প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্র

চতুর্থ অধ্যায় : বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, আরিফ, তপু ও সাইফুল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ
আগস্ট, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৯৫/-
(একশত পঁচানব্বই টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় ***উদ্ভাসের*** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোন বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। একারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া, মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মূখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতা' এর মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে বিগত বোর্ড পরীক্ষার পাশাপাশি রয়েছে বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতের বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

চতুর্থ অধ্যায় : বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে . . .

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" H.Math 2nd Paper, Bangla Version, Page-12, Question-01, দেওয়া আছে, 3 কিন্তু হবে 0।

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৪ বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ

এসো, আমরা একটা মজার খেলা খেলি।

(i) তোমরা মনে মনে 1-9 এর মধ্যে একটি অঙ্ক ধরো।

(ii) যে সংখ্যাটি ধরেছো তার সাথে 10 গুণ করো।

(iii) গুণফলের সাথে 1 যোগ করো।

(iv) এবার, (ii) নং ধাপে প্রাপ্ত গুণফল এবং (iii) নং ধাপে প্রাপ্ত যোগফল গুণ করো।

(v) এখন, গুণ করে যে সংখ্যাটি পেলে তার সাথে তোমরা 5 যোগ করো।

তোমরা যে সংখ্যাটি পেলে তার এককের ঘরের অঙ্কটি হলো 5 এবং দশকের ঘরের অঙ্কটি হলো তোমরা মনে মনে যে সংখ্যাটি সর্বপ্রথম ধরেছো সেই সংখ্যাটি। আর সংখ্যাটির একক ও দশকের ঘরের অঙ্ক বাদে অবশিষ্ট অঙ্ক বা অঙ্কগুলো নিয়ে গঠিত সংখ্যাটি হলো শুরুতে যে সংখ্যাটি মনে মনে ধরেছো তার বর্গ। তোমরা যেকোনো অঙ্ক ধরে সত্যতা যাচাই করতে পারো।

যেমন: প্রথম ধাপে অঙ্ক হিসেবে 6 ধরে নিলে পঞ্চম ধাপে 3665 পাওয়া যায়। যেখানে এককের ঘরের অঙ্ক 5, দশকের ঘরের অঙ্ক 6 এবং অবশিষ্ট অঙ্ক নিয়ে গঠিত সংখ্যা 36, যা 6 এর বর্গ। চমৎকার না বিষয়টা?

এর পিছনে রয়েছে গাণিতিক ব্যাখা। গাণিতিক ব্যাখাটা হলো, আমরা যদি অঙ্কটিকে x ধরে তার সাথে 10 গুণ করি তাহলে 10x পাই। 10x এর সাথে 1 যোগ করে পাই: $(10x + 1)$। এবার, 10x ও $(10x + 1)$ গুণ করে পাই: $10x \times (10x + 1) = 100x^2 + 10x$ এবং এর সাথে 5 যোগ করে পাই: $100x^2 + 10x + 5$। তাহলে ফলাফল দাঁড়ায় $100x^2 + 10x + 5$।

$$\begin{array}{ccccc} 100x^2 & + & 10x & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 100\times 6^2 & + & 10\times 6 & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3600 & + & 60 & + & 5 = 3665 \end{array}$$

$100x^2 + 10x + 5$ রাশি থেকে বোঝাই যাচ্ছে, এককের অঙ্ক সর্বদা 5, দশকের অঙ্কে x বা শুরুতে মনে মনে তুমি যে অঙ্ক ধরেছিলে তাই থাকবে এবং একক-দশক ভিন্ন অঙ্ক নিয়ে গঠিত সংখ্যা x এর বর্গ হবে।

প্রাপ্ত এই "$100x^2 + 10x + 5$ " হলো একটা বহুপদী। তোমরা কি জানো বহুপদী কী? না জানলে তাতেও কোনো সমস্যা নেই। পরবর্তী অংশে আমরা বহুপদী সম্পর্কে বিস্তারিত জানবো।

সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

রোম যেমন একদিনে তৈরি হয়নি, তেমনি বহুপদীও একদিনে বা একজনের হাতে পূর্ণতা পায়নি। বহুপদীকে রূপদান ও সমীকরণ সমাধানের ইতিহাস প্রাচীন, বিশাল ও কিছু কিছু ক্ষেত্রে বিতর্কিত। নিচে সংক্ষিপ্ত আকারে আমরা এই ইতিহাস সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব।

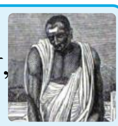
1900-2000 BC Babylon

ব্যবলনীয় গণিতবিদেরা সর্বপ্রথম দ্বিঘাত সমীকরণের ধারণাকে সবার সামনে তুলে ধরে এবং সমাধান খুঁজে বের করার চেষ্টা করে

300 BC-250 AD Greeks

গ্রিক গণিতবিদ Euclid প্রথম দ্বিঘাত সমীকরণকে জ্যামিতিক রূপ দেন। পরবর্তীতে Diophantus সর্বপ্রথম বহুপদীকে বীজগাণিতিক রাশিতে রূপদান করেন এবং ষড়মাত্রিক বহুপদীয় সমীকরণ পর্যন্ত সমাধানের লক্ষ্যে বীজগাণিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করেন। তার সৃষ্ট বহুপদীতে ঘাত ও ধ্রুবপদ প্রকাশের ভিন্ন ভিন্ন প্রতীক খুঁজে পাওয়া গিয়েছিল।

7th century, Indians

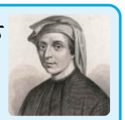


Brahmagupta (598-665 AD) এর আমলে বহুপদীয় চলক, ধ্রুবক নিয়েও অনেক গবেষণাকর্ম খুঁজে পাওয়া যায়।

9th-11th century, Persians

Al khwarizmi (800-847 AD) দ্বিঘাত সমীকরণের মৌলিক ধারণা, প্রমাণ ও উদাহরণ নিয়ে কাজ করেছিলেন। এছাড়া চলকের প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি ও বহুপদীয় সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে তার অবদান রয়েছে। ওমর খৈয়াম জ্যামিতিকভাবে পরাবৃত্ত ও বৃত্তের ছেদের মাধ্যমে ত্রিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় করেন। আল-খারাজি প্রথম বহুপদীর গ্রাফ অঙ্কন করেন এবং আল-সামাওয়াল বহুপদীর ধারণাকে বিস্তৃত করলেও ইউরোপীয় রেনেসাঁয় তার গবেষণাকর্মের স্বীকৃতি দেওয়া হয়নি।

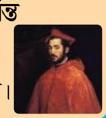
13th-14th century



Leonard Fibonacci ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানের আসন্ন মান নির্ণয় করেন। চতুর্দশ শতাব্দীতে আলকাসি ত্রিঘাত সমীকরণকে নতুন এক পদ্ধতিতে সমাধান করে দেখান।

Europian Renaissance

del Ferro, Tartaglia, Cardano চলক ও ধ্রুবপদ বিশিষ্ট সাধারণ ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ে সক্ষম হন। Ludovico Ferrari চতুর্মাত্রা পর্যন্ত বহুপদীয় সমীকরণ গঠন করেন এবং দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে দেখান।



Contribution of Rene Descartes

ফরাসি গণিতবিদ রেনে দেকার্তে বহুপদীর নতুন ধারণাকে সামনে এনে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির (analytic geometry) সাথে সমন্বয় করেন। তিনি ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য বর্ণনা করেন। তিনিই সর্বপ্রথম দ্বিঘাতের সাধারণ রূপ বর্ণনা করে গ্রাফে তা উপস্থাপন করেন। এর প্রেক্ষিতে সপ্তদশ শতকে 'Polynomial' শব্দটি প্রথম গৃহীত হয়।

