প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্র

অধ্যায়-০৩ : জটিল সংখ্যা

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
তপু ও সাইফুল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ
সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price ১৯৫/-
(একশত পঁচানব্বই টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় **উদ্ভাসের** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয় ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোন বই নেই। কিন্তু বাজারে বার্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। একারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া, মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতা' এর মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে বিগত বোর্ড পরীক্ষার পাশাপাশি রয়েছে বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্‌টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতের বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়-০৩ : জটিল সংখ্যা

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে. . .

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের “HSC Parallel Text” তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ক্রটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ক্রটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) “HSC Parallel Text” এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: “HSC Parallel Text” H.Math 2nd Paper, Chapter-03, Bangla Version, Page-10, Question-10, দেওয়া আছে, 2 কিন্তু হবে –2

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৩
জটিল সংখ্যা

গণিত ক্লাস শেষে শাফী ও রেদওয়ান গল্প করতে করতে বের হচ্ছে। এক পর্যায়ে শাফী রেদওয়ানকে একটি প্রশ্ন করলো।

শাফী : আচ্ছা, তোমাকে আমি একটা প্রশ্ন করি, দেখো তো পারো কি না?

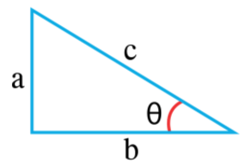
রেদওয়ান: ঠিক আছে, করো।

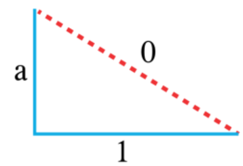
শাফী : আমাদের মাঠের কোণায় যে সমকোণী ত্রিভুজাকার বাগান আছে, ধরো সেটার যে সবচেয়ে ছোট বাহু আছে তার দৈর্ঘ্য 1 মিটার এবং সবচেয়ে বড় বাহুটার দৈর্ঘ্য $\sqrt{5}$ মিটার। তাহলে যে বাহুটা বাকি থাকে, তার দৈর্ঘ্য কত?

রেদওয়ান : আরে! এ তো অনেক সোজা। বাগানটার আকৃতি যেহেতু সমকোণী ত্রিভুজের মতো, তাই পিথাগোরাসের উপপাদ্য দিয়েই তো বের করা যাবে।

(রেদওয়ান মনে মনে হিসাব করলো $\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \sqrt{4} = 2$) এরপর দওয়ান উত্তর দিলো ঐ বাহুটার দৈর্ঘ্য হবে 2 মিটার।

শাফী : ঠিক আছে, তবে এখন একটু অন্যরকম প্রশ্ন করবো। এবার কল্পনা করো যে, ক্ষুদ্রতম বাহুটা 1 মিটারই আছে, কিন্তু বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য এখন শূন্য (0) হয়ে গেছে, তাহলে তৃতীয় বাহুটার দৈর্ঘ্য কত হবে?





রেদওয়ান : $\sqrt{5}$ এর জায়গায় শূন্য হলে তো $0^2 - 1^2 = -1$ হয়, কিন্তু -1 এর বর্গমূল তো সম্ভব না। বুঝতেছি না কী হলো, এটাতো বাস্তবসম্মত উদাহরণ মনে হচ্ছে না। এখানে দেখি বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম বাহু অপেক্ষা ছোট। সবই কাল্পনিক মনে হচ্ছে। তুমিই বলে দাও কি হবে?

