প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্র

ষষ্ঠ অধ্যায় : কনিক

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
তপু, সাইফুল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ
অক্টোবর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
২৯৫/-
(দুইশত পঁচানব্বই টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ-মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে ‘বোর্ড বই’-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোনো বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। এ কারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ-মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেওয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় ‘সতর্কতার’ মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে ‘টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান’। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে ‘গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম’ ও ‘গাণিতিক সমস্যাবলি’ যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ-মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে, HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

ষষ্ঠ অধ্যায় : কনিক

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

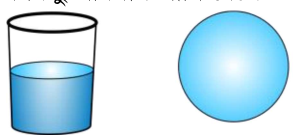
উদাহরণ: "HSC Parallel Text" H.Math 2nd Paper, Chapter-06, Bangla Version, Page-21, Question-05, দেওয়া আছে, 0 কিন্তু হবে π

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৬
কনিক

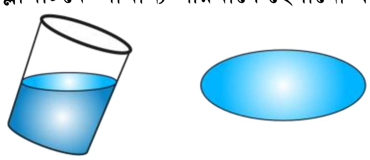
তোমরা কি কখনো একটি গ্লাসে কিছু পরিমাণ পানি রেখে উপর থেকে পানির পৃষ্ঠদেশ লক্ষ করেছো? বৃত্তের মতো হয় না পৃষ্ঠদেশটা?



[উপর থেকে দেখা পানির পৃষ্ঠদেশ]

(i)

এবার চলো এক কাজ করি। গ্লাসটিকে সামান্য পরিমাণে হেলানো যাক। এ অবস্থায় পানির পৃষ্ঠদেশ লক্ষ করো তো:



[উপর থেকে দেখা পানির পৃষ্ঠদেশ]

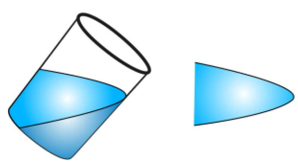
(ii)

কেমন যেনো চ্যাপ্টা বৃত্তের মতো তাই না? মনে হচ্ছে যেন কেউ বৃত্তটাকে চেপে চ্যাপ্টা বানিয়ে দিয়েছে। আচ্ছা আমরা তো চিত্র (i) এর বৃত্তের সমীকরণ সহজেই বের করতে পারি এবং বৃত্তের প্রমিত সমীকরণও জানি।

কিন্তু (ii) এর চ্যাপ্টা বৃত্তের সমীকরণ কী হবে? ও হ্যাঁ ভালো কথা, সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন এর নামই বা কী দেওয়া যায়?

(নাম চ্যাপ্টা বৃত্ত দেওয়া যেতে পারে তবে ভালো একটা নাম দেওয়াটাই বরং ভালো)

এখন, আমরা গ্লাসে খুবই অল্প পরিমাণ পানি রেখে গ্লাসটিকে পূর্বের তুলনায় আরো যদি বেশি বাঁকাই তাহলে নিচের চিত্রের ন্যায় দেখতে পাব।



[উপর থেকে দেখা পানির পৃষ্ঠদেশ]

(iii)

(ii) এর পৃষ্ঠদেশের আকার চ্যাপ্টা বৃত্তের ন্যায় তবে (iii) এর পৃষ্ঠদেশের আকার বৃত্ত বা চ্যাপ্টা বৃত্ত কারো মতই নয়। তাহলে (iii) এর পৃষ্ঠদেশের আকার কি আরেকটি নতুন বক্ররেখা?

(ii) এর চ্যাপ্টা বৃত্ত বা (iii) এর বক্ররেখা তো আমাদের কাছে সম্পূর্ণ নতুন বলে মনে হচ্ছে। এ বিষয়গুলো অর্থাৎ, (ii), (iii) এর নতুন বক্ররেখাগুলো সম্পর্কে যদি আমরা আরো গভীর, সূক্ষ্ম ও পরিষ্কারভাবে জানতে চাই এবং বাস্তব জীবনে ব্যবহার করতে চাই তাহলে আমরা গণিতের কনিক নামক শাখায় প্রবেশ করতে পারি

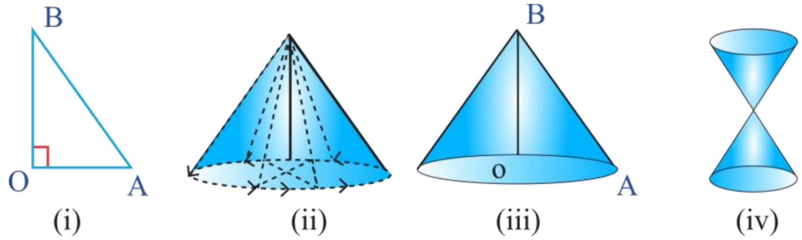
সংক্ষিপ্ত ইতিহাস

আমরা যেসকল বক্ররেখার উদাহরণ দেখলাম এরূপ এবং আরো বিভিন্ন ধরে রেখা সম্পর্কে গণিতবিদগণ খুবই প্রাচীনকাল থেকে গবেষণা শুরু করেন। সর্বপ্রথম গণিতবিদ Manaecmic (380-320 BC) এসব বক্ররেখাকে বিভিন্ন নামে (যেমন: পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত প্রভৃতি নামে) নামকরণ করেন। জ্যামিতির জনক ইউক্লিড (300-250 BC) এবং আর্কিমিডিস (287-212 BC) পরবর্তীতে কনিক শাস্ত্র আরো সমৃদ্ধ করেন এবং শাস্ত্রের যাবতীয় বিষয়ে অসামান্য অবদান রাখেন। এছাড়া জ্যোতির্বিদ অ্যাপোলোনিয়াস (3-97 BC) সর্বপ্রথম সিরিজ আকারে আটটি গ্রন্থে কনিক সম্পর্কিত তার গুরুত্বপূর্ণ দর্শন, তথ্যাবলি, উপাত্ত প্রকাশ করেন। আধুনিক সময়ে সপ্তদশ শতাব্দীতে এসব তথ্য উপাত্তকে জোহানস কেপলার ও রেনে দেকার্তে বৈজ্ঞানিক রূপে প্রতিষ্ঠিত করেন যার প্রাথমিক ধারণা বর্তমানে আমরা উচ্চ মাধ্যমিকে কনিক অধ্যায়ে অধ্যয়ন করি।