Modern era

Abel-Ruffini পাঁচ এবং উচ্চ মাত্রার বহুপদীর ধারণা প্রদান করেন এবং নিউটন-রাফসনের আসন্ন মান পদ্ধতির সীমাবদ্ধতা দূর করেন। পরবর্তীতে Evariste Galois (1832 AD) যেকোনো মাত্রার বহুপদীর মূল নির্ণয়ের তত্ত্বকে পরিপূর্ণতা দান করেন।

> "কারো সাথে যোগাযোগ রক্ষা করার সবচেয়ে উৎকৃষ্ট উপায় হচ্ছে তাঁর কথা গভীর মনোযোগ দিয়ে শোনা, যেটা কেউ কোথাও তোমাকে বলবে না।"
> Peter Drucker

জেনে রাখো

রাশি: ভৌত জগতে যা কিছু পরিমাপযোগ্য তাকে রাশি (Expression) বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, সময় প্রভৃতি পরিমাপযোগ্য এবং মান পরিবর্তিত হতে পারে। তাই অনেক সময় রাশিকে বিভিন্ন প্রতীক বা চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। যেমন: দৈর্ঘ্যকে l এবং সময়কে t দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বীজগাণিতিক রাশি: এক বা একাধিক সংখ্যা, চলক, চলকের ধাত, অপারেটর $(+,-,\times,\div)$ সংবলিত রাশিকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়। যেমন: $2x, x+y, 2x+3ay-5, 6x+4y^2+\sqrt{z}$ ইত্যাদি। এখানে, $x+y$ বীজগাণিতিক রাশিতে x ও y চলকদ্বয় যোগ চিহ্ন দ্বারা সংযোজিত আছে। আবার $2x+3ay-5$ বীজগাণিতিক রাশিতে $2x, 3ay$ ও 5 যোগ এবং বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা একত্রে বিদ্যমান। x,y,2x, 3ay এবং 5 হলো এক একটি পদ। এখানে, x,y হলো চলক। চলকের মান পরিবর্তনশীল; এক সময়ে সে একটি করে মান গ্রহণ করতে পারে। আবার, কোনো প্রতীক একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করলে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। যেমন: π, e ইত্যাদি।

গাণিতিক পদ: বীজগাণিতিক রাশিতে যেসব অংশ যোগ চিহ্ন $(+)$ বা বিয়োগ চিহ্নের $(-)$ দ্বারা সংযোজিত থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে ঐ বীজগাণিতিক রাশির পদ বলা হয়। $2x+3ay-5$ বীজগাণিতিক রাশিতে $2x, 3ay$ ও -5 হলো একেকটি পদ। এখানে, -5 কে ধ্রুবক পদ বলা হয়।

একপদী রাশি: যে রাশিতে একটি পদ থাকে, তাকে একপদী রাশি (Monomial Expression) বলা হয়। যেমন: 6ab

দ্বিপদী রাশি: যে রাশিতে দুইটি পদ থাকে, তাকে দ্বিপদী রাশি (Binomial Expression) বলা হয়। যেমন: $6a+3b$

ত্রিপদী রাশি: যে রাশিতে তিনটি পদ থাকে, তাকে ত্রিপদী রাশি (Trinomial Expression) বলা হয়। যেমন: $6a+3b-5c$

এখানে, একপদী, দ্বিপদী বা ত্রিপদী সকল রাশিই আসলে একেকটি বহুপদী রাশি।

তাহলে কি সকল বীজগাণিতিক রাশিই বহুপদী?