চলো, ওদেরকে ওদের মতো গল্প করতে দিই। তোমরা কি কেউ বলতে পারবে প্রশ্নটার উত্তর কি হবে? যদি উত্তর মাথায় না আসে, আলোচনার মধ্যবর্তী কোন অংশে আশা করি তোমরা উত্তরটি পেয়ে যাবে।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানের সূত্রপাত ধরেই প্রধানত জটিল সংখ্যার উৎপত্তি। ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানের ঐতিহাসিক বিবর্তনের হাত ধরেই সর্বপ্রথম জেরোলামে কারডানো (১৫০১-১৫৭৬), একজন ইতালিয় গণিতবিদ তার প্রকাশিত "Ars Magna" (১৫৪৫) বইটিতে সর্বপ্রথম "casus irreducibilis" নামক সমস্যার সম্মুখীন হন, যা তিনি ব্যাখ্যা না করে এড়িয়ে যান। এই সমস্যার প্রধান কারণ " $\sqrt{}$ " এর ভিতর ঋণাত্মক সংখ্যা, যার যথাযথ ব্যাখ্যা তখন ছিল না। সেদিক থেকে দেখলে,কারডানোই সর্বপ্রথম "$a + \sqrt{-b}$ " এর আবর্তন ঘটান, যদিও তিনি এটি ব্যাখ্যা করতে পারেননি। তার লেখা " Ars Magna" এর ৩৭ তম অধ্যায়ে নিম্নোক্ত সমস্যাটি উল্লেখ করা হয়: " 10 কে এমন দুই ভাগে ভাগ করো, যাতে তাদের গুণফল 40 হয়। "

বোঝাই যাচ্ছে এটি অসম্ভব, তা সত্ত্বেও আমরা যদি 10 কে সমান দুই ভাগে ভাগ করি, তবে প্রতি ভাগে আমরা 5 পাই। 5 কে বর্গ করে আমরা 25 পাই। 25 থেকে 40 বিয়োগ করলে আমরা -15 পাই। এই -15 এর বর্গমূলকে আমরা 5 এর সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে আমরা $5 + \sqrt{-15}$ এবং $5 - \sqrt{-15}$ পাই, যাদের গুণফল 40. অর্থ্যাৎ, $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$

পরবর্তীতে রাফায়েল বোমবেলি (Rafael Bombelli) (১৫২৬-১৫৭২) তার প্রকাশিত "1 Algebra" (১৫৭২-৭৩) নামক বইয়ে সর্বপ্রথম "$\sqrt{-1}$ " ব্যবহার করেন, এবং এটির নাম দেন, "piudimeno" , তবে তার বইয়ে "casus irreducibilis" সম্পূর্ণ রূপে ব্যাখ্যা করা হয়।

এরই ধারাবাহিকতায় পরবর্তীতে রেনে ডেস কারটেস (১৫৯৬-১৬৫০) জটিল সংখ্যাকে জ্যামিতিক অসম্ভাব্যতার সাথে সংযোগ ঘটান। যার প্রতিফলন আমরা দেখি $z^2 = az - b^2$ সমীকরণটি সমাধানে তার ব্যবহৃত জ্যামিতিক সম্পাদ্যে। যেখানে a, b^2 উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা। তিনি-ই প্রথম "imaginary" কথাটির প্রবর্তক। জন ওয়ালিস (১৬১৬-১৭০৩) তার "algebra" নামক নোটে পরবর্তীতে $\sqrt{-1}$ কে জ্যামিতিকভাবে ব্যাখ্যা করতে কিছুটা সফলতা লাভ করেন। এরপর আব্রাহাম ডে মইভিয়ার (১৬৬৭-১৭৫৪) লন্ডনে নিউটনের সখ্যতা লাভ করেন এবং ১৬৯৮ সালে স্বীকার করেন যে, তার বিখ্যাত "De Moivre's Theorem " এর অনুরূপ একটি সূত্র নিউটন আগে থেকেই জানতেন এবং ব্যবহার করেছেন।

$i = \sqrt{-1}$ এর প্রবর্তক লেওনার্দ অয়লার (১৭০৭-১৭৮৩) প্রথম জটিল সংখ্যাকে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক এর মাধ্যমে ব্যাখ্যা করেন, তবুও জটিল সংখ্যার সম্পূর্ণ ব্যাখ্যা দিতে ব্যর্থ হন। পরবর্তীতে তিনিই কিন্তু জটিল সংখ্যার ঘাত ব্যাখ্যা করেন এবং প্রমাণ করেন,

