে sine এ রূপান্তরের জন্য লবের ১ম রাশির π এর সহগদ্বয়কে যথাক্রমে হরের 0.5 ও 1.5 গুণিতক আকারে প্রকাশ করা হয়েছে। $\cos^2\frac{37\pi}{24}$ এ লবকে হরের 1.5 গুণিতক আকারে প্রকাশ করার কারণ হল 1.5 গুণিতক আকারেই θ এর পরিমাপ সবচেয়ে ছোট হয়।

Category-02: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর বর্গের সমষ্টি আকৃতি (যেখানে কোণগুলো ধারা আকারে থাকে):

এক্ষেত্রে,

$\left.\begin{array}{l}\text{বা, }\sin^2A_1+\sin^2A_2+\sin^2A_3+\ \ldots\ldots\ldots+\sin^2A_n\\ \text{বা, }\cos^2A_1+\cos^2A_2+\cos^2A_3+\ \ldots\ldots\ldots+\cos^2A_n\end{array}\right]$ যেখানে, $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ সমান্তর প্রগমনভুক্ত।

আকারে ধারা দেওয়া থাকে এবং মান নির্ণয় করতে হয়।

এক্ষেত্রেও প্রয়োজনীয় সূত্র হলো, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ এবং অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রে, $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ এবং $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1$।

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তমপদ, $T_n=a+(n-1)d;$ যেখানে, a =১ম পদ, d = সাধারণ অন্তর।

এক্ষেত্রে $\sin^2A_1$ এর সাথে ধারার অন্য কোনো পদ যোগ করে 1 বানানোর জন্য একটি পদকে $\sin^2\left\{(2m+1)\frac{\pi}{2}\pm A_1\right\}$ $m\in\mathbb{Z}$ আকৃতিতে প্রকাশ করে $\cos^2A_1$ বানিয়ে নিতে হয়। (Example দেখো)

[$(2m+1)\frac{\pi}{2}$ হলো $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক]

পদসংখ্যা, $n=\frac{b-a}{d}+1$ [এখানে, = b শেষপদ]

যেমন: $\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°$ সমস্যায় আমরা $\sin^2 72°=\sin^2(90°-18°)=\cos^2 18°$ এবং $\sin^2 54°=\sin^2(90°-36°)=\cos^2 36°$ লিখতে পারি। চলো সমস্যাটি পূর্ণরূপে সমাধান করে ফেলি।

উদাহরণ-১৮: $\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°=$ **কত?** **[BUTex'12-13]**

সমাধান: $\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°$

$=\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2(90°-36°)+\sin^2(90°-18°)$

$=\sin^2 18°+\sin^2 36°+\cos^2 36°+\cos^2 18°$

$=(\sin^2 18°+\cos^2 18°)+(\sin^2 36°+\cos^2 36°)=1+1=2$ **(Ans.)**

Shortcut

$\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\ + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\dots\ + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = \frac{\pi}{2}$ হয় তাহলে উত্তর হবে $\frac{n}{2}$. [যেখানে, n হলো পদ সংখ্যা]

যেমন: এখানে, $\mathbf{18° + 72° = 90°}$ এবং পদ সংখ্যা $n = 4 \therefore$ উত্তর $= \frac{4}{2} = 2]$

উদাহরণ-১৯: $\mathbf{\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \cdots + \sin^2 177° = ?}$

সমাধান: $3, 9, 15, \dots, 177$ সমান্তর প্রগমনে আছে এবং প্রগমনটির পদ সংখ্যা n হলে, $n = \frac{b-a}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{177-3}{6} + 1$

$\therefore n = 30$

$\therefore \sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \ \dots\dots\dots + \sin^2 177°$

$= (\sin^2 3° + \sin^2 9° + \sin^2 15° + \ \dots\dots\dots + \sin^2 87°) +$

$(\sin^2 93° + \sin^2 99° + \ \dots\dots\dots + \sin^2 177°)$

$= \sin^2 3° + \sin^2 9° + \ \dots\dots\dots + \sin^2 87° + \cos^2 3° + \cos^2 9° +$

$\dots\dots\dots + \cos^2 87°$

$= (\sin^2 3° + \cos^2 3°) + (\sin^2 9° + \cos^2 9°) + \ \dots\dots\dots + (\sin^2 87° + \cos^2 87°)$

$= 1 + 1 + \cdots$ (15 তম জোড়া পর্যন্ত)$= 1 \times 15 = 15$(**Ans.**)

$\sin^2 93° = \sin^2(90° + 3°) = \cos^2 3°$

$\sin^2 99° = \sin^2(90° + 9°) = \cos^2 9°$

$\sin^2 177° = \sin^2(90° + 87°) = \cos^2 87°$

Shortcut

$\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\ + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\ + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = 2\frac{\pi}{2}$ এবং n জোড় সংখ্যা হয়, তাহলে উত্তর হবে $\frac{n}{2}$. [যেখানে, n হলো পদ সংখ্যা]

যেমন: এখানে, $\mathbf{3° + 177° = 180°}$ বা, $2.\frac{\pi}{2}$ এবং $n = 30. \therefore$ উত্তর $= \frac{30}{2} = 15$

