প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র

অধ্যায়-০৯ : অন্তরীকরণ

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, ফয়সাল ও আরাফাত

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
৩২০/-
(তিনশত বিশ টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতার' মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায়-০৯ : অন্তরীকরণ

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, অধ্যায়, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" Math 1st Paper, Chapter-09, Bangla Version, Page-30, Question-04, দেওয়া আছে, [1] কিন্তু হবে [–5]

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৯

অন্তরীকরণ

তোমাকে যদি বলা হয় শূন্য দশমিকের পর অসীম সংখ্যক 9 বসালে তা 1 এর সমান হয়, অর্থাৎ $1 = 0.9999 \ldots$ তুমি কি তা মেনে নিবে? অবশ্যই না, তাই না? গাণিতিকভাবে কিন্তু প্রমাণ করে ফেলা যায় যে, $1 = 0.9999 \ldots$ ।

ধরে নাও, $x = 0.9999 \ldots$

বা, $10x = 10 \times 0.9999 \ldots = 9.9999 \ldots$ [ভয়ের কিছু নেই, উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা গুণ করা হয়েছে।]

বা, $10x - x = 9.9999 \ldots - 0.9999 \ldots \Rightarrow 9x = 9.0000 \ldots \ldots = 9 \therefore x = \frac{9}{9} = 1$

ছোটবেলায় পৌনঃপুনিক সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যায় তোমরা এই নিয়মেই রূপান্তর করে এসেছো। অর্থাৎ, $0.\dot{9} = 0.999 \ldots$ কে মূলদ সংখ্যায় রূপান্তর করলে 1 পাওয়া যাবে।

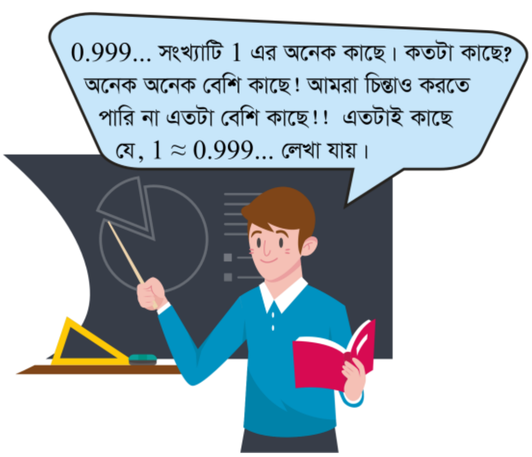
বিশ্বাস না হলে, আমরা আরেকভাবেও প্রমাণ করে ফেলতে পারি:

আমরা জানি, $\frac{1}{9} = 0.1111 \ldots$ [বিশ্বাস না হলে ক্যালকুলেটরে বসিয়ে দেখতে পারো। অথবা, খাতা কলমে নিজেই হিসাব করতে পারো]

বা, $\frac{1}{9} \times 9 = 0.1111 \times 9 \therefore 1 = 0.9999 \ldots \ldots$

তাহলে কি প্রকৃত অর্থেই, $1 = 0.9999 \ldots$?

উত্তর হলো না! কিন্তু 0.999... সংখ্যাটি 1 এর এতটাই নিকটবর্তী যে এর মান প্রায় 1 এর সমান হয়। একে আমরা বলে থাকি, 0.999... tends to 1



একইভাবে প্রমাণ করে ফেলা যায়, $1.9999 \ldots = 2$ বা, $2.49999 \ldots = 2.5$

সীমার মাধ্যমে আমরা কোনো সংখ্যাকে স্পর্শ না করেও, সেই সংখ্যার অতি নিকটে পৌঁছাতে পারি।

গণিতে অনেক ফাংশনের ক্ষেত্রে সবগুলো x এর মানের জন্য ফলাফল বা ফাংশনের মান পাওয়া যায় না। অনেকক্ষেত্রে নির্দিষ্ট ইনপুটের জন্য সরাসরি আউটপুটও পাওয়া যায় না। সীমার ধারণা ব্যবহার করে আমরা সে সকল অনেক সমস্যা সমাধান করতে পারি।