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$।

ক্যাসপার ওয়েসেল (১৭৪৫-১৮১৮) একজন নরওয়ের গণিতবিদ, প্রথম গণিতবিদ হিসেবে জটিল সংখ্যার সঠিক ব্যাখ্যা দিতে সক্ষম হন। তিনি ১৭৯৯ সালে 'The Royal Danish Academy' তে একটি গুরুত্বপূর্ণ গবেষণাপত্র ''On the Analytical Representation of Direction: An Attempt''প্রদান করেন, যা পরবর্তীতে ডাচ গণিতবিদ সোফাস ক্রিস্টিয়ান জুয়েল ১৮৯৭ সালে পুণরুদ্ধার করেন। ওয়েসেলের সমসাময়িক জিন-রবার্ট আর্গান্ড (১৭৬৮-১৮২২) পরবর্তী আর্গান্ড ডায়াগ্রামের প্রবর্তন করেন। উইলিয়াম রোয়ান হ্যামিলটন (১৮০৫-৬৫) ১৮৩১ সালে তার গবেষণাপত্রে বাস্তব সংখ্যা (a, b) এর যুগলকে কাপল আকারে সংজ্ঞায়িত করেন যেখানে তিনি কাপলের যোগ ও গুণ বিস্তারিত আলোচনা করেন: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ এবং $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ এটাই আসলে জটিল সংখ্যার একটি বীজগাণিতিক ব্যাখ্যা। পরবর্তীতে, অগাস্টিন-লুইস কউচি (১৭৮৯-১৮৫৭) ১৮১৪ সালে "French Academic des Sciences" এ তার জটিল সংখ্যার ফাংশনের উপর যথার্থ ব্যাখ্যা সংবলিত গবেষণাপত্র প্রদান করেন। এভাবে অসংখ্য বিজ্ঞানী ও গণিতবিদদের অক্লান্ত পরিশ্রমের ফলে জটিল সংখ্যা তার বর্তমান রূপ ধারণ করে।

i এর ধারণা ও তাৎপর্য

গণিতশাস্ত্রে যেকোনো সমীকরণ এবং এর সমাধান নির্ণয় অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বিষয়। চলো একটি সমীকরণ সমাধান করা যাক।

ধরা যাক, $x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটি আমরা সমাধান করবো।

এখন, $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \therefore x = \pm 1$

এই সমীকরণটি আমরা সহজেই সমাধান করে ফেললাম। এখন, চলো একটু অন্যরকম আরেকটি সমীকরণ দেখে নিই।

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

বর্গমূলের ভিতর -1 অর্থাৎ ঋণাত্মক সংখ্যা দেখে এখনই ঘাবড়ানোর প্রয়োজন নেই। কারণ, একটু পরে আমরা এর সমাধান দেখবো। তার আগে চলো আরেকটি সমীকরণ দেখে নিই।

$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \therefore x = \pm 3\sqrt{-1}$

কী দেখতে পাচ্ছো? একটি ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল করতে গেলেই $\sqrt{-1}$ বারবার চলে আসছে। আমরা জানি, ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সকল সংখ্যার বর্গই ধনাত্মক সংখ্যা হয়। অর্থাৎ, কোন ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব কোন সংখ্যা হতে পারে না। কী বড় সমস্যা!

এই সমস্যার সমাধান করতে গিয়েই বিখ্যাত গণিতবিদ অয়লার সর্বপ্রথম কাল্পনিক বা imaginary সংখ্যার ধারণা নিয়ে আসেন। তিনি $\sqrt{-1}$ কে i দ্বারা প্রকাশ করেন। এই i কোনো বাস্তব সংখ্যা না, এটি আমাদের কল্পনা করা একটি সংখ্যা।

তাহলে, আগের দুইটি সমীকরণ, $x^2 = -1$ এবং $x^2 = -9$ এর সমাধান হবে যথাক্রমে

$x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$ এবং $x = \pm 3\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm 3i$।

