প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-০৮ : ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, ফয়সাল ও আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৯৫/-
(একশত পঁচানব্বই টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-08, Bangla Version, Page-26, Question-05, দেওয়া আছে, [x] কিন্তু হবে [2y]

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৮ ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

মাশফিক ও তার বন্ধু সিয়াম ক্লাস নাইনের ছাত্র। সিয়ামের বাবা গণিতের শিক্ষক এবং তা কাছে তারা গণিত শেখে। আজ মাশফিক সিয়ামের বাসায় পড়তে এসেছে। কিন্তু আগামীকাল তাদের আরেক বন্ধু আবিরের জন্মদিন, তারা ঠিক করেছে আবিরের জন্মদিনের অনুষ্ঠানে তারা সবাই পাঞ্জাবি পরে যাবে। সিয়ামের বাবা তার নিজস্ব একটি কাজ নিয়ে একটু ব্যস্ত ছিলেন। তাই পড়া শুরু করার আগে তারা কে কী রঙের পাঞ্জাবি পরবে তা নিয়ে আলোচনা করছে।

মাশফিক: আমার তিনটা পাঞ্জাবি আছে। একটি নীল রঙের, একটি সবুজ রঙের এবং অপরটি হলুদ রঙের। কিন্তু কোনটা পরবো বুঝতে পারছি না।

সিয়াম: আমার লাল আর বেগুনি রঙের দুইটি পাঞ্জাবি আছে। আমিও প্রথমে দ্বিধাদ্বন্দের মধ্যে ছিলাম যে কোনটা পরবো। কিন্তু পরে আমি ঠিক করেছি যে আমি আমার লাল রঙের পাঞ্জাবিটাই পরবো। তুই তোর হলুদ পাঞ্জাবিটা পর। আমার মনে হয় তোর ঐ পাঞ্জাবিটাই বেশি সুন্দর।

মাশফিক: আমিও আসলে ভাবছিলাম হলুদ রঙের পাঞ্জাবিটাই বেশি সুন্দর। আবার তুইও যখন বললি, ঠিক আছে, হলুদ রঙেরটাই পরবো।

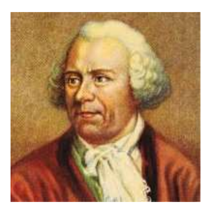
ইতোমধ্যে সিয়ামের বাবা তার নিজস্ব কাজ শেষ করে তাদের কথা শুনছিলেন। তিনি তখন তাদের থামিয়ে বলে উঠলেন:

তোমরা কি জানো যে প্রথমে যখন তোমরা তোমাদের বিভিন্ন রঙের পাঞ্জাবির মধ্যে বাছাই করতে দ্বিধাবোধ করছিলে তখন এটি ছিলো একটি অন্বয়, কিন্তু যে মুহূর্তেই তোমরা তোমাদের পাঞ্জাবি বাছাই করে ফেললে তখন তা হয়ে গেছে একটি ফাংশন?

মাশফিক ও সিয়াম (অবাক হয়ে): কীভাবে?

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

আধুনিক ফাংশনের ধারণা দেন ফরাসি গণিতবিদ ও দার্শনিক রেনে দেকার্তে (Rene Descartes)। গটফ্রেড লিবনিজ (Leibnitz) (১৬৭৩) এই 'ফাংশন' শব্দটি প্রথম ব্যবহার করেন। পরবর্তীতে ১৬৯৩ খ্রিষ্টাব্দে তিনি ফাংশনের গ্রহণযোগ্য সংজ্ঞা দেন। এছাড়াও সুইস বিজ্ঞানী অয়লারও (Euler) ফাংশন নিয়ে কাজ করেন। তিনি তাঁর 'Element of Algebra' বই-এ ফাংশন সম্পর্কে ধারণা দেন। পাশাপাশি তিনি $y = f(x)$ নোটেশনটি প্রথম ব্যবহার করে নিউটন (Newton) হচ্ছেন প্রথম গণিতবিদ যিনি দেখান কীভাবে ফাংশনকে অসীম ঘাতের সিরিজে প্রতিষ্ঠা করা যায় ফুরিয়ার (Fourier) তাপমাত্রাকে দুই চলকের ফাংশন হিসেবে বিবেচনা করেন যা ফাংশনের বিবর্তনে ভূমিকা রাখে। পরবর্তীতে ফাংশনকে ফুরিয়ার সিরিজ হিসেবে প্রকাশ করার জন্য ডিডিচলেট (Dirichlet) পর্যাপ্ত শর্ত প্রণয়ন করেন। ১৮৩৭ সালে তিনি ফাংশনের সংজ্ঞা দেন। যা পরবর্তীতে আধুনিক সংজ্ঞা বিবেচনা করা হয়। এভাবে আধুনিক ফাংশনের ধারণা প্রতিষ্ঠিত হয়।


Euler


Dirichlet

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা জেনে হোক বা না জেনে, 'অন্বয় এবং ফাংশন' নিয়ে কাজ করি ঠিক তেমনি বিজ্ঞানের জগতে ক্যালকুলাসের ব্যবহার নেই এমন একটি শাখা খুঁজে পাওয়া প্রায় অসম্ভ কিন্তু ক্যালকুলাসের জগতে প্রবেশ করার আগে আমাদের দরকার 'ফাংশন' সম্পর্কে জানা কারণ ক্যালকুলাসের কোন তত্ত্ব বা সমস্যা আলোচনার প্রতিটি মুহূর্তে আমরা কোন না কোন ফাংশন নিয়েই কাজ করে তাহলে চলো, আর দেরি না করে 'অন্বয় এবং ফাংশন' সম্পর্কে বিস্তারিত জেনে নিই সিয়ামের বাবার উক্তির বিশ্লেষণ না হয় খুঁজে নিও এই আলোচনার কোথাও।