ধরে নাও, কোনো একটা ফাংশনে $x = 1$ ইনপুট দেয়া যায় না। সেক্ষেত্রে, $x = 0.999 \ldots \ldots \ldots$ বসিয়ে অনেকক্ষেত্রে আমরা ফাংশনে $x = 1$ বসালে কেমন মান পেতে পারতাম তার ধারণা পেয়ে থাকি। এভাবে, x এর মান কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর খুব কাছে পৌঁছালে সেটাকে সীমার মাধ্যমে $\lim\limits_{x \to a}$ (Limit x tends to a) লিখে প্রকাশ করা হয়।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস (Brief History)

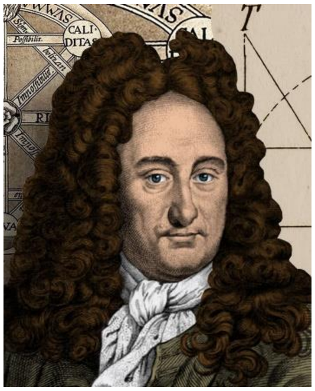
ক্যালকুলাসের পেছনের গল্প:

ক্যালকুলাস শব্দটি প্রথমে শুনতে কিছুটা অদ্ভুত এবং কাঠখোট্টা মনে হলেও ক্যালকুলাস আবিষ্কারের পেছনের গল্প কিন্তু বেশ মজার। বলা হয় যে, মানবসভ্যতা যখন সর্বপ্রথম ক্যালকুলাসের ধারণাগুলোর সাথে পরিচিত হয়, তখনই গণিতের ইতিহাসে এক ন্যাক্কারজনক কাঁদা ছোড়াছুড়ি'র ঘটনা ঘটে যায়।

1684 সালে সর্বপ্রথম ক্যালকুলাসের মৌলিক ধারণা নিয়ে রচিত-

'A New Method For Maxima and Minima'' পেপার প্রকাশ করেন জার্মান গণিতবিদ Gottfried Wilhelm Leibniz। কিন্তু তারপরই ইংরেজ গণিতবিদ Isaac Newton দাবি করে বসেন যে, এই পদ্ধতিটি তাঁর আগেই আবিষ্কার করা ছিল কিন্তু তিনি কোথাও প্রকাশ করেন নি। তাঁর আবিষ্কার প্রকাশ না করার কারণ অজানা ছিল। তবে সত্য যে তিনি সেগুলো তার বন্ধুদের কাছে প্রচার করেছিলেন এবং তার বৈজ্ঞানিক কাজে আবিষ্কৃত কৌশলটি ব্যবহার করেছিলেন এবং তা প্রমাণ করে এমন কাগজগুলো বিদ্যমান ছিলো।

Sir Isaac Newton



Gottfried Wilhelm Leibniz

নিউটন দাবি করেন ক্যালকুলাসের উপর তার প্রথম গবেষণাপত্রটি 1669 সালে লেখা হয়। এরপরই শুরু হয় দুই পক্ষের মধ্যে কাঁদা ছোড়াছুড়ি। কেননা উভয়ই অপরজনকে কাজ চুরি করার অপবাদ দিতে থাকেন। এ বিশাল দ্বন্দের অবসান ঘটানোর জন্য পরবর্তীতে তৎকালীন 'রয়েল সোসাইটি'তে একটি তদন্ত কমিটি গঠন করা হয় এবং মজার ব্যাপার হলো রয়েল সোসাইটি এর প্রধান হিসেবে সে তদন্ত কমিটিরও প্রধান ছিলেন নিউটন নিজেই!

অনেক তদন্তের পর ঘোষণা দেওয়া হয় যে নিউটনই ক্যালকুলাস আগে আবিষ্কার করেছিলেন। যদিও পরবর্তীতে ইতিহাসবিদেরা ক্যালকুলাস আবিষ্কারের জন্য নিউটন ও লিবনিজ উভয়কেই কৃতিত্ব দিয়ে থাকেন। এখনো নিউটন ও লিবনিজকে যৌথভাবে ক্যালকুলাসের আবিষ্কারকের মর্যাদা দেওয়া হয়।

ফাংশনের সীমাস্থ মান ও অবিচ্ছিন্নতা

সীমার প্রাথমিক ধারণা (Primary Concept of Limit)