এরকম $2i, \sqrt{2}i, 5i, 10i, \sqrt{13}i$ সব-ই একেকটি কাল্পনিক সংখ্যা। অর্থাৎ, একটি বাস্তব সংখ্যার সাথে i বা, $\sqrt{-1}$ গুণ করলে কাল্পনিক সংখ্যা পাওয়া যায়। যেখানে, $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \therefore i^2 = -1$ হয়।

অর্থাৎ, কাল্পনিক সংখ্যাকে বর্গ করলে ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় ।

তোমাদের নিশ্চয়ই রেদওয়ান ও শাফীর কথা মনে আছে। রেদওয়ান -1 এর বর্গমূল নিয়ে যে ঝামেলায় পড়েছিল, তার সমাধান কিন্তু আমরা পেয়ে গেছি। ওরা যে কাল্পনিক সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য খুঁজছিলো, তার দৈর্ঘ্য হবে একটি কাল্পনিক সংখ্যাই। এর মান আমরা কিছুক্ষণ আগে জেনেছি, যা হলো $\sqrt{-1} = i$।

জেনে রাখো

i হলো এমন একটি সংখ্যা যাকে বর্গ করলে -1 পাওয়া যায়। অর্থাৎ, i এর প্রকৃত সংজ্ঞা দেওয়া হয় $i^2 = -1$ এর সাহায্যে, $i = \sqrt{-1}$ এর সাহায্যে নয়। মূল সংজ্ঞা $i^2 = -1$ অনুযায়ী, $i = \pm\sqrt{-1}$
অর্থাৎ, i এর মান $+\sqrt{-1}$ বা $-\sqrt{-1}$ হতে পারবে। প্রচলিত প্রথা অনুযায়ী ‘i’ এর মান $\sqrt{-1}$ বিবেচনা করেই আমরা জটিল সংখ্যা আলোচনা করব। তবে, $i = -\sqrt{-1}$ বিবেচনা করা হলে, $-i = \sqrt{-1}$ হয়। এটিও গ্রহণযোগ্য $i = -\sqrt{-1}$ হওয়া কেন যুক্তিযুক্ত তা আমরা সামনের আরো কিছু টপিক পড়ে জানতে পারব।

i এর ঘাত এবং i সংক্রান্ত ধারা

তোমরা তো পূর্বেই দেখেছো, $i^2 = -1$
এখন, চলো আমরা i এর ঘাত নিয়ে একটু আলোচনা করি।

যদি $i^1 = i$ এবং $i^2 = -1$ হয়।
তবে, $i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$
$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$ হয়।

আবার, $i^5 = i^4.i = (1).i = i$
$i^6 = i^4.i^2 = 1.(-1) = -1$
$i^7 = i^4.i^3 = 1.(-i) = -i$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (i^4)^2 = (1)^2 = 1$

লক্ষ করো i এর ঘাত 4 বৃদ্ধি করলেও তার মান একই আসে।
আচ্ছা, তোমরা i এর ঘাত সর্ম্পকে তো জানতে পারলে, কিন্তু i এর ঘাত বড় কোন সংখ্যা হলে এভাবে ভেঙ্গে ভেঙ্গে নির্ণয় করা তো কিছুটা সময় সাপেক্ষ ব্যাপার। চলো আমরা একটি Generalized formula বের করার চেষ্টা করি। এজন্যে প্রথমত কিছু Experiment করা দরকার। যেহেতু দেখা যাচ্ছে i এর ঘাত 4 এর সাথে connected, তাই চলো আগে পরপর কিছু সংখ্যা নিয়ে 4 দ্বারা ভাগ করে বিশ্লেষণ করে দেখি।

4)9(2 8 1	4)10(2 8 2	4)11(2 8 3	4)8(2 8 0
$9=4\times2+1$	$10=4\times2+2$	$11=4\times2+3$	$8=4\times2+0$

আবার,

4)17(4 16 1	4)18(4 16 2	4)19(4 16 3	4)16(4 16 0
$17=4\times4+1$	$18=4\times4+2$	$19=4\times4+3$	$16=4\times4+0$