'অন্বয় এবং ফাংশন' শুরু করার আগে আমাদের জানতে হবে 'সেট' সম্পর্কে। নবম-দশম শ্রেণির গণিত/উচ্চতর গণিত বইয়ের শুরুতেই তোমরা সেট সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছিলে আলোচনার সুবিধার্থে আমরা তার কিছু অংশ আবার একটু মনে করিয়ে দিতে চাই

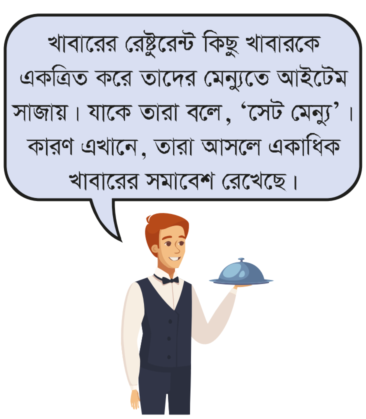
সেট ও তার প্রকারভেদ (Set and Its Types)

রাকিব তার কলেজের ক্যান্টিনে গিয়ে খাবারের মেন্যু দেখছিলো সেখানে তার পছন্দের খাবার ছিল ফ্রাইড-রাইস, চিকেন ফ্রাই ও ম্যাংগো জুস। তার বন্ধু কবিরের পছন্দ বার্গার ও বেদানার জুস। তোমরা কি লক্ষ করেছো? রাকিব বা কবিরের পছন্দের আইটেমগুলো কিন্তু একটি খাবার না, কয়েকটি সুনির্দিষ্ট খাবারের সমাবেশ বা সংগ্রহ

U (মেনু)

সেট: "বাস্তব কিংবা চিন্তা জগতের সুনির্দিষ্ট কিছু বস্তুর সমাবেশ বা সংগ্রহকে বলা হয় 'সেট' (Set)"।

সেটকে প্রকাশ করার জন্য দ্বিতীয় বন্ধনী বা { } ব্যবহার করা হয়। যেমন: রাকিবের পছন্দের খাবারের সেট যদি A হয়, তাহলে, A = {ফ্রাইড-রাইস, চিকেন ফ্রাই, ম্যাংগো জুস} এবং কবিরের পছন্দের খাবারের সেট যদি B হয়, তাহলে, B = {বার্গার, বেদানার জুস}।



অনেক খাবারের রেস্টুরেন্ট তাদের জনপ্রিয় কিছু খাবারকে একত্রিত করে একটি গ্রুপ আকারে তাদের মেন্যুতে আইটেম সাজা এই গ্রুপগুলোকে তারা বলে 'সেট মেন্যু'। কারণ এখানে তারা আসলে একাধিক খাবারের সমাবেশ রেখে থাকে। তাই প্রতিটি সেট মেন্যুই একেকটি খাবারের সেটকে উপস্থাপন করে।

আমরা যদি একটি রেস্টুরেন্টের খাবারের সম্পূর্ণ মেন্যুকে একটি সেট কল্পনা করি তাহলে ঐ রেস্টুরেন্টে পাওয়া যায় এমন সকল খাবার ঐ সেটের উপাদান হবে। রাকিব, কবির, তুমি, আমি যে ঐ রেস্টুরেন্টে গিয়ে আমাদের পছন্দের খাবার অর্ডার করি না কেন, সবার পছন্দের খাবারের সেটের উপাদানগুলো ঐ সেটের উপাদান হবে।

সার্বিক সেট: আলোচনাধীন সকল সেট এর উপাদান যদি কোনো সেটে বিদ্যমান হয়, তবে সেই সেটকে বলা হয় "সার্বিক সেট" একে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়

আমাদের উদাহরণে রেস্টুরেন্টটির খাবারের সম্পূর্ণ মেন্যুটি হলো সার্বিক সেট।

এখন মনে করো, একটি রেস্টুরেন্ট তাদের একটি সেট মেন্যুতে 3 রকমের খাবার রেখেছে । কিন্তু তুমি গিয়ে পুরো সেট মেন্যু অর্ডার না করে তার মধ্যে থেকে 2 টি বা 1 টি খাবার অর্ডার করলে। অর্থাৎ, ধরো সেট মেন্যুটি হলো আমাদের পূর্বের উদাহরণের A সেট তার মধ্যে তুমি শুধু চিকেন ফ্রাই এবং ম্যাংগো জুস অথবা শুধু ম্যাংগো জুস অর্ডার করলে। তাহলে তোমার অর্ডার করা খাবারের সেটটি হলো ঐ সেট মেন্যুর একটি উপসেট (Subset) এবং সেট মেন্যুটি হলো তোমার অর্ডার করা খাবারের সুপারসেট (Superset)।

A = {ফ্রাইড-রাইস, চিকেন ফ্রাই, ম্যাংগো জুস} এবং C = {ম্যাংগো জুস} দুইটি সেট হলে, C সেটটির উপাদানগুলো A সেটের দুইটি উপাদান নিয়েই গঠিত তাই, এখানে C হলো A এর উপসেট অপরদিকে, A হলো C এর সুপার সেট।

উপসেট ও সুপারসেট: "একটি সেটের উপাদানগুলো যদি অপর একটি সেট থেকে বাছাই করা হয় তাহলে প্রথম সেটটি হবে দ্বিতীয় সেটের উপসেট এবং দ্বিতীয় সেটটি হবে প্রথম সেটের সুপারসেট" ।

গাণিতিক ভাষায় সাবসেট বোঝাতে "⊆" এবং সুপারসেট বোঝাতে "⊇" প্রতীক ব্যবহার করা হয়। অর্থাৎ এখানে, $C \subseteq A$ এবং $A \supseteq C$.