না! সকল বীজগাণিতিক রাশি বহুপদী নয়; কিন্তু বহুপদী মাত্রই বীজগাণিতিক রাশি। আসলে বহুপদী একটি বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি, যেখানে পদসমূহে চলকের ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়।

বহুপদীয় ফাংশন ও বহুপদীয় সমীকরণ

বহুপদী হচ্ছে এক ধরনের বীজগাণিতিক রাশি যা এক বা একাধিক পদ বিশিষ্ট হতে পারে। বহুপদীর প্রতিটি পদে সাধারণত একটি ধ্রুবক এবং একটি চলক থাকে।

অর্থাৎ বহুপদীতে প্রতিটি পদ হবে Cx^p আকারের। এখানে, C হচ্ছে একটি ধ্রুবক, x হচ্ছে চলক এবং p হচ্ছে x এর ঘাত। বহুপদীতে প্রতিটি পদে p অর্থাৎ x এর ঘাত হতে হবে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$p=0$ হলে, পদ হবে ধ্রুবক পদ $(C\cdot x^0 = C)$। বহুপদীতে প্রতিটি পদ যোগ চিহ্ন $(+)$ বা, বিয়োগ চিহ্ন $(-)$ দ্বারা সংযোজিত থাকে।

বহুপদীয় ফাংশনের সাধারণ আকার: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$,

যেখনে, $a_0 \neq 0, n$ অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $x \in \mathbb{R}$।

এক চলকের বহুপদী: একটি বহুপদী রাশিতে একটি মাত্র চলক বিদ্যমান থাকলে, তাকে এক চলকের বহুপদী বলা হয়।

যেমন: $f(x) = 2x^2+3x+4$

দুই চলকের বহুপদী: একটি বহুপদী রাশিতে দুইটি চলক বিদ্যমান থাকলে, তাকে দুই চলকের বহুপদী বলা হয়।
যেমন: $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2$

তিন চলকের বহুপদী: একটি বহুপদী রাশিতে তিনটি চলক বিদ্যমান থাকলে, তাকে তিন চলকের বহুপদী বলা হয়।
যেমন: $f(x,y,z) = (3x + 4y + 5z)^2$
এভাবে বহুপদী রাশিতে যে কয়টি চলক বিদ্যমান থাকে রাশিটিকে তত চলকের বহুপদী বলা হয়। এই অধ্যায়ে আমরা যেসব বহুপদী নিয়ে আলোচনা করব সবই এক চলকবিশিষ্ট।

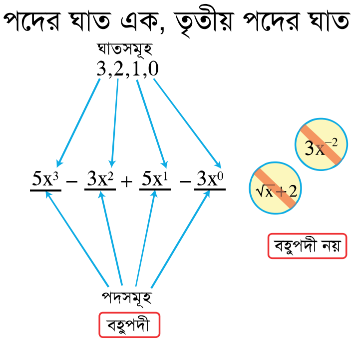
এক চলকের বহুপদী:
মনে করি, x একটি চলক। তাহলে $a, ax + b,\ ax^2 + bx + c,\ ax^3 + bx^2 + cx + d$ ইত্যাদি x চলকের বহুপদী।
মূলত x-চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারের হয়, যেখানে C একটি x- বর্জিত নির্দিষ্ট সংখ্যা (যা শূন্যও হতে পারে) এবং p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কোনো বহুপদীর সাধারণ পদ Cx^p হলে, C হচ্ছে x^p এর সহগ এবং p হচ্ছে ঐ পদের ঘাত।
মাত্রা: বহুপদী রাশিতে বিদ্যমান পদগুলির চলকের সর্বোচ্চ ঘাতকে ঐ রাশির মাত্রা বলা হয়। যেমন: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 4$, x চলকের একটি বহুপদী, যার মাত্রা 3।
মুখ্যপদ: বহুপদীতে গরিষ্ঠ ঘাতযুক্ত পদকে মুখ্যপদ বলা হয়। উপরের উদাহরণে মুখ্যপদ $2x^3$।
মুখ্যসহগ: মুখ্যপদের সহগকে মুখ্য সহগ বলা হয়। উপরের উদাহরণে মুখ্যসহগ 2।
ধ্রুবপদ: বহুপদীর চলক বর্জিত (x বর্জিত) পদটিকে ধ্রুবপদ বলা হয়। ধ্রুবকপদ চলকের ঘাত শূন্য। উপরের উদাহরণে ধ্রুবপদ -4।
$3x - 6x^2 + 2x^4 - 1$ একটি x চলকের বহুপদী। এর মাত্রা 4, মুখ্যপদ $2x^4$, মুখ্যসহগ 2 এবং ধ্রুবপদ -1।
আবার আরেকটি উদাহরণ দেখা যাক, $5x^2 + 2x - 0x^7 + 5$ যা একটি x চলকের বহুপদী। এর মাত্রা 2, মুখ্যপদ $5x^2$ মুখ্যসহগ 5 এবং ধ্রুবপদ 5।