খেয়াল করে দেখো, এখানে প্রত্যেক সংখ্যাকে আমরা 4 এর গুণিতক এবং সংখ্যাটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষের সমষ্টি আকারে প্রকাশ করতে পারি। এখন, আমরা পূর্বোক্ত আলোচনার সাথে যদি কিছুটা Relate করি, তাহলে দেখবো:

$i^5 = i^{4\times1+1} = i^4 \cdot i^1 = i$ [এখানে, ভাগশেষ 1 এর জন্য $i^1 = i$ পাওয়া যায়]

$i^6 = i^{4\times1+2} = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1$ [এখানে, ভাগশেষ 2 এর জন্য $i^2 = -1$ পাওয়া যায়]

$i^7 = i^{4\times1+3} = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$ [এখানে, ভাগশেষ 3 এর জন্য $i^3 = -i$ পাওয়া যায়]

$i^4 = i^{4\times1+0} = i^4 \cdot i^0 = 1$ [এখানে, ভাগশেষ 0 এর জন্য $i^0 = 1$ পাওয়া যায়]

কী দেখতে পাচ্ছো? i এর ঘাতসমূহকে আমরা 4 এর গুণিতক এবং সংখ্যাটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষের সমষ্টি আকারে প্রকাশ করতে পারি।
অনুরূপভাবে,

$i^{17} = i^{4\times4+1} = (i^4)^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$ [এখানে, ভাগশেষ 1এ জন্য $i^1 = i$ পাওয়া যায়]

$i^{18} = i^{4\times4+2} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$ [এখানে, ভাগশেষ 2 এ জন্য $i^2 = -1$ পাওয়া যায়]

$i^{19} = i^{4\times4+3} = (i^4)^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$ [এখানে, ভাগশেষ 3 এ জন্য $i^2 = -i$ পাওয়া যায়]

$i^{16} = i^{4\times4+0} = (i^4)^4 \cdot i^0 = 1 \cdot 1 = 1$ [এখানেও, ভাগশেষ 0 এ জন্য $i^0 = 1$ পাওয়া যায়]

অতএব, আমরা সামগ্রিকভাবে যদি দেখি,

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$	$i^{13} = i^{12} \cdot i = i$	$i^{4n+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -1$	$i^{14} = i^{12} \cdot i^2 = -1$	$i^{4n+2} = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = -i$	$i^{15} = i^{12} \cdot i^3 = -i$	$i^{4n+3} = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$	$i^8 = (i^4)^2 = 1$	$i^{12} = i^8 \cdot i^4 = 1$	$i^{16} = i^{12} \cdot i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$

অর্থাৎ, $i^{4n+1} = i^1 = i$ $\quad i^{4n+3} = i^3 = -i$ $\quad$ বা, $i^n = i^{n \text{ কে 4 দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষ}}$
$i^{4n+2} = i^2 = -1$ $\quad i^{4n} = i^0 = 1$

জেনে রাখো

লক্ষ করে দেখ, $i = -\sqrt{-1}$ বিবেচনা করলে $i^2 = \left(-\sqrt{-1}\right)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$i^3 = \left(-\sqrt{-1}\right)^3 = -\left(\sqrt{-1}\right)^3 = -\left(\sqrt{-1}\right)^2\left(\sqrt{-1}\right) = -(-1)\left(\sqrt{-1}\right) = -\left(-\sqrt{-1}\right) = -i$ $[\because -\sqrt{-1} = i]$

$i^4 = \left(-\sqrt{-1}\right)^4 = \left(-\sqrt{-1}\right)^2\left(-\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)(-1) = 1$

অর্থাৎ, এক্ষেত্রেও, $i^{4n+1} = i^1 = i$; $i^{4n+2} = i^2 = -1$; $i^{4n+3} = i^3 = -i$; $i^{4n} = i^0 = 1$ | যা, $i = \sqrt{-1}$ বিবেচনা করে প্রাপ্ত সূচকীয় রাশির মানের অনুরূপ।