এখানে, C এর উপাদান সংখ্যা A এর তুলনায় কম। তাই C কে বলা হয় A এর প্রকৃত উপসেট। একে লেখা হয় এভাবে $C \subset A$.

আবার মনে করো, তুমি তোমার বন্ধুর সাথে আজকে ঐ রেস্টুরেন্টে গিয়েছো। তোমার বন্ধু সেখানে খাবার অর্ডার করলেও তুমি কোন খাবার অর্ডার করো নি। তাহলে তোমার অর্ডার করা খাবারের সেটটি হলো একটি "ফাঁকা সেট"। **একে { } বা ϕ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**

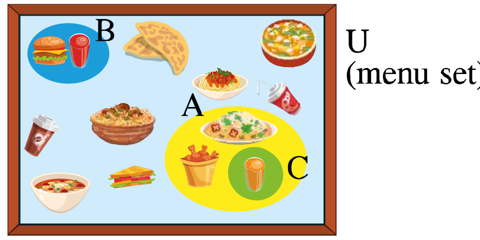
জেনে রাখো

ফাঁকা সেট হলো সব সেটের উপসেট। কিন্তু একটা মজার ব্যাপার হলো, ফাঁকা সেটের উপসেট কিন্তু সে নিজেই। তাই ফাঁকা সেট কখনো তার নিজের প্রকৃত উপসেট হতে পারবে না (কারণ এখানে কমপক্ষে একটি উপাদান কম নেই) । ফাঁকা সেটের উপাদান সংখ্যা কিন্তু ফাঁকা সেট ব্যতীত অন্য যেকোন সেটের উপাদান সংখ্যার সমান না বরং তাদের থেকে কমপক্ষে 1 কম (কারণ এর উপাদান সংখ্যা 0)। তাই ফাঁকা সেট প্রতিটি সেটেরই প্রকৃত উপসেট কিন্তু সে নিজের প্রকৃত উপসেট নয়।

কোন সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, সেটটি হতে গঠিত মোট উপসেট সংখ্যা 2^n টি। আর প্রকৃত উপসেট সংখ্যা $(2^n - 1)$ টি (কারণ ঐ সেটটি নিজেই নিজের উপসেট হলেও প্রকৃত উপসেট নয়) ।

শক্তি সেট: কোন সেট হতে তৈরি সকল উপসেট নিয়ে গঠিত সেটকে উক্ত সেটের শক্তি সেট (Power Set) বলা হয় একে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এখন মেন্যু কার্ডের A এবং B সেটের দিকে লক্ষ কর। "চিত্রে A এবং B এর কোন সাধারণ উপাদান (common element) না থাকায়, এদের বলা হয় পরস্প নিশ্ছেদ সেট" ।

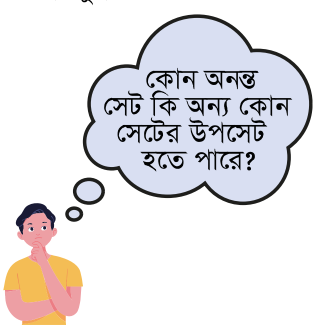


রাকিব দোকানে গিয়ে যদি A সেটের খাবারগুলো অর্ডার করে থাকে, তাহলে তার অর্ডার করা খাবারগুলো বাদে দোকানের মেন্যুতে আর যে সকল খাবার আছে তাকে আমরা বলে থাকি A সেটের পূরক সেট এখানে, ডানের ভেনচিত্র হতে দেখা যায়, সার্বিক সেট U (দোকানের সম্পূর্ণ মেন্যু) তে A এর উপাদান বাদেও আরো অনেক উপাদান আছে

পূরক সেট: "সার্বিক সেট হতে কোন সেট এর উপাদান বাদে অন্য সব উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে বলা হয় উক্ত সেটের পূরক সেট" । একে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, A এর পূরক সেট, $A' = A^c = U - A = U\backslash A$

খেয়াল কর, এখানে A সেটের খাবার এবং A এর পূরক সেটের খাবারের সংযোগ সেট নিলে রেস্টুরেন্টের খাবারের সম্পূর্ণ মেন্যু (সার্বিক সেট) পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $A \cup A^c = U$ আবার A সেটের খাবার এবং A^c সেটের খাবারের মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান নেই। কাজেই $A \cap A^c = \phi$.

আবার, আরেকটি খাবারের সেট, P = { ফ্রাইড রাইস, চিকেন ফ্রাই, ম্যাংগো জুস} হলে, P সেটের উপাদান এবং A সেটের উপাদানগুলো একই। দুইটি সেটের সবগুলো উপাদান একই হলে সেট দুইটি পরস্পর সমান হয়। কাজেই A ও P সেট দুইটি পরস্পর সমান। ফলে, A = P.



এখন খেয়াল কর সেট মেন্যু তথা সার্বিক সেট U এর উপাদান সংখ্যা গণনা করা যায়। "এ ধরনের সেট **যাদের উপাদান সংখ্যা গণনা করা যায় তথা সসীম তাদের সসীম বা সান্ত সেট (finite set) বলে"**। কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ এর উপাদান সংখ্যা কি গণনা করা যায়? না, যায় না কারণ উপাদান সংখ্যা অসীম। **তাই এ ধরনের সেটকে বলা হয় অসীম বা অনন্ত সেট (infinite set)।**

হ্যাঁ, হতে পারে। তবে সেক্ষেত্রে সুপার সেটটিও অসীম সেট হতে হবে।

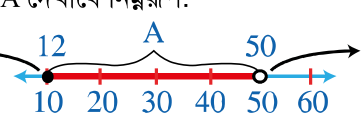
চলো, আমাদের খুবই পরিচিত দুইটি সেট দিয়ে বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি। সেট দুইটি হলো যথাক্রমে বাস্তব সংখ্যার সেট ($\mathbb{R}$) ও স্বাভাবিক সংখ্যার সেট ($\mathbb{N}$)। স্বভাবতই যেকোন স্বাভাবিক সংখ্যা অবশ্যই বাস্তব সংখ্যা, অর্থাৎ সকল স্বাভাবিক সংখ্যাই বাস্তব সংখ্যার সেটের উপাদান; তাই $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$।