কোণকচ্ছেদ

বিভিন্ন প্রকার কনিক কীভাবে পাওয়া যায়, তার জন্য আমাদের সর্বপ্রথম জানতে হবে কোণক কী? কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যেকোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে এর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনব তৈরি হয় তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক অক্ষরেখা এবং অতিভুজের মধ্যবর্তী ধ্রুব কোণকে বলা হয় কোণকটির অর্ধ শীর্ষকোণ। আবার, সমবৃত্তভূমিক দুইটি কোণক শীর্ষ বিন্দুতে যুক্ত হয়ে গঠন করে দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণক।

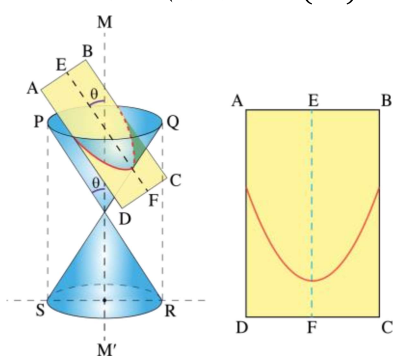
চলো চিত্রের সাহায্যে বিষয়গুলোকে বোঝার চেষ্টা করি।



(i) চিত্রে, OB হলো অক্ষরেখা, AB অতিভুজ। OB কে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে চিত্র (ii) এর ন্যায় ঘুরালে আমরা চিত্র (iii) এর ন্যায় সমবৃত্তভূমিক কোণক পাই। সমবৃত্তভূমিক কোণকের AB কে হেলানো তল বলে এবং B বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে। দুইটি সমবৃত্তভূমিক কোণক শীর্ষ বিন্দুতে মিলিত হয়ে চিত্র (iv) এর ন্যায় দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণক গঠন করে

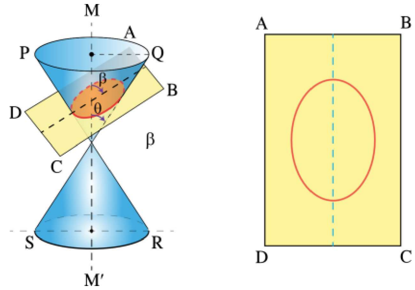
আবার, কোনো নির্দিষ্ট সমতল দ্বারা সমবৃত্তভূমিক কোণককে ছেদ করলে বিভিন্ন ছেদাংশকে কনিক বলে। এখন চলো দেখা যাক কোণক থেকে আমরা কীভাবে বিভিন্ন প্রকার কনিক তৈরি করতে পারি।

➲ **পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে:** দ্বিসমবৃত্তভূমিক কোণকের হেলানো তলের সমান্তরাল কোনো সমতল কোণকটিকে ছেদ করলে আমরা যে সঞ্চারপথ পাই, তাই ই হলো পরাবৃত্ত। [এখানে, অক্ষ MM' এর সাথে হেলানো তলের (RP) এর মধ্যবর্তী কোণ θ]



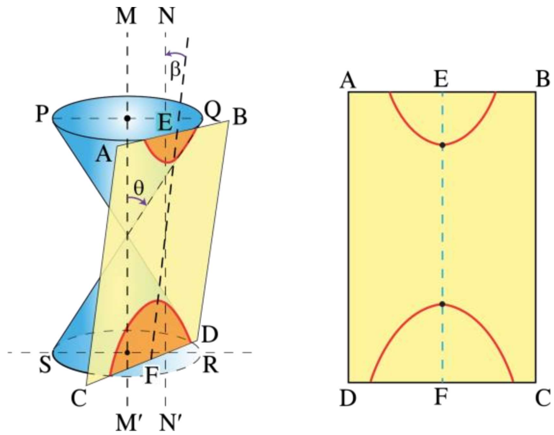
চিত্র: পরাবৃত্ত

➲ **উপবৃত্তের ক্ষেত্রে:** দ্বিসমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির এবং হেলানো তলের মধ্যবর্তী কোণ অপেক্ষা ছোট কোনো কোণে অপর একটি সমতল যদি কোণকটিকে সম্পূর্ণরূপে ছেদ করে, তবে যে সঞ্চারপথ পাওয়া যায় তাই উপবৃত্ত বা চিত্রে নির্দেশিত β যদি $90° > \beta > \theta$ হয় তবে উপবৃত্ত পাবো।



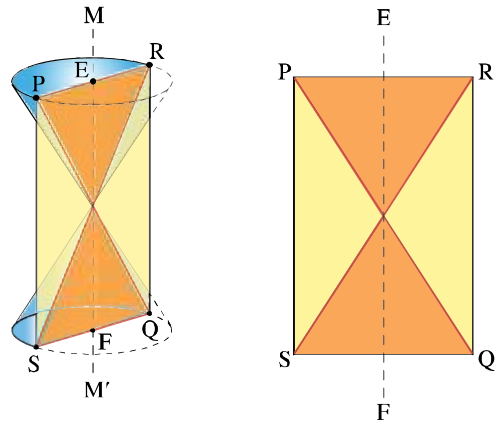
চিত্র: উপবৃত্ত

➲ **অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে:** শীর্ষবিন্দুগামী নয় এমন কোনো সমতল যদি কোনো দ্বিসমবৃত্তভূমিক কোণককে ভূমি এবং হেলানো তলের মধ্যবর্তী কোণ অপেক্ষা বড় কোনো কোণে ছেদ করে, তাহলে তা উভয় কোণককে ছেদ করবে এবং সেক্ষেত্রে আমরা অধিবৃত্ত পাবো বা চিত্রের β, যদি $\theta > \beta \geq 0$ হয় তাহলে অধিবৃত্ত পাবো