উদাহরণ-২০: যদি $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{36}}$ হয়, তবে $\mathbf{\sin^2 3\theta + si\ \ ^2 4\theta + si\ \ ^2 5\theta + \ \dots\dots\dots + \sin^2 15\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'13-14]**

সমাধান: প্রদত্ত রাশি$= \sin^2 15° + \sin^2 20° +$

$\sin^2 25° + \dots\dots\dots + \sin^2 75°$

$= \sin^2 15° + \sin^2 20° + \ \dots\dots + \sin^2 45° + \ \dots\dots + \sin^2 70° +$

$\sin 75°$

$= (\sin^2 15° + \cos^2 15°) + (\sin^2 20° + \cos^2 20°) +$

$(\sin^2 25° + \cos^2 25°) + (\sin^2 30° + \cos^2 30°)$

$+(\sin^2 35° + \cos^2 35°) + (\sin^2 40° + \cos^2 40°) + \sin^2 45°$

$= 6 + \frac{1}{2} = 6.5$

এখানে, $\theta = \frac{\pi}{36}$

$= \left(\frac{\pi}{36} \times \frac{180}{\pi}\right)° = 5°$; পদসংখ্যা $= \frac{75° - 15°}{5°} + 1$

$= 12 + 1 = 13$; মধ্যপদ $= 7$- তম পদ

$= \sin^2\{15° + (7 - 1) \times 5\}$

$= \sin^2(45°)$

Shortcut

$\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\ + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \ \dots\dots\dots\dots\ + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = \frac{\pi}{2}$ হয় তাহলে উত্তর হবে $\frac{n}{2}$. [যেখানে, n হলো পদ সংখ্যা]

যেমন: এখানে, $n = 13 \therefore$ উত্তর $= \frac{13}{2} = 6.5$।

উদাহরণ-২১: $\sin^2 3° + \sin^2 6° + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 177° =$ কত?

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি, $= \sin^2 3° + \sin^2 6° + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 177°$

$= \sin^2 3° + \sin^2 6° + \ldots\ldots\ldots + \sin^2 87° + \sin^2 90°$

$+ \cos^2 3° + \ldots\ldots\ldots \cos^2 84° + \cos^2 87°$

$= (\sin^2 3° + \cos^2 3°) + \ldots\ldots + (\sin^2 87° + \cos^2 87°) + \sin^2 90°$

$= 1 \times 29 + 1 = 30$ **(Ans.)**

এখানে,

পদসংখ্যা $= \frac{177° - 3°}{3°} + 1$

$= 58 + 1 = 59$

মধ্যপদ $= 30$ তম পদ

$= \sin^2\{3° + (30-1) \times 3°\}$

$= \sin^2 90°$

Shortcut

$\sin^2 A_1 + \sin^2 A_2 + \cdots\ldots\ldots + \sin^2 A_n$ বা $\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \ldots\ldots\ldots + \cos^2 A_n$ এর জন্য যদি $A_1 + A_n = 2.\frac{\pi}{2}$ এবং n বিজোড় হয়, তাহলে উত্তর হবে $\frac{n-1}{2}$ + মধ্যপদ [যেখানে n হলো পদসংখ্যা]।

এখানে, $3° + 177° = 180°$। এ $n = 59$ ∴ উত্তর হবে $\frac{59-1}{2} + \sin^2 \frac{3°+177°}{2} = 29 + \sin^2 90° = 29 + 1 = 30$।

উদাহরণ-২২: মান নির্ণয় কর: $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ [DB'13, 00; JB'00; BB'10; SB'02; Ctg.B'02; Mad.B'05]

সমাধান: $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{4\pi+\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi+3\pi}{8}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)$

$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} = 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান

■ সংযুক্ত কোণ সম্বলিত ত্রিকোণমিতিক রাশি ■ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত গুলোর বর্গের সমষ্টি সংক্রান্ত

বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত? [CB'22]

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: (b); $\frac{1}{2}$

যেহেতু, $n \in z$

ধরি, $n = 1$

$\text{Sin}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

অথবা, n এর মান যেকোনো পূর্ণসংখ্যার জন্য,

$\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$

$= \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

02. $\text{cosec}(-330°)$ এর মান কত? [Din.B'22]

(a) -2 (b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) 2

সমাধান: (d); $\text{cosec}(-330°) = -\text{cosec}\ 330°$

$= -\text{cosec}(360° - 30°)$

$= -\text{cosec}(4 \times 90° - 30°)$

$= -(-\text{cosec}(30°)) = \text{cosec}\ 30° = 2$ **(Ans.)**

03. $A + B + C = \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\text{cosec}(B + C)$ এর মান কোনটি? [RB'19]

(a) $-\sec A$ (b) $\sec A$
(c) $-\text{cosec}\ A$ (d) $\text{cosec}\ A$

সমাধান: (a); $\text{cosec}(B + C) = \text{cosec}\left(3.\frac{\pi}{2} - A\right)$

$= -\sec A$

04. $\cos(2n\pi - 30°) =$ কত? [SB'19]

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (b); $n = 0$ বসিয়ে $\cos(-30°) = \cos 30°$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta] = \frac{\sqrt{3}}{2}$