ব্যবধি (Interval)

আচ্ছা, তোমরা ভেবে দেখতো, আমাদের বাস্তব জীবনে এমন অনেক ঘটনার সম্মুখীন হই, যার ফলাফল একটি পরিসর এর অন্তর্গত হলেও সঠিকভাবে নির্ধারণ করা যায় না। যেমনঃ আমরা যখন রোলার কোস্টার এ উঠি তখন আমাদের একটা Age limitation দেওয়া থাকে। ধরি, 12 বছর এর নিচের বয়সের কাউকে রাইডে উঠতে দেওয়া হবে না আবার, 50 বছর বা তার উপরের কাউকেও রাইডে উঠতে দেওয়া হবে না ধরি, রাইডে উঠতে আগ্রহী মানুষের বয়স x এবং যাদের বয়স 12 বছর বা 12 বছর এর বেশি এবং 50 বছরের নিচে থাকবে তারাই রাইডে উঠতে পারবে। তাহলে, এই সম্পূর্ণ বাক্যকে গাণিতিকভাবে লেখা যায়, $12 \leq x < 50$ আকারে।

অর্থাৎ, x এর মান 12 বা তার থেকে বেশি ও 50 এর কম হবে এই সীমায় x এর সকল মানকে A সেটের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। সংখ্যারেখায় x এর সকল মান নিয়ে গঠিত সেট A দেখাবে নিম্নরূপ:

বৃত্ত ভরাট থাকলে সেই সংখ্যা পর্যন্ত বোঝায়।
অর্থাৎ, অসমতার অন্তর্ভুক্ত ।



বৃত্ত ভরাট না থাকলে সেই সংখ্যার আগ পর্যন্ত বোঝায়।
অর্থাৎ, অসমতার অন্তর্ভুক্ত নয়।

আচ্ছা ভেবে দেখতো, A এর সকল মানকে তো আমরা একটি বিবৃতির মাধ্যমেও প্রকাশ করতে পারতাম যাকে সেট গঠন পদ্ধতি বলে। তাই না? যেমন: $A = \{x : x \in \mathbb{R}_+, 12 \leq x < 50\}$

কিন্তু এটিকে যখন আমরা তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করতে যাব, তখনই বিপত্তি বাধবে। কেননা A একটি অনন্ত সেট। আর অনন্ত সেটকে তালিকা আকারে লিখে প্রকাশ করা অসম্ভ তাই আমাদের বিশেষ চিহ্ন প্রয়োজন। যার সাহায্যে আমরা এমনভাবে একটি সেট প্রকাশ করতে পারব যা 12 থেকে শুরু করে 50 এর আগ পর্যন্ত সকল সংখ্যা বুঝাবে। অর্থাৎ, এমন একটি সেট প্রয়োজন যার ক্রম হবে ছোট থেকে বড় এবং বামে থাকবে নিম্নসীমা আর ডানে থাকবে উচ্চসীমা।

তাহলে, $A=\{12, 50\}$ কি লেখা যাবে?

না। কারণ { } দ্বারা বুঝায় যে, A সেটে শুধু দুইটি উপাদান তথা 12 ও 50 আছে কিন্তু এটি ঠিক নয়। তাহলে { } অর্থাৎ দ্বিতীয় বন্ধনী ব্যবহার করা যাবে না ব্যবহার করতে হবে প্রথম বন্ধনী অর্থাৎ ( ) কিংবা তৃতীয় বন্ধনী অর্থাৎ [ ]।

অসমতাটি পুনরায় লক্ষ করি:

$12 \leq x < 50$

অসমতাটির নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমা উভয়ের ধর কি একই? না, এক নয়। কেননা, 12 তথা নিম্নসীমার সংখ্যাটি অসমতার অন্তর্ভুক্ত কিন্তু 50 তথা উচ্চসীমার সংখ্যাকে অসমতার অন্তর্ভুক্ত নয় এ কারণে A সেটের নিম্নসীমায় ব্যবহৃত হবে '[' বা তৃতীয় বন্ধনী আর ঊর্ধ্বসীমায় ব্যবহৃত হবে ')' বা প্রথম বন্ধনী।

অর্থাৎ, $A = [12, 50)$

একটি সেটের প্রান্তীয় মান যদি অসমতাভুক্ত না হয় তবে সে প্রান্তকে বলা হয় খোলা প্রান্ত। আর প্রান্তীয় মান যদি অসমতাভুক্ত হয়, তার সে প্রান্তকে বলা হয় বদ্ধ প্রান্ত

মনে রাখবে

খোলা প্রান্তে ( ) বা প্রথম বন্ধনী এবং বদ্ধ প্রান্তে [ ] বা তৃতীয় বন্ধনী ব্যবহার করাই আন্তর্জাতিকভাবে প্রচলিত নিয়ম বা convention।

উল্লেখ্য, ১ম বন্ধনীর পরিবর্তে চাইলে উল্টা তৃতীয় বন্ধনী ব্যবহার করা যায়। অর্থাৎ "(" এর পরিবর্তে "]" এবং ")" এর পরিবর্তে "[" ব্যবহার করা যায়। যেমন: $(12, 50) =]12, 50[$

একটি সেট A, বিবেচনা করি।

$A_1 = \{x : x \in \mathbb{R}, 14 \leq x \leq 30\}$ এখানে, নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা উভয় প্রান্তে থাকা সংখ্যা অসমতাভুক্ত। তাই, উভয় প্রান্তে তৃতীয় বন্ধনী বা [ ] ব্যবহৃত হয় ফলে, $A_1 = [14, 30]$