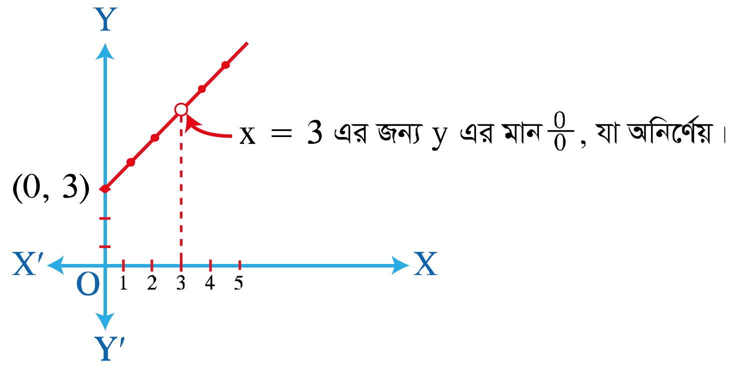
সীমা সম্পর্কিত প্রাথমিক ধারণা পাবার জন্য, এসো আমরা শুরুতেই একটি ফাংশন নিয়ে আলোচনা করি:

$$y = f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

বিভিন্ন x এর মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করার সারণি:

x	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	3	4	5	$\frac{0}{0}$ (অনির্ণেয়)	7	8

আমরা যদি x ও y এর এই মানগুলো x ও y অক্ষ বরাবর বসিয়ে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করি তাহলে নিচের মতো একটি চিত্র হবে:



দেখা যাচ্ছে যে, $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল মানের জন্যই ফাংশনটির মান নির্ণেয়। কিন্তু $x = 3$ হলে, $y = \frac{0}{0}$; যা আমরা নির্ণয় করতে পারি না। একে বলা হয় অনির্ণেয় মান। গণিতে এমন বেশ কিছু আকৃতি রয়েছে যেগুলোর মান আমরা নির্ণয় করতে পারি না, যাকে বলা হয় অনির্ণেয় (Indeterminate) আকৃতি। আবার এমন বেশ কিছু আকৃতি রয়েছে যেগুলোর মান সংজ্ঞায়িত না, এদেরকে বলা হয় অসংজ্ঞায়িত (Undefined) আকৃতি। সীমা (Limit) এর ধারণা আমাদেরকে অনেক সময় ফাংশনের অনির্ণেয় আকৃতির সম্ভাব্য মান নির্ণয়ে সাহায্য করে। শুরুতেই আমাদের জানা উচিত, আমরা অসংজ্ঞায়িত ও অনির্ণেয় আকৃতি বলতে কি বুঝি, কেনোই বা তারা অসংজ্ঞায়িত ও অনির্ণেয় এবং এমন আকৃতি কোনগুলো। তারপর আমরা আবার সীমার ধারণায় ফিরে যাব।

অসংজ্ঞায়িত (Undefined)

অসংজ্ঞায়িত (Undefined): সহজ ভাষায়, যার সংজ্ঞা দেওয়া যায় না তাই অসংজ্ঞায়িত। কিন্তু সংজ্ঞা বলতে এখানে কি বুঝানো হচ্ছে? একটু আলোচনা করা যাক,

$$\frac{6}{2} = 3, \frac{10}{5} = 2, \frac{15}{3} = 5, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

এভাবে যদি কোন সংখ্যাকে অপর একটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তাহলে সর্বদা 1 টি উত্তর পাওয়া যায়। কখনো দুই বা ততোধিক উত্তর পাওয়া যায় না।

কিন্তু কোন সংখ্যাকে 0 দিয়ে ভাগ করা হয় তাহলে উত্তর কি হবে? অথবা $\frac{1}{0}$ এর মান যদি বের করার চেষ্টা করা হয় তাহলে কি হবে?

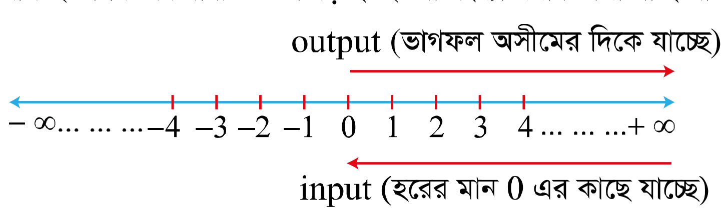
মনে করো, আমরা 1 কে প্রথমে 10 দিয়ে ভাগ করলাম, $\frac{1}{10} = 0.1$