সতর্কতা!
তোমরা অনেকেই $3x - 6x^2 + 2x^4 - 1$ এর প্রথম পদ অর্থাৎ $3x$ কে মুখ্যপদ ভাবতে পারো। ভাবলে ভুল হবে। এখানে, চলক x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 4। তাই মুখ্যপদ হচ্ছে x^4 সংবলিত পদ, অর্থাৎ $2x^4$। আবার, $5x^2 + 2x - 0x^7 + 5$ বহুপদীতে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 7 হওয়া সত্ত্বেও $0x^7$ কে মুখ্যপদ বলা যাবে না কারণ মুখ্যসহগ কখনও শূন্য হতে পারে না।

আলোচনার শুরুতে আমরা একটি খেলা খেলতে গিয়ে একটি বহুপদী $100x^2 + 10x + 5$ পেয়েছিলাম। যেখানে $100x^2 + 10x + 5$ হলো একটি এক চলকের বহুপদী যার মাত্রা 2, মুখ্যপদ $100x^2$, মুখ্যসহগ 100 এবং ধ্রুবপদ 5।

সমমাত্রিক বহুপদী: কোনো বহুপদীর সকল পদের ঘাত সমান হলে ঐ বহুপদীকে সমমাত্রিক বহুপদী বলে।
যেমন- $ax^2 + 2hxy + by^2$ একটি x ও y চলকের দুই ঘাতবিশিষ্ট সমমাত্রিক বহুপদী।
অসমমাত্রিক বহুপদী: কোনো বহুপদীর সকল পদের ঘাত সমান না হলে, ঐ বহুপদীকে অসমমাত্রিক বহুপদী বলে। যেমন, $ax^2 + bx + c$ একটি x-চলকের দুই ঘাতবিশিষ্ট অসমমাত্রিক বহুপদী। কেননা, বহুপদীতে ১ম পদের ঘাত দুই, ২য় পদের ঘাত এক, তৃতীয় পদের ঘাত শূন্য। অর্থাৎ, সকল পদের ঘাত সমান নয়।

বহুপদী হওয়ার শর্তাবলি:
(i) প্রতিটি পদে চলকের ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে।
(ii) পদসংখ্যা হবে সসীম।
যেমন: $x^2 - x - 12$ রাশিটি বহুপদী। কারণ, এখানে চলক x এর প্রতিটি পদে ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং পদসংখ্যা 3 টি তথা সসীম।



Examples:

(a) $f(x) = x^2 + 5x + 7$

$\Rightarrow$ একটি বহুপদী ফাংশন, কেননা, প্রতিটি পদে চলক x এর ঘাত অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(b) $f(x) = x^2 + \frac{5}{x} + 6x - 4$

$\Rightarrow$ বহুপদী ফাংশন নয়, কেননা, $\frac{5}{x}$ পদে চলক x এর ঘাত -1, যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(c) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4\sqrt{x} + 5$

$\Rightarrow$ বহুপদী ফাংশন নয়, কেননা $4\sqrt{x}$ পদে চলক x এর ঘাত $\frac{1}{2}$, যা অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়।