এবার আরেকটি সেট A_2 বিবেচনা করি, $A_2 = \{x : x \in \mathbb{R}, 16 < x < 20\}$

এখানে, নিম্নসীমা ও ঊর্ধ্বসীমায় থাকা সংখ্যাগুলো অসমতাভুক্ত নয় তাই উভয় পাশে প্রথম বন্ধনী বা ( ) ব্যবহৃত হবে।

ফলে, $A_2 = (16, 20)$ এ ধরনের সেটগুলোকে বলা হয় ব্যবধি

প্রথম বন্ধনী বা () এর পরিবর্তে তৃতীয় বন্ধনীর উল্টা চিহ্ন] [ও অনেক সময় ব্যবহৃত হয়। যেমন: $(2, 5]$ কে $]2, 5]$ এবং $[2, 5)$ কে $[2, 5[$ ও লেখা যায়।

ব্যবধি: দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b $(a < b)$ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বলা হয় ব্যবি

তোমরা নিশ্চয়ই এতক্ষণে বুঝতে পেরেছো যে মুক্ত প্রান্তে আর বদ্ধ প্রান্তে কোন ধরনের চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

জেনে রাখো

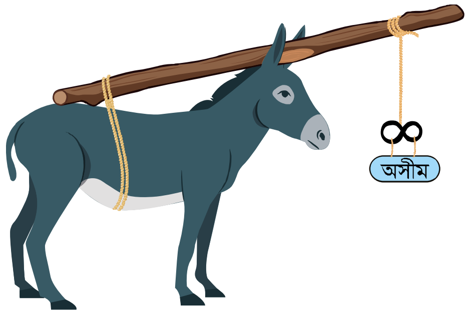
মুক্ত বা খোলা প্রান্ত বোঝাতে ব্যবহৃত হয়: (i) নিম্ন প্রান্তে বা বাম প্রান্তে "(" অথবা "]"(ii)ঊর্ধ্ব প্রান্ত বা ডান প্রান্তে ")" অথবা "["

বদ্ধ প্রান্ত বোঝাতে ব্যবহৃত হয়: (i) নিম্ন প্রান্ত বা বাম প্রান্তে "["(ii) ঊর্ধ্ব প্রান্ত বা ডান প্রান্তে "]"

তাহলে বলোতো, 5 থেকে অসীম পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট P হলে, P কে ব্যবধিতে কীভাবে প্রকাশ করবো?

উত্তর হলো: $P = [5, \infty)$

পূর্বের তুলনায় একটু ভিন্ন মনে হচ্ছে? চলো এর কারণ জেনে নিই। P সেটে লক্ষ কর যে, '∞' এর ক্ষেত্রে যদিও মনে হচ্ছে যে ']' চিহ্ন ব্যবহার করা উচিত ছিলো, কিন্তু আমরা কি কখনো অসীম কে নির্দিষ্টভাবে চিহ্নিত করে এর সমান হতে পারি? না কখনোই পারি না
কেননা '∞' নির্দিষ্ট কোনো সংখ্যা নয়, বরং একটি ধারণামাত্র। '∞' কোনো প্রান্তে থাকলে বোঝায় সে বাস্তব সংখ্যার উচ্চতর মানসমূহ ধারণ করতেই থাকবে কিন্তু কখনোই নির্দিষ্ট কোনো মানে পৌঁছে থামবে না। অর্থাৎ, '∞' কে কখনো ব্যবধিতে অন্তর্ভুক্ত করা সম্ভব নয়। তাই ডান প্রান্ত বা ঊর্ধ্বপ্রা '∞' চিহ্ন থাকলে, কিংবা বামপ্রান্ত বা নিম্ন প্রান্তে '$-\infty$' থাকলে সর্ব তাকে মুক্ত প্রান্ত হিসেবেই ধরা হয়।



কোন সেট এর উপাদানসমূহ অসীম পর্যন্ত ধাবিত হয় নাকি হয় না তার উপর ভিত্তি করে ব্যবধি কে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। **যথা:**
(1) সসীম ব্যবধি (Finite interval)
(2) অসীম ব্যবধি (Infinite interval)

সসীম ব্যবধি (Finite Interval)

দুইটি বাস্তব ও সসীম সংখ্যা a ও b $(a < b)$ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বলা হয় a ও b এর সসীম ব্যবধি। এরা চার ধরনের। **যথা:**

(i) খোলা ব্যবধি (Open Interval):

কোনো ব্যবধির প্রান্তীয় মানগুলো যদি ব্যবধিভুক্ত না হয় তথা উভয় প্রান্ত খোলা হয় (a, b) তবে তাকে খোলা ব্যবধি বলে। **যেমন:** $A = (2, 5) =]2, 5[$ লক্ষ কর, একে কিন্তু set builder method দ্বারাও প্রকাশ করা যায়। এখানে, A এর মান 2 থেকে 5 এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা, তবে 2 ও 5 নয়

অর্থাৎ, $A = \{x: x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$

অসমতায় প্রকাশিত এ ধরনের সেটকে কিন্তু সংখ্যারেখায় দেখানো যায়।

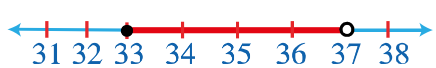
সাধারণভাবে, $A = \{x: x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

(ii) বদ্ধ-খোলা ব্যবধি (Closed-Open Interval):

কোনো ব্যবধির বাম প্রান্তে থাকা সর্বনিম্ন মানটি যদি ব্যবধিভুক্ত হয় কিন্তু ডান প্রান্তে থাকা সর্বোচ্চ মানটি ব্যবধিভুক্ত না হয়, অর্থাৎ, বাম প্রান্ত বদ্ধ ও ডান প্রান্ত খোলা; এমন ব্যবধিকে বলা হয় বদ্ধ-খোলা ব্যবধি।