এরপর 5 দিয়ে ভাগ করলাম, $\frac{1}{5} = 0.2$ (আগের চেয়ে বড়)

এরপর 0.1 দিয়ে ভাগ করলাম, $\frac{1}{0.1} = 10$ (আগের চেয়ে আরও বড়)

এরপর যদি 0.000001 দিয়ে ভাগ করি, $\frac{1}{0.000001} = 1000000$ (আরও আরও বড়)

অর্থাৎ, আমরা যতো ধনাত্মক সংখ্যা হতে 0 এর কাছাকাছি কোন সংখ্যা দিয়ে 1 কে ভাগ করছি অর্থাৎ, হরের মান সংখ্যারেখায় ডান পাশ থেকে যতো শূন্যের কাছাকাছি আসছে ভাগফলের মানটি ততো বড় হচ্ছে। যা সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



তাহলে 1 কে 0 দিয়ে ভাগ করলে $+\infty$ আসে, তাই তো? তাহলে কি $\frac{1}{0} = +\infty$ বলা যায়?

তোমাদের মধ্যে যারা চিন্তাশীল তাদের মনে নিশ্চয়ই প্রশ্ন জেগেছে যে, ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হলো না কেন?

এবার তাহলে চলো আমরা সংখ্যারেখায় শূন্যের বাম পাশ থেকে ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দেখি।

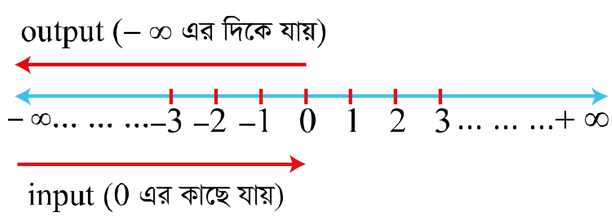
যদি 1 কে -10 দিয়ে ভাগ করি তাহলে $\frac{1}{-10} = -0.1$

তারপর 1 কে -5 দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{-5} = -0.2$ (আগের চেয়ে ছোট এবং ঋণাত্মক)

-0.1 দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{-0.1} = -10$ (আগের চেয়ে আরো বেশি ছোট এবং ঋণাত্মক)

-0.000001 দিয়ে ভাগ করলে $\frac{1}{-0.000001} = -1000000$ (আরো অনেক বেশি ছোট এবং ঋণাত্মক)

অর্থাৎ, যদি ঋণাত্মক কোন সংখ্যা হতে 0 এর কাছে আসতে থাকি এবং 1 কে ঐ সংখ্যাগুলো দিয়ে ভাগ করি, ভাগফল ততো ছোট হতে থাকে বা $-\infty$ এর দিকে যেতে থাকে।



তাহলে 1 কে 0 দিয়ে ভাগ করলে, $-\infty$ আসার কথা বা $\frac{1}{0} = -\infty$

অর্থাৎ, $\frac{1}{0} = \pm\infty$। কিন্তু, $\frac{1}{0}$ এর জন্য একসাথে দুইটা ভাগফল আসা কি যৌক্তিক? অবশ্যই না!

ভাগের সংজ্ঞানুসারে কোন সংখ্যাকে অন্য একটি সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 1 টি হবার কথা, কিন্তু এক্ষেত্রে 2 টি ভাগফল পাওয়া যাচ্ছে। অর্থাৎ, 0 দিয়ে ভাগ, ভাগের সংজ্ঞা মানছে না। তাই এটি অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত। তবে এর দুইটি প্রান্তিক মান (Limiting Value) রয়েছে: $+\infty$ এবং $-\infty$।

অনির্ণেয় (Indeterminate)

অনির্ণেয় (Indeterminate): অনির্ণেয় বলতে বুঝায় যার মান নির্ণয় করা যায় না।

গণিতের 7 টি অনির্ণেয় রূপ (7 Indeterminate Forms of Mathematics):

(i) $\frac{0}{0}$ (ii) 0^0 (iii) $0 \times \infty$ (iv) $\infty - \infty$ (v) $\frac{\infty}{\infty}$ (vi) 1^∞ (vii) ∞^0

একটি একটি করে এগুলো ব্যাখ্যা করা যাক।

(i) $\frac{0}{0}$:

0 কে 0 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফলের মান আমরা নির্ণয় করতে পারি না।

তাহলে, $\frac{0}{0}$ এর মান কোনটি হবে? 0, 1 নাকি $\pm\infty$? তাহলে কি, $\frac{0}{0}$ এর মান চারটি? প্রকৃতপক্ষে $\frac{0}{0}$ এর অসংখ্য মান এভাবে বের করা সম্ভব।

এসো, আমরা একটু ভিন্নভাবে চিন্তা করি।

$\frac{12}{3}$ এর অর্থ হলো, 3 এর সাথে কত গুণ করলে 12 হয়? উত্তর: 4 গুণ করলে।

$\frac{36}{4}$ এর অর্থ হলো, 4 এর সাথে কত গুণ করলে 36 হয়? উত্তর: 9 গুণ করলে।

তাহলে, $\frac{0}{0}$ এর অর্থ হলো 0 এর সাথে কত গুণ করলে 0 হবে? চিন্তা কর তো, 0 এর সাথে কতগুণ করলে 0 হয়? মজার ব্যাপার হলো 0 এর সাথে যেকোনো সংখ্যা গুণ করলেই 0 হয়।

মনে করি, $\frac{0}{0}$ এর মান আমরা জানি এবং তা হলো x।

অর্থাৎ, $\frac{0}{0} = x$

$\Rightarrow x.0 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং হলো x এর একটি একঘাত সমীকরণ যার মূল (x এর মান) থাকার কথা 1 টি।

এখন,

$x = 1$ বসালে, $(i) \Rightarrow 1 \times 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$x = 2$ বসালে, $(i) \Rightarrow 2 \times 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$x = 3$ বসালে, $(i) \Rightarrow 3 \times 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$x = -5$ বসালে, $(i) \Rightarrow (-5) \times 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$x = 10000000$ বসালে, $(i) \Rightarrow (10000000) \times 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

অর্থাৎ x এর যেকোন মানের জন্য (i) নং সমীকরণ সত্য। অর্থাৎ, x এর অসংখ্য অসীম সংখ্যক মান পাওয়া যাচ্ছে। কিন্তু তা অসম্ভব
[∵ সমীকরণ (i), x এর একটি একঘাত সমীকরণ; যার সর্বোচ্চ মূল 1 টি]
অর্থাৎ, এখানে x এর অসংখ্য মান পাওয়া সম্ভব কিন্তু ঠিক মানটি কত তা নির্ণয় করা যাচ্ছে না।

$\therefore \frac{0}{0}$ অনির্ণেয়।

জেনে রাখো

ভাগের সংজ্ঞানুসারে $\frac{0}{0}$ এর একটি মান থাকার কথা কিন্তু মান পাওয়া যাচ্ছে অসংখ্য। অর্থাৎ, এটি ভাগের সংজ্ঞাও মানে না। তাই, এটি অসংজ্ঞায়িত।

সতর্কতা!

সকল অনির্ণেয় আকৃতিই অসংজ্ঞায়িত। কিন্তু সকল অসংজ্ঞায়িত আকৃতি অনির্ণেয় নয়।

(ii) 0^0:

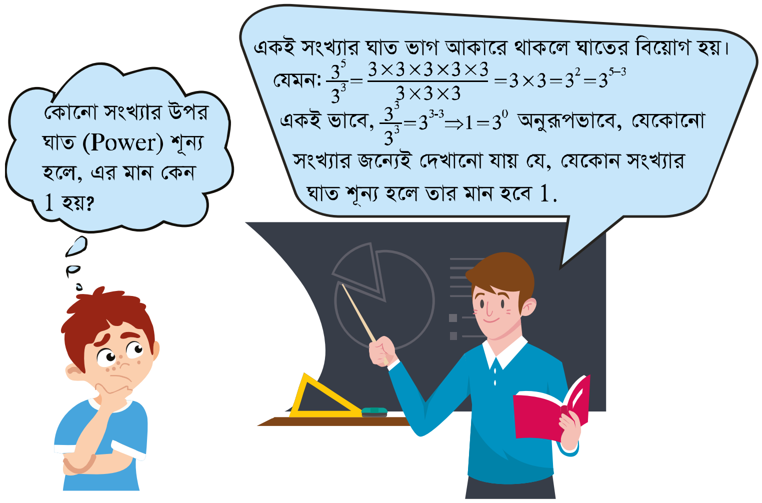
আমরা জানি, 0 এর উপর যেকোন সংখ্যা ধনাত্মক ঘাত আকারে থাকলে তার মান 0 ই থাকে। যেমন: $0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$. অর্থাৎ, আমরা যতগুলো শূন্যই গুণ করি না কেন, গুণফল শূন্য হয়। তাহলে, $0^0 = 0$ হওয়া উচিত, তাই না?