চিত্র: অধিবৃত্ত

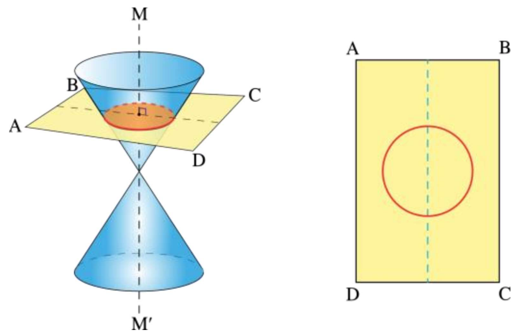
➲ **জোড়া সরলরেখার ক্ষেত্রে:** কোনো সমতল যদি দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণকের শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায় এবং কোণকটির ভূমির উপর লম্ব হয় তাহলে আমরা একজোড়া সরলরেখা পাবো।



চিত্র: জোড়া সরলরেখা

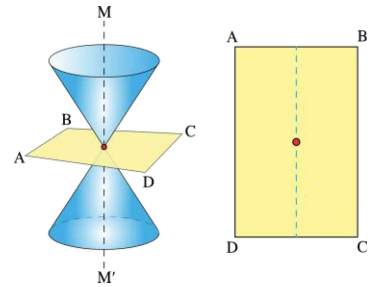
আমরা কোণক থেকে যে কেবল পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত এবং এক জোড়া সরলরেখাই পাবো। এমন কিন্তু নয়। আমরা কোণক থেকে বৃত্ত, সরলরেখা, এমনকি বিন্দুও পেতে পারি। **যেমন:**

➲ **বৃত্তের ক্ষেত্রে:** দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির সমান্তরাল তবে শীর্ষবিন্দুগামী- নয় এরূপ কোনো সমতল যদি কোণকটিকে সম্পূর্ণরূপে ছেদ করে তাহলে যে সমতল পাওয়া যায় তাই বৃত্ত।



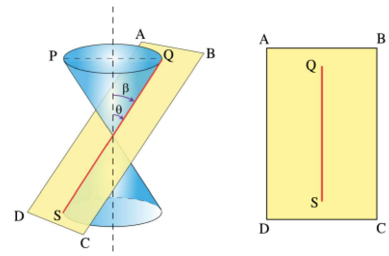
চিত্র: বৃত্ত

➲ **বিন্দুর ক্ষেত্রে:** কোনো সমতল দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির সমান্তরাল ও শীর্ষবিন্দুগামী হলে আমরা বিন্দু/বিন্দুবৃত্ত পাই।



চিত্র: বিন্দু

➲ **সরলরেখা:** কোনো সমতল দ্বি-সমবৃত্তভূমিক কোণকের হেলানো তল বরাবর গমন করলে আমরা একটি সরলরেখা পাবে

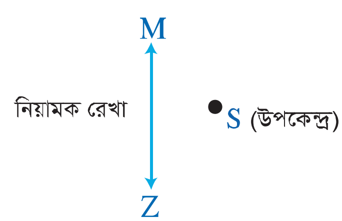


চিত্র: সরলরেখা

যেহেতু কোনো নির্দিষ্ট সমতল দ্বারা কোণকের ছেদনের ফলে কনিক উৎপন্ন হয় সেই হিসেবে উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত, বিন্দু, জোড়া সরলরেখা, একটি সরলরেখা, বৃত্ত সকলেই কনিক

কনিকের পরিচিতি ও ধর্মসমূহ

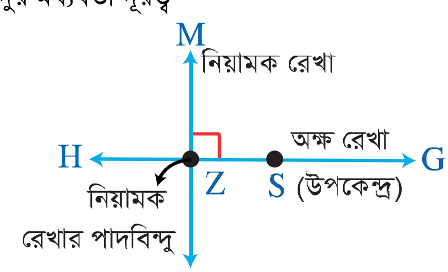
আমরা আগের পরিচ্ছেদ অর্থাৎ, কোণকচ্ছেদ বা Conic Section পড়লাম যার মূল কথাই ছিল যে, আমরা কোণক থেকে বিভিন্ন ধরনের কোণক পেতে পারি এবার বিষয়গুলো আমরা জ্যামিতিক, গাণিতিকভাবে দেখব ও বোঝার চেষ্টা করবে



চিত্র: (i)

সবার প্রথমে আমরা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু S এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা MZ বিবেচনা করি ঠিক চিত্র (i) এর ন্যা S বিন্দুটিকে চলো আমরা 'উপকেন্দ্র' নাম দিই এবং MZ সরলরেখাটিকে আমরা নাম দিই 'নিয়ামক রেখা' বা 'দিকাক্ষ রেখা'।

এবার চিত্র (ii) এ গিয়ে দেখা গেল, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা HG, উপকেন্দ্র, S দিয়ে গমন করলো এবং MZ নিয়ামক রেখাকে Z বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করলে এবার, আমরা HG রেখার নাম দি 'অক্ষরেখা' এবং Z বিন্দুর নাম দিবো 'নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু'। তাহলে ZS হলো উপকেন্দ্র এবং নিয়ামক রেখা পাদবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

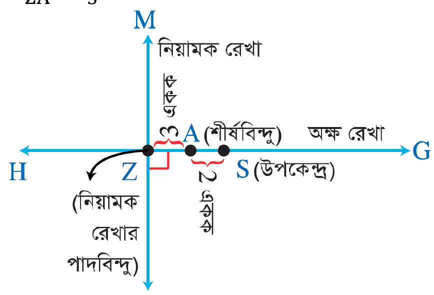


চিত্র: (ii)

এবার, আমরা চিত্র (iii) এ ZS এর মধ্যবর্তী এমন একটি বিন্দু A নিই যেন, SA = 2 একক ZA = 3 একক, হয় A বিন্দুটিকে আমরা বলবো 'শীর্ষবিন্দু'।

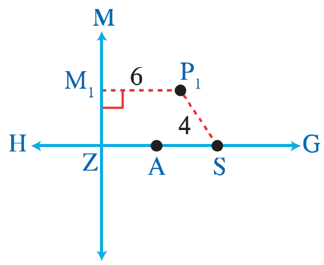
এখন তোমাকে যদি বলি আচ্ছা, SA ও ZA এর দূরত্বের অনুপাত বা $\frac{SA}{ZA}$ = কত হবে?