(d) $f(x) = 10$

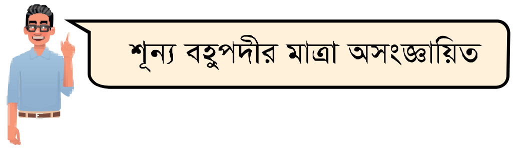
$\Rightarrow$ একটি বহুপদী ফাংশন। একে বলা হয় ধ্রুবক বহুপদী (Constant Polynomial)। ধ্রুবক বহুপদীর মাত্রা 0 [কারণ, $10 = 10x^0$]।

(e) $f(x) = 0$

$\Rightarrow$ এটিও একটি বহুপদী ফাংশন। একে বলা হয় শূন্য বহুপদী। শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত।

শূন্য বহুপদী

$f(x) = 0$, একটি শূন্য বহুপদী। তোমাদের যদি প্রশ্ন করা হয় যে শূন্য বহুপদীর মাত্রা কত? তোমাদের অনেকের মনে হতে পারে, ধ্রুবক বহুপদীর মত এর মাত্রাও 0 হবে। তা কিন্তু নয় !



কিন্তু, 0 একটি বিশেষ বহুপদী। $f(x) = 0$ ফাংশনটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়:

$f(x) = 0 = 0 \times x^0 = 0 \times x^1 = 0 \times x^2 = \ldots\ldots = 0 \times x^n$

অর্থাৎ, $f(x)$ এর ক্ষেত্রে, x-চলকের ঘাত 1 হতে পারে, 100 হতে পারে আবার 10000 হতে পারে তথা যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। অর্থাৎ, শূন্য বহুপদীটির মাত্রা নির্দিষ্ট করা যাচ্ছে না। কিন্তু বহুপদীর মাত্রা নির্দিষ্ট হয়ে থাকে। তাই শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত।

উদাহরণ-০১: নিচের ফাংশন রাশিগুলো বহুপদী কি-না যাচাই কর।

(i) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ **(ii)** $x^{-2} + x^{-3}$

(iii) $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ **(iv)** $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots\ldots(x-2023)$

(v) $x^2 + 2x + 3\frac{p}{q}$ **(vi)** $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(vii) $\sin x$

সমাধান:

(i) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3} = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{2}}$ এখানে x এর ঘাতগুলো ভগ্নাংশ এবং অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়। তাই $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ রাশিটি বহুপদী নয়।

(ii) $x^{-2} + x^{-3}$ এ x এর ঘাতগুলো ঋণাত্মক। তাই রাশিটি বহুপদী নয়।

(iii) $x^3 + 2x^2 - 3x + x^{-1}$ রাশিতে অন্যসব পদ বহুপদীর শর্ত পূরণ করলেও x^{-1} পদ বহুপদীর শর্ত পূরণ করে না। কারণ এতে x এর ঘাত একটি ঋণাত্মক সংখ্যা। তাই পুরো রাশিটি বহুপদী নয়।

(iv) $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots\ldots(x-2023)$

এই ফাংশনের প্রত্যেক উৎপাদকই একেকটি বহুপদী এবং উৎপাদক সংখ্যা সসীম। সুতরাং উৎপাদকগুলোকে গুণ করলে ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ ঘাতবিশিষ্ট কোনো পদ পাওয়া যাবে না। তাই এটিও বহুপদী রাশি হবে।

(v) $x^2 + 2x + 3\frac{p}{q}$ এখানে x কে চলক বিবেচনা করলে রাশিটি বহুপদী হয়।

চিন্তা করো

কিন্তু p ও q কে চলক বিবেচনা করলে রাশিটি কি বহুপদী থাকবে?

vi) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$

এখানে পদসংখ্যা অসীম এবং ঘাত নির্ণয় সম্ভব নয়। আবার ফাংশনটির পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ 0 (শূন্য) হবে না। এ ধরনের কোনো রাশিকে বহুপদী বলা যায় না।

vii) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots$ এখানে পদসংখ্যা অসীম। তাই বহুপদী হবে না। একে ত্রিকোণমিতিক রাশি বলে।