যেমন: $D = [33, 37) = [33, 37[= \{x: x \in \mathbb{R}, 33 \leq x < 37\}$

সংখ্যারেখায়:



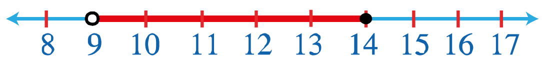
সাধারণভাবে, $D = \{x: x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

(iii) খোলা-বদ্ধ ব্যবধি (Open-Closed Interval):

কোনো ব্যবধির বাম প্রান্তে থাকা সর্বনিম্ন মানটি যদি ব্যবধিভুক্ত না হয়, কিন্তু ডান প্রান্তে থাকা সর্বোচ্চ মানটি ব্যবধিভুক্ত হয় অর্থাৎ, বাম প্রান্ত খোলা ও ডান প্রান্ত বদ্ধ; এমন ব্যবধিকে বলা হয় খোলা-বদ্ধ ব্যবধি।

যেমন: $C = (9, 14] =]9, 14] = \{x: x \in \mathbb{R}, 9 < x \leq 14\}$

সংখ্যারেখায়:



সাধারণভাবে, $C = \{x: x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$

(iv) বদ্ধ ব্যবধি (Closed Interval):

কোন ব্যবধির প্রান্তীয় মানগুলো যদি ব্যবধিভুক্ত হয় তথা উভয়প্রান্ত বদ্ধ হয়, তাকে বদ্ধ ব্যবধি বলে।

যেমন: $B = [20, 25] = \{x: x \in \mathbb{R}, 20 \leq x \leq 25\}$

সংখ্যারেখায়:

সাধারণভাবে, $B = \{x: x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

অসীম ব্যবধি (Infinite Interval)

যে ব্যবধির শুধু বাম প্রান্ত বা ডান প্রান্ত অথবা উভয় প্রান্তই অসীম পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যাকে ধারণ করে তাকে অসীম ব্যবধি বলা হয়। এরা পাঁচ ধরনের হয়। **যথা:**

(i) ডানে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি:

কোন বাস্তব সংখ্যা a এর চেয়ে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট।

যেমন: $P = (10, \infty) =]10, \infty[= \{x: x \in \mathbb{R}, x > 10\}$

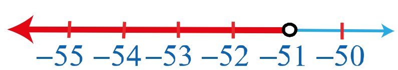
সংখ্যারেখায়:

(ii) বামে অসীম উন্মুক্ত ব্যবধি:

কোনো বাস্তব সংখ্যা a এর চেয়ে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট। **যেমন:**

$Q = (-\infty, -51) =]-\infty, -51[= \{x: x \in \mathbb{R}, x < -51\}$

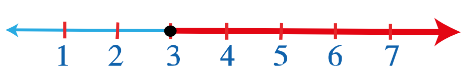
সংখ্যারেখায়:



(iii) ডানে অসীম বদ্ধ ব্যবধি:

কোনো বাস্তব সংখ্যা a এবং তার চেয়ে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট। **যেমন:** $R = [3, \infty) = [3, \infty[= \{x: x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

সংখ্যারেখায়:

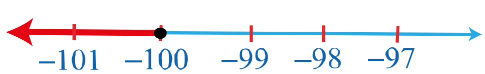


(iv) বামে অসীম বদ্ধ ব্যবধি:

কোন বাস্তব সংখ্যা a এবং তার চেয়ে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট।

যেমন: $S = (-\infty, -100) =]-\infty, -100[= \{x: x \in \mathbb{R}, x \leq -100\}$

সংখ্যারেখায়:

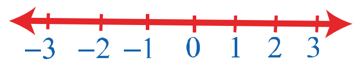


(v) অসীম ব্যবধি:

$-\infty$ থেকে $+\infty$ পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট। অর্থাৎ, এই সেটটি মূলত বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ কেই নির্দেশ করে

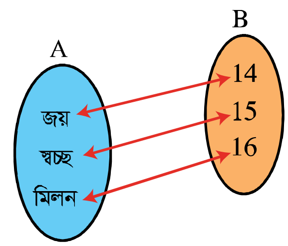
অর্থাৎ, $R = (-\infty, \infty) =]-\infty, \infty[= \{x : x \in \mathbb{R}, -\infty < x < \infty\}$

সংখ্যারেখায়:



সেট ম্যাপিং ও কার্তেসীয় গুণজ (Set Mapping and Cartesian Product)

কখনো কখনো দুইটি সেটের উপাদানসমূহের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায় বা করার প্রয়োজন হয়। যেমন: ধরো, তোমার তিন বন্ধু জয়, স্বচ্ছ ও মিলনের বয়স যথাক্রমে 14, 15, 16 বছর। এখন, তোমার বন্ধুদের সেট $A = \{$জয়, স্বচ্ছ, মিলন$\}$ ও তাদের বয়সের সেট $B = \{14, 15, 16\}$ হলে, চিত্রের ন্যায় তীর চিহ্ন দ্বারা সেটদ্বয়ের উপাদানগুলোর মাঝে সম্পর্ক নির্দেশ করা যায়।



এভাবে দুইটি সেটের ছবি এঁকে উপাদানগুলোর মাঝে তীর চিহ্নিত রেখা দ্বারা খুবই সহজে একটি সেটের সাথে অপর একটি সেটের সম্পর্ক নির্দেশ করা যায়। এ ধরনের চিত্রকে বলা হয় 'সেট ম্যাপিং (set mapping)'।

A সেটের একটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি উপাদানের মধ্যে সম্পর্ক স্থান করা হয়েছে আমাদের উদাহরণে A ও B উভয় সেটের উপাদান সংখ্যা সমা অর্থাৎ, $n(A) = n(B)$।