যেহেতু SA = 2 একক এবং ZA = 3 একক $\therefore \frac{SA}{ZA} = \frac{2}{3}$ হবে।

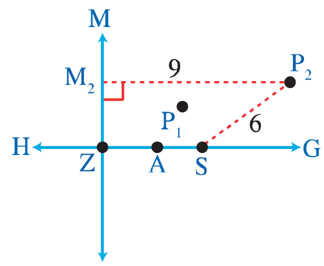


চিত্র: (iii)

আবার, একটি P_1 বিন্দু নেই যার ক্ষেত্রে $SP_1 = 4$ একক এবং P_1 থেকে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব $P_1M_1 = 6$। এখন, $\frac{SP_1}{P_1M_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



চিত্র: (iv)



চিত্র: (v)

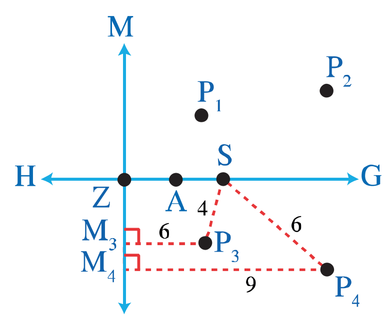
এবার, অনুরূপভাবে, চিত্র (iv) এর ন্যায় আরো একটি বিন্দু P_2 নিবো যেন, $SP_2 = 6$ একক এবং P_2 থেকে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব $P_2M_2 = 9$ একক হয়। আবারো তোমাকে যদি বলি, $\frac{SP_2}{P_2M_2}$ =কত হবে?

এবারো, $\frac{SP_2}{P_2M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; অর্থাৎ, আগের অনুপাতগুলোর ন্যায়।

আমরা তো AG রেখার উপরের পার্শ্বে P_1, P_2 বিন্দু নিয়ে কাজ করলাম। স্বভাবতই প্রশ্ন জাগতে পারে যে, AG রেখার নিচের পার্শ্বে যদি বিন্দু নেই তাহলে কি কোনো সমস্যা হবে? অবশ্যই না। আমরা AG রেখার নিচের পার্শ্বেও বিন্দু নিতে পার পাশের চিত্রটি লক্ষ করো:

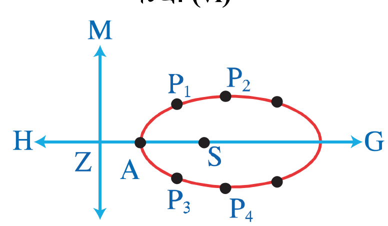
চিত্র (vi) এ আমরা P_1এর অনুরূপ P_3 বিন্দু নিলাম যেন $SP_3 = 4$ একক, $P_3M_3 = 6$ একক হয়। তাহলে বলে ফেলো তো, $\frac{SP_3}{P_3M_3}$ = কত হবে? অবশ্যই $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ হবে।

একইভাবে, আমরা P_2 এর অনুরূপে P_4 বিন্দু নিলাম যেন, $SP_4 = 6$ একক, $P_4M_4 = 9$ একক হয়। তাহলে, অবশ্যই $\frac{SP_4}{P_4M_4} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ই হবে।



চিত্র: (vi)

এভাবে P_1, P_2, P_3, P_4 এর ন্যায় যদি আরো বিন্দু নেওয়া হয় যেন বিন্দুগুলো থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব ও নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত সর্বদা একই মান হয় (এক্ষেত্রে $\frac{2}{3}$) এবং পরবর্তীতে বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে যোগ করা হয় তাহলে, আমরা চিত্র (vii) এর মত চিত্র পাবো। আমরা কিন্তু এই চিত্রটি Conic Sections অংশে দেখে এসেছিলাম চিত্রটির নাম হলো উপবৃত্ত; যা কিন্তু আসলে কনিকও।



চিত্র: (vii)

তাহলে কনিক আমরা কাকে বলবো? উপরোক্ত আলোচনা থেকে বলতে পারি।

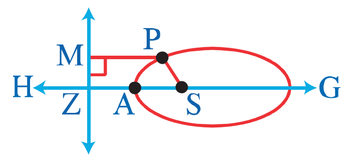
কনিক: কোনো চলমান বিন্দু যদি এমনভাবে চলতে থাকে যেন ঐ বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত সর্বদা ধ্রুব একটি সংখ্যা হয়, তাহলে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে আমরা কনিক বলি।

আমরা যে এতক্ষণ অনুপাতের কথা বললাম, যার মান প্রতিক্ষেত্রে হলো $\frac{2}{3}$; এই অনুপাতকে বলা হয় উৎকেন্দ্রিকতা, যাকে প্রকাশ করা হয় e দ্বারা

$$\therefore \text{উৎকেন্দ্রিকতা, } e = \frac{\text{কনিকের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব}}{\text{ঐ বিন্দু থেকে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব}}$$

অর্থাৎ, আমাদের উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু P হলে,

P থেকে উপকেন্দ্র S এর দূরত্ব SP ও P থেকে নিয়ামক রেখা MZ এর লম্ব দূরত্ব PM এর অনুপাত সর্বদা একটি ধ্রুব সংখ্যা হবে এবং এই অনুপাতকে বলা হবে উৎকেন্দ্রিকতা e $\therefore$ সংক্ষেপে বলা যায়, $e = \frac{SP}{PM} \therefore SP = e.PM$