উদাহরণ-০১: $a < 0, b > 0$ হলে, $\sqrt{a}\sqrt{b} = ?$

সমাধান: $a < 0$ হলে, $|a| = -a$; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{-|a|} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{|a|i^2} \cdot \sqrt{b} = i\sqrt{|a|b}$ **(Ans.)**

i^n; i এর ঘাত সংক্রান্ত সমস্যা

উদাহরণ-০২: i^{4586} এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, i এর Power-4586; প্রথমে একে 4 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

```
4) 4586 (1146
   4
   ---
    5
    4
   ---
    18
    16
   ---
     26
     24
    ---
      2
```

$\therefore 4586 = 4 \times 1146 + 2 \therefore i^{4586} = i^{4584}.i^2 = i^{4\times1146}.i^2 = (i^4)^{1146}.i^2 = (1)^{1146}.(-1) = -1$

(শেষ দুই ডিজিট 4 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যাবে সেটিই i এর ঘাত হবে।)

চলো আমরা একটি উদাহরণের সাহায্যে দেখি যে, $i^{10943} = ?$

সংখ্যাটি i^{10943}, এখানে i এর ঘাতের শেষ দুই ডিজিট 43। সুতরাং

$$\begin{array}{l} 4)10943(2735 \rightarrow \text{ভাগফল} \\ \underline{\ \ 8\ \ } \\ \ \ 29 \\ \ \ \underline{28} \\ \ \ \ \ 14 \\ \ \ \ \ \underline{12} \\ \ \ \ \ \ \ 23 \\ \ \ \ \ \ \ \underline{20} \\ \ \ \ \ \ \ \ 3 \rightarrow \text{ভাগশেষ} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4)43(10 \rightarrow \text{ভাগফল} \\ \ \ \underline{40} \\ \ \ \ \ 3 \rightarrow \text{ভাগশেষ} \end{array}$$

আবার, $10943 = \underbrace{10900}_{4 \text{ দ্বারা বিভাজ্য}} + 43$

$\therefore i^{10943} = i^3 = -i$ **(Ans.)**

জেনে রাখো

এখন তোমরা কি বলতে পারবে কেনো শেষে দুই সংখ্যা নিয়ে আমরা কাজ করলাম? কেনো শেষ দুটি সংখ্যার ভাগশেষ মূল সংখ্যা 10943 এর ভাগশেষের সমান? কারণ, 10943 সংখ্যাটি বিশ্লেষণ করলে দেখা যায়-

1 0 9 4 3

→ 10,000
→ 0,000
→ 900

এই সংখ্যাগুলো প্রত্যেকটি 4 দ্বারা বিভাজ্য ফলে ভাগশেষ 0।

→ 40
→ 3

একক ও দশক স্থানীয় অংক নিয়ে ভাবতে হবে। $40 + 3 = 43$ কে 4 দিয়ে ভাগ করলে অবশিষ্ট থাকে 3 যা ভাগশেষ।

ফলে আমরা একটি বড় সংখ্যাকে 4 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাবো তা শেষের দুটি অংক থেকে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।

উদাহরণ-০৩: $i^{10977} = ?$

সমাধান: এখানে, i এর ঘাত 10977 যাকে আমরা লিখতে পারি,

1 0 9 7 7

→ 10,000
→ 0,000
→ 900

এই সংখ্যাগুলো প্রত্যেকটি 4 দ্বারা বিভাজ্য ফলে ভাগশেষ 0।

→ 70
→ 7

শেষ দুটি স্থানীয় অংক নিয়ে আমরা ভাগশেষ সম্পর্কে ধারণা করতে পারবো।

$$\begin{array}{l} 4)77(19 \rightarrow \text{ভাগফল} \\ \ \ \underline{76} \\ \ \ \ \ 1 \rightarrow \text{ভাগশেষ} \end{array}$$

$\therefore i^{10977} = i^1 = i$ **(Ans.)**

আবার, $10977 = \underbrace{10900}_{4 \text{ দ্বারা বিভাজ্য}} + 77$

এজন্য আমরা কোনো সংখ্যাকে 4 ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে তা সংখ্যাটির একক ও দশক স্থানীয় অংক নিয়ে যে সংখ্যা পাই সেটিকে ভাগ করে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় ঐ ভাগশেষই মূল সংখ্যাকে 4 দ্বারা ভাগ করার পর প্রাপ্ত ভাগশেষের সমান।