জেনে রাখো

যেসকল ফাংশনকে Taylor এবং Maclaurin সিরিজের মাধ্যমে অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ঘাতবিশিষ্ট অসীম সংখ্যক পদের সমষ্টি বা ধারা হিসেবে প্রকাশ করা যায়, এদেরকে বহুপদী বলা যাবে না। তোমরা একে এভাবেও চিন্তা করতে পারো যে, ঐ ফাংশন বা ধারাকে যতবারই অন্তরীকরণ করো না কেন কখনো 0 পাওয়া যাবে না বা বাস্তবে 0 পাওয়া সম্ভব নয়।

অন্তরীকরণের সাহায্যে বহুপদীর শর্ত

পূর্বের নিয়মগুলো ছাড়াও একটি রাশি বহুপদী কিনা তা অন্তরীকরণের সাহায্যে খুব সহজে নির্ণয় করা যায়। এক চলকবিশিষ্ট কোনো বহুপদী রাশিকে যদি ঐ চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করতে থাকি, তবে একসময় অন্তরজের মান শূন্য হয়ে যাবে।

আর যদি রাশিটি বহুপদী না হয়, তবে যতবারই অন্তরীকরণ করতে থাকি না কেন, অন্তরজ কখনো শূন্য হবে না।

চলো উদাহরণের সাহায্যে বুঝার চেষ্টা করি। ধরি, $y = 2x^2 + 5x + 7$

এখন, y কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে পাওয়া যায়, $y_1 = \frac{dy}{dx} = 4x + 5$; $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 4$; $y_3 = \frac{d^3y}{dx^3} = 0$

y কে x এর সাপেক্ষে ক্রমিক অন্তরীকরণের বেলায় দেখা যাচ্ছে 3 বার অন্তরীকরণের পর অন্তরজ, $y_3 = 0$ হয়ে যায়। তাই $2x^2 + 5x + 7$ একটি বহুপদী।

আবার ধরো, $y = 4x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ একটি রাশি। এক্ষেত্রে, $y_1 = \frac{dy}{dx} = 16x^3 + 6x + 2$

$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 48x^2 + 6$

$y^3 = \frac{d^3y}{dx^3} = 96x$; $y_4 = \frac{d^4y}{dx^4} = 96$; $y_5 = \frac{d^5y}{dx^5} = 0$

অর্থাৎ, $4x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ একটি বহুপদী।

কিন্তু, $2x^{-3} + x^2 + 5$ রাশির ক্ষেত্রে, ধরি $y = 2x^{-3} + x^2 + 5$ ধরলে,

$y_1 = -6x^{-4} + 2x$; $y_2 = 24x^{-5} + 2$; $y_3 = -120x^{-6}$; $y_4 = 720\,x^{-7}$; $y_5 = -5040x^{-8} \ldots\ldots\ldots$

দেখা যাচ্ছে, $y = 2x^{-3} + x^2 + 5$ কে যতই অন্তরীকরণ করা হোক না কেন, এর অন্তরজ কখনোই শূন্য হবে না। তাই এটি বহুপদী নয়।

একইভাবে, $y = \sqrt{x} + 5$ এর ক্ষেত্রেও $y_1 = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$; $y_2 = -\frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{2}}$; $y_3 = \frac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} \ldots\ldots\ldots$

যতই অন্তরীকরণ করা হোক না কেন, অন্তরজ শূন্য হয় না। তাই $\sqrt{x} + 5$ বহুপদী নয়।

জেনে রাখো

একটি বহুপদীর মুখ্যপদ ax^n (হলে, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা), বহুপদী টিকে $(n + 1)$ তম বার অন্তরীকরণ করলে অন্তরজ শূন্য হয়; অর্থাৎ $y_{n+1} = 0$ হয় এবং এই শর্ত না মানলে রাশিটি বহুপদী হবে না।