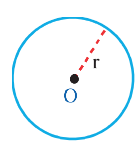
যা শুধুমাত্র উপবৃত্তই নয় বরং সকল প্রকার কনিকের জন্য সত্য।

এখন, অবশ্যই আমাদের মনে প্রশ্ন জাগতে পারে যে, আচ্ছা আমরা কি কেবল e বা উৎকেন্দ্রিকতার মান $\frac{2}{3}$ হলেই উপবৃত্ত পাবো? আসলে, উৎকেন্দ্রিকতার মানের নির্দিষ্ট সীমা বা Range এর জন্য আমরা নির্দিষ্ট কনিক পাবো। এখন, e উৎকেন্দ্রিকতার কোনো সীমার জন্য আমরা কী ধরনের কনিক পাবো তা ছক আকারে দেওয়া হলো:

e এর মান	কনিক
$e \to 0$	বৃত্ত
$0 < e < 1$	উপবৃত্ত
$e = 1$	পরাবৃত্ত
$1 < e < \infty$	অধিবৃত্ত
$e \to \infty$	এক জোড়া সরলরেখা

যেহেতু, আমাদের আঁকা কনিকের জন্য উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$ ছিল; $\left(0 < \frac{2}{3} < 1\right)$ সেহেতু আমরা উপবৃত্ত পেয়েছিলাম। এ অধ্যায়ে আমরা কাজ করবো মূলত উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত ও অধিবৃত্ত নিয়ে প্রথমে আমরা আলোচনা করবো পরাবৃত্ত সম্পর্কে, এরপর আলোচনা করবো উপবৃত্ত সম্পর্কে এবং পরিশেষে আলোচনা করবো অধিবৃত্ত সম্পর্কে। তবে, তোমরা উচ্চতর গণিত ১ম পত্রে বৃত্ত সম্পর্কে বিস্তারিত পড়ে এসেছ বলে এখানে, বৃত্ত সম্পর্কে প্রথমেই একটু আলোচনা করা যাক।

প্রথমে আসা যাক, বৃত্তের সংজ্ঞা সম্পর্কে। একটি স্থির বিন্দু হতে যে সকল বিন্দুর দূরত্ব সমান হয়, তাদের সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। চিত্রে, O হলো স্থির বিন্দু যাকে আমরা বলি ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং r হলো কেন্দ্র থেকে সঞ্চারপথের দূরত্ব যাকে আমরা বলি বৃত্তের ব্যাসার্ধ।



এখানে, বেশ কিছু লক্ষণীয় ব্যাপার আছে। এক এক করে আলোচনা করা যাক।

আমরা জানি, সকল কনিকেরই নিয়ামক রেখা থাকবে। কিন্তু বৃত্ত কনিক হওয়া সত্ত্বেও প্রথম চিত্রে কোনো নিয়ামক রেখা আমরা দেখতে পাচ্ছি না তাহলে আমরা বৃত্তের নিয়ামক রেখাকে কীভাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি? বৃত্তের নিয়ামক রেখা বৃত্ত থেকে এতই দূরে অবস্থিত যে, তা আমাদের কল্পনা বা পর্যবেক্ষণ এরও বাইরে। অর্থাৎ বৃত্তের নিয়ামক রেখা বৃত্ত থেকে অসীম দূরত্বে অবস্থিত; ঠিক পাশের দ্বিতীয় চিত্রের ন্যায়:

আবার বৃত্তের উপকেন্দ্র হলো বৃত্তের কেন্দ্র নিজে অর্থাৎ, এখানে O, S একই বিন্দু।

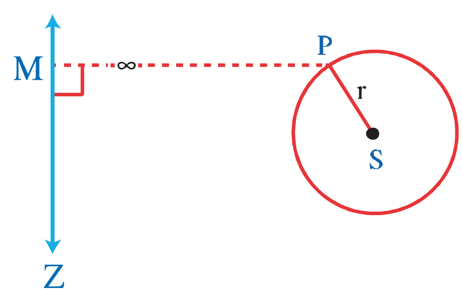
তাহলে, বৃত্তের উপর কোনো বিন্দু P হলে, বৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP(\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ } r)}{PM}$

এখানে, $PM \to \infty$; $\therefore$ বৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e \to 0$

যা আমরা আগে ছকে দেখে এসেছিলাম।

এখন, বিস্তারিতভাবেও ব্যাখ্যা সম্পর্কে অবহিত হলাম

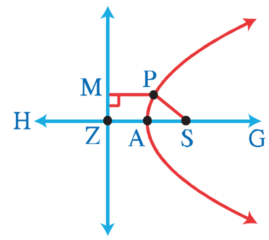
এবার, পরবর্তী অংশে চলো পরাবৃত্ত সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনায় প্রবেশ করা যাক।



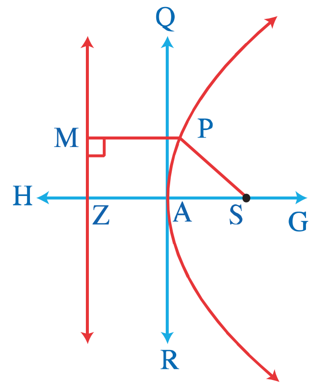
পরাবৃত্ত

আমরা পূর্বের পরিচ্ছেদে দেখে এসেছিলাম যে, পরাবৃত্তের জন্য উৎকেন্দ্রিকতা, $e = 1$

আবার, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{\text{কনিকের উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব}}{\text{ঐ বিন্দু থেকে নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্ব}} \Rightarrow e = \frac{SP}{PM} \Rightarrow 1 = \frac{SP}{PM}$ [$\because$ পরাবৃত্তের জন্য, $e = 1$] $\therefore SP = PM$