উদাহরণ-০৪: $i^{12119} = ?$

সমাধান: এখন,

$$\begin{array}{r} 4\,)\,19\,(\,4 \rightarrow \text{ভাগফল} \\ \underline{16} \\ 3 \longrightarrow \text{ভাগশেষ} \end{array}$$

$\therefore i^3 = -i$ **(Ans.)**

উদাহরণ-০৫: $i^{502} = ?$

সমাধান:

5 0 2

→ 500, → 00 : 4 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

→ 2

$\therefore$ ভাগশেষ $= 2 \; \therefore i^2 = -1$ **(Ans.)**

জেনে রাখো

abcd সংখ্যাটির 4 দ্বারা ভাগের ফলে প্রাপ্ত ভাগশেষ-

a b c d

→ 1000 a, → 100 b : 4 দ্বারা বিভাজ্য

→ 10 c, → 1 d : 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকবে।

আবার, $abcd = \underbrace{ab00}_{\text{4 দ্বারা বিভাজ্য}} + \underbrace{cd}$

4 দ্বারা বিভাজ্য

4 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যাবে তা মূল সংখ্যার 4 দ্বারা ভাগকৃত ভাগশেষের সমান হবে।

i এর ঋণাত্মক ঘাতসমূহ

এতক্ষণ ধরে আমরা i এর যেসব সূচকীয় রাশি দেখেছি তাদের সবার ঘাত ছিল অঋণাত্মক। যেমন: i^0, i^{16}, i^{19} ইত্যাদি। কিন্তু i এর ঘাত তো ঋণাত্মকও হতে পারে। যেমন: $i^{-2}, i^{-33}, i^{-250}$ ইত্যাদি। তাহলে চলো এখন আমরা এমন রাশিগুলোর মান সম্পর্কে জেনে নিই। এক্ষেত্রে আমরা দুই ধরনের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

Method-1: এ পদ্ধতি সবচেয়ে ভালো বোঝা যাবে সরাসরি উদাহরণ পর্যবেক্ষণ করে। ঋণাত্মক সূচক বিশিষ্ট i সংক্রান্ত প্রথম রাশি i^{-1}

এখানে, $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1.i^3}{i.i^3} = \frac{i^3}{i^4} = \frac{-i}{1} = -i$

আবার, $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1.i^2}{i^2.i^2} = \frac{i^2}{i^4} = \frac{-1}{1} = -1$

তোমার কি লক্ষ করেছ কীভাবে i^{-1} ও i^{-2} এর মান বের করা হয়েছে? প্রতিক্ষেত্রেই আমরা হরে থাকা i এর ঘাত '4' বানানোর জন্য হর ও লবে প্রয়োজনীয় i এর ঘাত দিয়ে গুণ করেছি। কেননা এর ফলে হরে থাকা i^4 এর মান 1 হয়ে যায়। অর্থাৎ, তখন রাশিটি i এর ধনাত্মক ঘাতবিশিষ্ট রাশিতে পরিণত হয়, যাকে আমরা পূর্বে শেখা নিয়ম অনুযায়ী সমাধান করতে পারি।

চলো আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক।

$$i^{-41} = \frac{1}{i^{41}} = \frac{1}{i^{40+1}} = \frac{1}{i^{40}.i^1} = \frac{1}{(i^4)^{10}}.\frac{1}{i} = \frac{1}{i} = \frac{1.i^3}{i.i^3} = \frac{-i}{1} = -i$$

i^{-41} এর মান চাইলে একটু অন্যভাবেও বের করা যেত।

$$i^{-41} = \frac{1}{i^{41}} = \frac{i^3}{i^{41}.i^3} = \frac{-i}{i^{44}} = \frac{-i}{(i^4)^{11}} = \frac{-i}{(1)^{11}} = -i$$