কিন্তু, আমরা তো জানি কোনো সংখ্যার উপর ঘাত শূন্য হলে তার মান 1 হয়। **যেমন:**

$3^0 = 1$

$2^0 = 1$

$1^0 = 1$



এটা কি তাহলে, 0 এর জন্যেও দেখানো যায়? $0^0 = 1$ হবে? এখানে একটা Confusion তৈরি হচ্ছে, $0^0 = 0$ নাকি 1?

চলো, 3^0 এর মান আমরা যেভাবে আমরা নির্ণয় করেছি, একইভাবে 0^0 এর মান নির্ণয়ের চেষ্টা করে দেখি।

$\frac{0^3}{0^3} = 0^{3-3}$

$\Rightarrow \frac{0}{0} = 0^0$. $\because \frac{0}{0}$ অনির্ণেয়, তাই 0^0 ও অনির্ণেয় হবে।

যেহেতু সকল অনির্ণেয় মাত্রই অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ, 0^0 অনির্ণেয় এবং অসংজ্ঞায়িত।

(iii) $0 \times \infty$:

কোন কিছুকে 0 দিয়ে গুণ করলে তার মান হয় 0। আবার কোন কিছুকে ∞ দিয়ে গুণ করলে তার মান হয় ∞ তাহলে 0 কে ∞ দিয়ে গুণ করলে কি হবে? 0 নাকি ∞ নাকি অন্য কিছু?

$0 \times \infty$ এর অর্থ হল 0 কে অসীম সংখ্যকবার যোগ করা। $0 + 0 + 0 + \cdots$ এভাবে অসীম সংখ্যক 0 যোগ করলে যোগফল কি হবে? যোগফল 0 ই হওয়ার কথা তাই না?

এসো আমরা একটি Thought Experiment করি।

মনে করো, সাদ এর জন্মদিন। তার জন্মদিন উপলক্ষে একটি এক পাউন্ডের একটি কেক আনা হয়েছে। সাদ এর 5 জন বন্ধুকে জন্মদিনে দাওয়াত করা হয়েছে। সাদ এর নীতি হলো জন্মদিনে যতজনকে দাওয়াত দেওয়া হবে প্রত্যেকের মাঝে কেক সমান ভাগে ভাগ করা হবে, প্রত্যেকে সমান পরিমাণ কেক খাবে। তাহলে, তার 5 জন বন্ধুর মাঝে কেক সমান 5 ভাগে ভাগ হবে। প্রত্যেকে তাহলে কেকের একটা বড় অংশ পাবে তাই না?

কিন্তু কেক কাটার আগে সাদের মন নরম হলো। সে তার ক্লাসের বাকি সব বন্ধুকেও দাওয়াত করলো। দাওয়াতে এখন উপস্থিত 50 জন। তাহলে, প্রত্যেকে পাবে কেকের 50 ভাগের 1 ভাগ। (এবার কিন্তু সবাই আর কেকের বড় একটা অংশ পাবে না। এখন ছোট্ট এক পিস করে কেক পাবে সকলে।)

সাদ দয়ার সাগর। কেক কাটার পূর্বে তার মনে হলো, স্কুলের বাকিদের বঞ্চিত করা একদমই ঠিক হচ্ছে না। তাই সে স্কুলের সবাইকে তার জন্মদিনে দাওয়াত করলো। দাওয়াতে এখন উপস্থিত 5000 জন। তাহলে, প্রত্যেকে পাবে কেকের 5000 ভাগের 1 ভাগ! (কেককে 5000 ভাগে ভাগ করা হলে কিন্তু এবার আর কোনো পিসই পাওয়া সম্ভব না! বড়জোড় আঙ্গুলের ডগায় একটু ক্রীমের ছোয়া হয়তো পাওয়া যাবে)