সুতরাং কোনো কনিকের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু থেকে যদি এর উপকে দূরত্ব ও নিয়ামক রেখার লম্ব দূরত্বের অনুপাত এর মান (1) হয় তবে সেই কনিককে পরাবৃত্ত বলে। অর্থাৎ, পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে, পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব ঐ বিন্দু থেকে নিয়ামক রেখা লম্ব দূরত্বের সমান এই শর্তানুযায়ী যদি আমরা একটি চিত্র আঁকার চেষ্টা করি তাহলে, আমরা পাশের চিত্রটি পাবো। উক্ত বক্ররেখাটির উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু P হলে, $\frac{SP}{PM} = 1 \therefore SP = PM$ হবে।



এখন, এমন একটি রেখা QR বিবেচনা করা যাক যা HG এর উপর লম্ব এবং A বিন্দুগামী। আমরা QR রেখাটিকে বলবো 'শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক রেখা' কারণ QR রেখা মূলত পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। পাশের চিত্রটি লক্ষ করি:

তোমরা আগেও দেখে এসেছ, তবুও তোমাদের সুবিধার্থে আবার বলছি যে:

উপরিউক্ত চিত্রে, (i) HG হলো পরাবৃত্তের অক্ষরেখা

(ii) MZ হলো পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা

(iii) S বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র

(iv) A বিন্দুটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু

(v) Z বিন্দুটি নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু

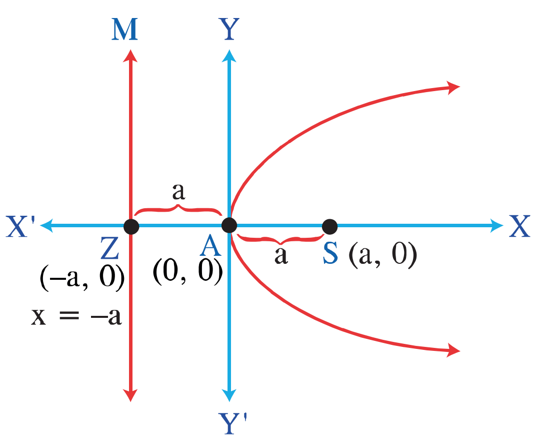
এবং এখন দেখলাম, (vi) QR হলো পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক রেখা ।

পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ

যদি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A, মূলবিন্দু $(0, 0)$ O-তে অবস্থিত এবং অক্ষরেখাটি যদি x-অক্ষ বরাবর অথবা y-অক্ষ বরাবর হয়, তবে ঐ পরাবৃত্তের সমীকরণকে আমরা পরাবৃত্তের প্রমিত/আদর্শ সমীকরণ বলবো।

শীর্ষ মূলবিন্দুতে এবং পরাবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ বরাবর

পাশের চিত্রটি লক্ষ করা যাক:



চিত্রে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A $(0, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং অক্ষরেখা x-অক্ষ বরাবর অবস্থি তাহলে, x-অক্ষ হলো পরাবৃত্তের অক্ষরেখা।

এখানে, উপকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

ধরা যাক, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, A ও উপকেন্দ্র, S এর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AS = a$ । $\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $S(a, 0)$।

আবার, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $A(0, 0)$ বিন্দুর জন্য উৎকেন্দ্রিকতা,

$$e = \frac{AS}{AZ} = 1$$

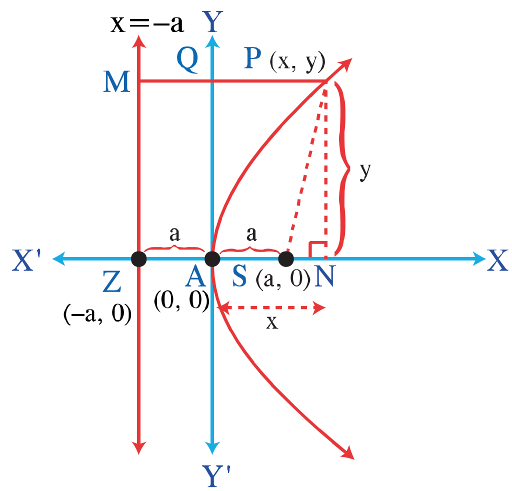
$$\Rightarrow \frac{a}{AZ} = 1$$

$\therefore AZ = a$ একক

$\therefore$ নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু, Z ও শীর্ষবিন্দুর (A) মধ্যবর্তী দূরত্ব $AZ = a$ একক।

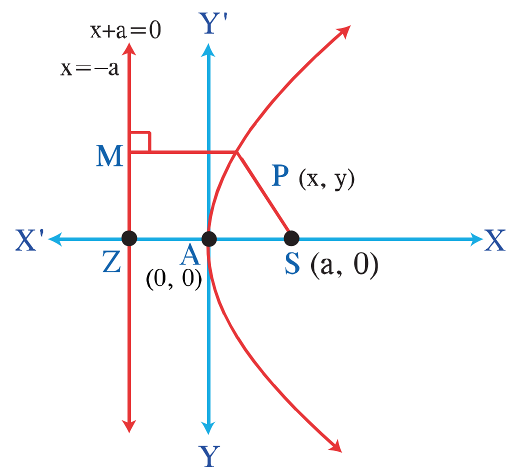
তাহলে, নিয়ামক রেখ   পাদবিন্দু, Z ও উপকেন্দ্রের, (S) মধ্যবর্তী দূরত্ব, $SZ = AZ + AS = a + a = 2a$ একক
এখন, শীর্ষবিন্দু A $(0, 0)$ থেকে নিয়ামক রেখ   পাদবিন্দু, Z, x-অক্ষ বরাবর a একক ঋণাত্মক দিকে অবি   অতএব, সহজেই বোঝা যাচ্ছে যে, নিয়ামক রেখ   পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $Z(-a, 0)$ হবে।