দুইটি সেটের মধ্যে এরূপ সম্পর্ক স্থাপন করাকে বলা হয় এক-এক মিল **এক এক মিলের অর্থ হলো, প্রথম সেটের প্রতিটি উপাদান দ্বিতীয় সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত এবং দ্বিতীয় সেটের প্রতিটি উপাদানও প্রথম সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত।** দুইটি সেটের এরূপ এক-এক মিল করার জন্য তাদের উপাদান সংখ্যা অবশ্যই সমান হতে হবে। দুইটি সেট যদি এই শর্ত মেনে চলে তাহলে সেটদ্বয়কে আমরা বলি পরস্পর সমতুল সেট

যদি দুইটি সেটের উপাদানগুলো একই এবং উপাদান সংখ্যাও সমান হয় তাহলে সেটদ্বয়কে আমরা বলি পরস্পর সমান সেট।

জেনে রাখো

দুইটি সেট সমান হলে তারা অবশ্যই সমতুল হবে, কিন্তু দুইটি সেট সমতুল হলে তারা সমান হতেও পারে, নাও হতে পারে। তবে সমতুল না হলেও সেটদ্বয়ের মাঝে ম্যাপিং চিত্র আঁকা যায়।

দুইটি সেটের মধ্যে কীভাবে ম্যাপিং চিত্রের মাধ্যমে সম্পর্ক স্থাপন করা যায় সে সম্পর্কে আমরা জানলাম। এখন চলো দেখে নিই কীভাবে গাণিতিক বাক্য ব্যবহার করে দুইটি সেটের সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।

চলো আগের উদাহরণটা নিয়ে আবার চিন্তা করি। তোমার বন্ধুদের সাথে তাদের বয়সের সম্পর্ককে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়:

$R_1 = \{($জয়$, 14), ($স্বচ্ছ$, 15), ($মিলন$, 16)\}$

লক্ষ করো, R_1 সেটটিতে তিনটি উপাদান রয়েছে। তা হলো (জয়, 14), (স্বচ্ছ, 15) এবং (মিলন, 16)। সেটটির প্রতিটি উপাদানই জোড়ায় জোড়ায় আছে। প্রতিটি জোড়ার দুইটি উপাদানই দুইটি ভিন্ন সেট (A ও B) এর উপাদান নিয়ে গঠিত যাদের প্রথম উপাদান এসেছে প্রথম সেট হতে এবং দ্বিতীয় উপাদান এসেছে দ্বিতীয় সেট হতে। অর্থাৎ তারা একটি ক্রম মেনে চলছে। **তাই সেটটির প্রতিটি উপাদানকে আমরা বলি ক্রমজোড় (Ordered Pair)।**

ক্রমজোড়: দুইটি সেটের মধ্যে প্রথম সেটের উপাদানকে প্রথম স্থানে ও দ্বিতীয় সেটের উপাদানকে দ্বিতীয় স্থানে বসিয়ে পদদ্বয়কে প্রথম বন্ধনী বা '()' দ্বারা আবদ্ধ করে জোড়া আকারে যে বিশেষ যৌগিক পদ পাওয়া যায়, তাকে ক্রমজোড় বলা হয়

এই ক্রমজোড় দ্বারাই আসলে দুইটি সেটের একটির উপাদানের সাথে অপরটির উপাদানের সম্পর্ক বোঝানো হয়।

এখন তোমাকে যদি প্রশ্ন করা হয় যে, “আমাদের উদাহরণে বর্ণিত A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে সর্বোচ্চ কতটি সম্পর্ক স্থাপন করা সম্ভব?” এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়ার জন্য আমাদের সেটদ্বয়কে গুণ করতে হবে। তবে এই গুণ কিন্তু সাধারণ গুণের মতো না, এটি বিশে ধরনের একটি গুণ। এই গুণটিকে আমরা বলি কার্তেসীয় গুণজ। যেমন: তোমার বন্ধুদের সেট, A = {জয়, স্বচ্ছ, মিলন} ও তাদের বয়সের সেট, $B = \{14, 15, 16\}$ গুণ করলে যদি R সেট পাওয়া যায় তাহলে,

R = A × B = {(জয়, 14), (জয়, 15), (জয়, 16), (স্বচ্ছ, 14), (স্বচ্ছ, 15), (স্বচ্ছ, 16), (মিলন, 14), (মিলন, 15), (মিলন, 16)}

জেনে রাখো

সম্ভাব্য সকল ক্রমজোড়কে উপাদান হিসেবে বিবেচনা করে সেট গঠনের পদ্ধতিকে বলা হয় কার্তেসীয় গুণজ। কার্তেসীয় গুণজ দ্বারা একটি সেটের সাথে আরেকটি সেটের সর্বোচ্চ সংখ্যক সম্পর্ক পাওয়া যায়।

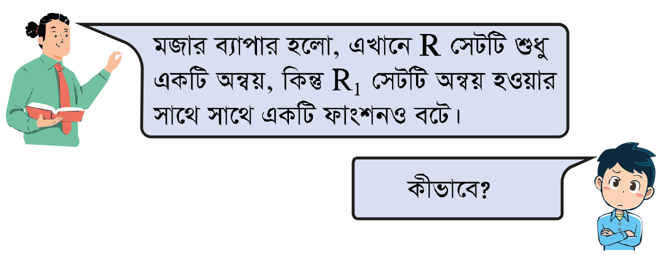
এখন, কার্তেসীয় গুণজের সাথে আমরা যদি একটি শর্ত জুড়ে দিই যে, আমরা গুণজটি থেকে ঠিক সেই উপাদানগুলো নেব, যে উপাদানে একজন ব্যক্তির নাম ও তার নিজের বয়স আছে, তাহলে কিন্তু আমরা আমাদের পূর্বের R_1 সেটটিই পাবো। অর্থাৎ,

$R_1 = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B;$ y হলো x এর বয়স$\}$ = {(জয়, 14), (স্বচ্ছ, 15), (মিলন, 16)}.

চিন্তা করো

দুইটি সেট A ও B বিবেচনা করা হলো, যেখানে নিশ্ছেদ সেট বা তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান নেই। A সেটের উপাদান সংখ্যা m ও B সেটের উপাদান সংখ্যা n।

তাহলে বন্ধুরা বলোতো, এদের দ্বারা মোট কত ধরনের অন্বয় গঠন সম্ভব?

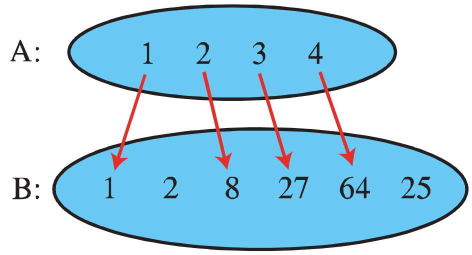


সেটা বুঝতে হলে, জানতে হবে অন্বয় এবং ফাংশন কী?

অন্বয়, ফাংশন ও এদের চিহ্নিতকরণ (Relation, Function and their identification)

মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 8, 27, 64, 25\}$

A এর যে যে উপাদানকে ঘন করলে B এর যে যে উপাদান পাওয়া যায় তাদের মধ্যে সম্পর্ক, P নিচের চিত্রে দেখানো হলো:

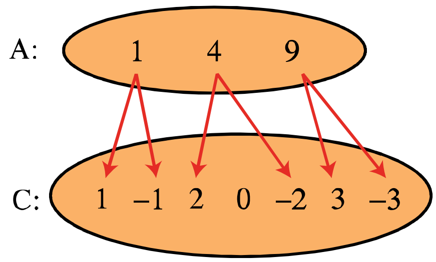


চিত্র-১

ফলে, $P = \{(1,1),(2,8),(3,27),(4,64)\}$। অর্থাৎ, $P \subseteq A \times B$

আবার ধরি, $A = \{1,4,9\}$ এবং $C = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

A এর যে যে উপাদানকে বর্গমূল করলে C এর যে যে উপাদান পাওয়া যায় তাদের মধ্যে সম্পর্ক, Q নিচের চিত্রে দেখানো হলো:



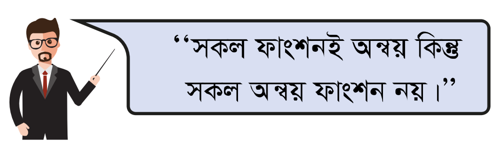
চিত্র-২

ফলে, $Q = \{(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(9,3),(9,-3)\}$। অর্থাৎ, $Q \subseteq A \times C$

লক্ষ কর, নির্দিষ্ট কোন শর্ত থেকে প্রাপ্ত এ ধরনের কোন সম্পর্ককে গাণিতিক ভাষায় অন্বয় বলে আখ্যায়িত করা হয়। এ ধরনের সম্পর্কে আমরা কোন input দিলে এক বা একাধিক output পাই। যেখানে input গুলো আসে কার্তেসীয় গুণজের প্রথম সেট থেকে, আর output গুলো আসে কার্তেসীয় গুণজের দ্বিতীয় সেট থেকে।

অন্বয়: নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে দুইটি সেটে সম্পর্ক তৈরি হলে অর্থাৎ, A ও B যে কোন দুইটি সেট হলে $A \times B$ হতে নির্দিষ্ট শর্ত মেনে প্রাপ্ত যেকোনো অশূন্য উপসেটকে A থেকে B সেটে একটি অন্বয় বলা হয়।

যেমন: চিত্র-১ এ থাকা অন্বয় P হতে দেখা যায় যে, A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটের একটি মাত্র উপাদানের সাথে সম্পর্কিত। আবার চিত্র-২ এ থাকা অন্বয় Q হতে দেখা যায় যে, A সেটের একটি উপাদান C সেটের দুইটি উপদানের সাথে সম্পর্কিত। বাস্তব জীবনে আমরা যেসব ঘটনার সম্মুখীন হই তাদের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই, একটি input এর জন্য শুধুমাত্র একটি output প্রয়োজন। তাই এ ধরনের অন্বয়কে পৃথকভাবে চিহ্নিত করে গাণিতিকভাবে এদের বলা হয় ফাংশন। যেমন: P অন্বয়ের ক্ষেত্রে প্রতিটি input এর-ই শুধুমাত্র একটি করে output বিদ্যমান।



তোমার বন্ধু রাসেল সেট বিষয়ে খুব আগ্রহী সে সেট বিষয়ে ও ক্রমজোড় নিয়ে তোমার সাথে আলোচনা করার সময় লিখল, সেটের ক্ষেত্রে, $\{3,5\} = \{5,3\}$ কিছুক্ষণ পর সে আবার লিখল, ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে, $(5,3) = (3,5)$ [এখানে $(5,3)$ ও $(3,5)$ ক্রমজোড় নির্দেশ করে] এবার বলোতো, তোমার বন্ধুর লেখা বিষয়বস্তু কি ঠিক ছিল? না, তোমার বন্ধুর লেখা দুইটি তুলনার মধ্যে একটি সঠিক ও একটি ভুল ছিল।

সতর্কতা!

সেট এর ক্ষেত্রে উপাদান এর অবস্থান কোন ভূমিকা রাখে না। কিন্তু ক্রমজোড় এর ক্ষেত্রে অবস্থানের গুরুত্ব আছে।
যেমন: $(a,b) = (c,d)$ হতে পারে, যদি ও কেবল যদি $a = c$ ও $b = d$ হয়। কিন্তু $3 \neq 5$। তাই $(3,5) \neq (5,3)$