আবার নিয়ামক রেখা MZ, অক্ষরেখা x-অক্ষের উপর লম্ব এবং $(-a, 0)$ বিন্দুগামী। তাহলে, MZ রেখার সমীকরণ হবে: $x = -a \therefore x + a = 0$
চিত্রে, y অক্ষ শীর্ষবিন্দুতে পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে। অর্থাৎ, y-অক্ষ হলো শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক রেখা। ∴ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x = 0$।
এবার, পরাবৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো একটি বিন্দু P (x, y) নেওয়া যাক পাশের চিত্রের ন্যায়।
যদি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হয় তবে AN (যা অক্ষরেখা x-অক্ষরেখা বরাবর) এর দৈর্ঘ্য হবে x একক। আবার PN (যা অক্ষরেখা x-অক্ষের উপর লম্ব) এর দৈর্ঘ্য হবে y একক।
আমরা জানি, শীর্ষবিন্দু A থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব হয় a একক।
তাহলে $SN = AN - AS$ একক $= (x - a)$ একক
আবার, চিত্র থেকে $PM = PQ + QM = AN + ZA = (x + a)$ একক

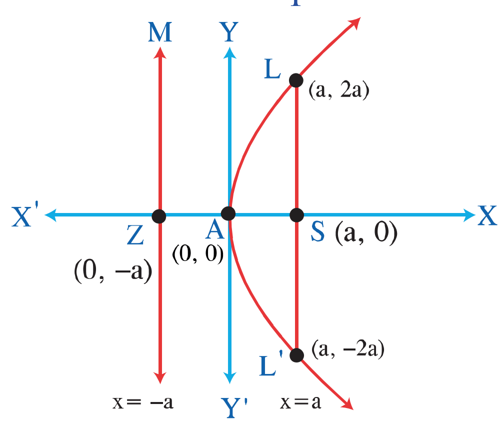


কিন্তু পরাবৃত্তের জন্য, $SP = PM \therefore SP = (x + a)$ একক
এখন, ΔPSN সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $SP^2 = SN^2 + NP^2 = (x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2$
$\Rightarrow y^2 = (x + a)^2 - (x - a)^2 \therefore y^2 = 4ax$; যা পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ।

আমরা আরো এক উপায়ে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ বের করতে পারি:
পরাবৃত্তের উপস্থিত কোন বিন্দু P (x, y) হলে, চিত্র থেকে বলো তো উপকেন্দ্র S $(a, 0)$ থেকে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব, SP = কত হবে?
$SP = \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2}$ একক
আবার, P (x, y) থেকে MZ রেখা: $x + a = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $PM = \frac{|x+a|}{\sqrt{1^2+0^2}}$ একক
$= |x + a|$ একক
আবার, পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{SP}{PM}$
$\Rightarrow 1 = \frac{SP}{PM} \Rightarrow SP = PM \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = |x + a|$
$\Rightarrow (x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \Rightarrow y^2 = (x + a)^2 - (x - a)^2$
$\therefore y^2 = 4ax$; যা পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ।



উপরিউক্ত চিত্রের পরাবৃত্তের সমীকরণ: $y^2 = 4ax$; যা এখন আমরা সবাই জানি। এবার আমরা একটা কাজ করবো। এমন একটি রেখা LL′ বিবেচনা করবো, যা অক্ষরেখার উপর লম্ব হবে এবং রেখাটি উপকেন্দ্র S (a, 0) বিন্দুগামী হবে। এখন, নিশ্চয়ই তাহলে রেখাটির সমীকরণ হবে $x = a$। রেখাটি পরাবৃত্তকে L, L' বিন্দুতে ছেদ করলো। L, L' কে বলা হয় উপকেন্দ্রিক লম্ব।
তাহলে, $y^2 = 4ax$ এ, $x = a$ বসিয়ে পাই, $y^2 = 4a^2 \therefore y = \pm 2a$
∴ L ও L′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 2a)$ ও $(a, -2a)$
আবার, LL′ এর দৈর্ঘ্যকে বলা হয় উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য



$\therefore LL' = \sqrt{(a - a)^2 + (2a + 2a)^2} = |4a|$ একক। যাকে বলা হয় উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ
[দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হয় না বলে এখানে Modulus নেওয়া হয়েছে]

এতক্ষণ আমরা পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করল   এবার, আমরা a এর মান নিয়ে একটু কথা বলবো। লক্ষ করে দেখো তো, আমরা কিন্তু এখনো a এর মান সম্পর্কে কোনো কথা বলিনি। এখন দেখা যাক, a এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হলে পরাবৃত্তের লেখচিত্র কীরূপ হবে:

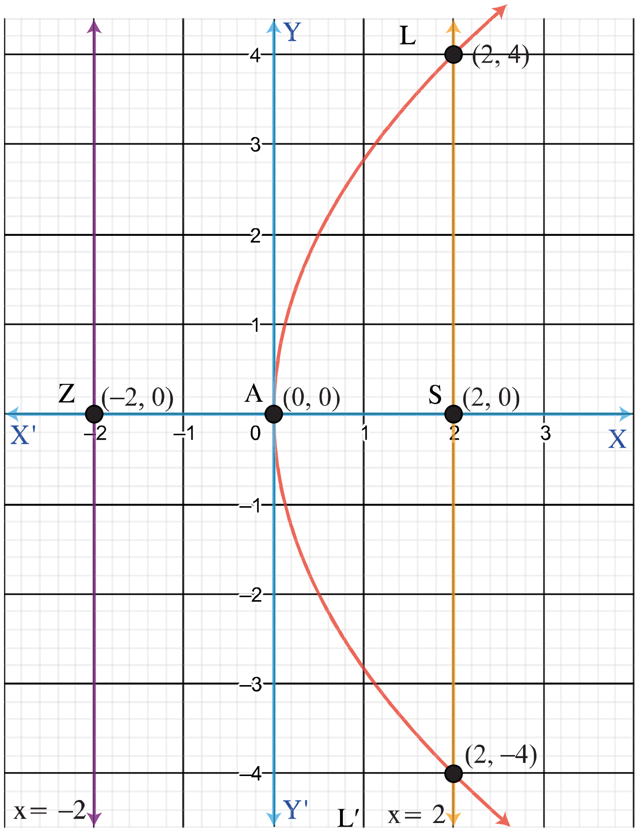
প্রথমে দুইটি পরাবৃত্তের সমীকরণ বিবেচনা করা যাক:

(i) $y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 4(2)x$ পরাবৃত্তটির সমীকরণে, $a = 2$

(ii) $y^2 = -8x \Rightarrow y^2 = 4(-2)x$ পরাবৃত্তটির সমীকরণে, $a = -2$

উদাহরণ-০১: $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, অক্ষরেখা, শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক, নিয়ামক, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও প্রান্তবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান: এখন, $y^2 = 8x = 4\cdot 2\cdot x$ $[a = 2]$ সমীকরণের জন্য আমরা নিচের লেখচিত্র পাবো:



এখানে, (i) নং সমীকরণের জন্য পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S (a, 0) বা (2, 0)

পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A $(0, 0)$

নিয়ামকের পাদবিন্দু $Z(-a, 0)$ বা $(-2, 0)$

অক্ষরেখার সমীকরণ: $y = 0$ [x-অক্ষ]

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $x = 0$ [y-অক্ষ]

নিয়ামকের সমীকরণ: $x = -a$ বা, $x = -2 \therefore x + 2 = 0$

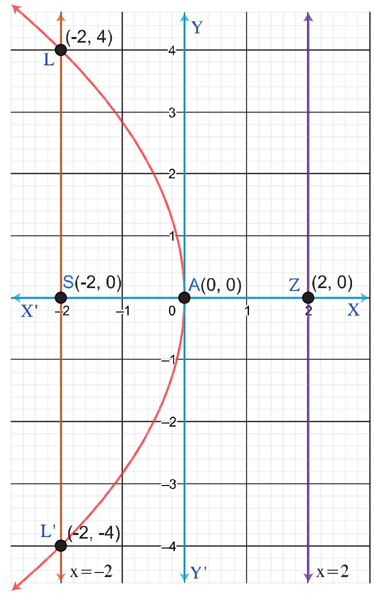
উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $x = a$ বা, $x = 2 \therefore x - 2 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু $(a, \pm 2a)$ বা, $(2, \pm 4)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= |4a| = |4\cdot 2| = 8$ একক

উদাহরণ-০২: $y^2 = -8x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, অক্ষরেখা, শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক, নিয়ামক, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও প্রান্তবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান: $y^2 = -8x = 4(-2)x [a = -2]$ এর জন্য আমরা পাশের লেখচিত্র পাবো:



এখানে $a = -2 < 0$ হওয়ার কারণে পূর্বের বিপরীত দিকে লেখচিত্র হবে।

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S $(a, 0)$ বা, $(-2, 0)$

পরাবৃত্তের শীর্ষ A $(0, 0)$

নিয়ামকের পাদবিন্দু $Z(-a, 0)$ বা, $(2, 0)$

অক্ষরেখার সমীকরণ: $y = 0$ [x-অক্ষ]

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $x = 0$ [y-অক্ষ]

নিয়ামকের সমীকরণ: $x = -a$ বা, $x = 2 \therefore x - 2 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ: $x = a$ বা, $x = -2 \therefore x + 2 = 0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দু $(a, \pm 2a)$ বা, $(-2, \pm 4)$

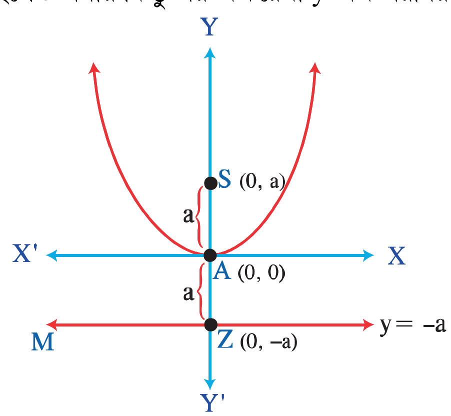
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $|4a| = |4(-2)| = 8$ একক

অর্থাৎ, a এর মান ধনাত্মক হলে পরাবৃত্তটি আমরা এতক্ষণ যেমন দেখে আসলাম ঠিক সেই রকম হবে। অর্থাৎ, $(a > 0)$ পরাবৃত্তটি ডানদিকে যাবে। তবে a এর মান ঋণাত্মক $(a < 0)$ হলে পরাবৃত্তটি বিপরীত দিকে অবস্থান করবে। যদিও বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক, এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব, বিভিন্ন রেখার সমীকরণ এর সূত্রসমূহ একই বিবেচনা করা যাবে।

শীর্ষ মূল বিন্দুতে এবং পরাবৃত্তের অক্ষ y-অক্ষ বরাবর

এবার একটু মনে করে দেখো তো, আমরা কিন্তু পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণের সংজ্ঞায় উল্লেখ করেছিলাম যে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A মূলবিন্দু $O(0, 0)$ -তে হবে তবে অক্ষরেখা x-অক্ষ বা y-অক্ষ যেকোনো রেখা বরাবর হতে পারে। আমরা এতক্ষণ দেখলাম, পরাবৃত্তের অক্ষরেখা x-অক্ষ বরাবর হলে এর বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক, এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব বিভিন্ন রেখার সমীকরণ ও পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ কীরূপ হয়। এবার দেখা যাক যে, অক্ষরেখা যদি y-অক্ষ বরাবর হয়, তবে পরাবৃত্তের বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক, এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব বিভিন্ন রেখার সমীকরণ ও পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ কীরূপ হয়।

নিচের চিত্রে, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A $(0, 0)$ হলেও এবার কিন্তু এর অক্ষরেখা y-অক্ষ বরাবর অব



অর্থাৎ, এর অক্ষরেখা সমীকরণ, $x = 0$।

আবার, উপকেন্দ্র S এখানে, y-অক্ষের উপরিস্থিত। পূর্বের ন্যায় $AS = a$ হলে, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, a)$ হবে।

আবার, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর জন্য উৎকেন্দ্রিকতা বিবেচনা করলে, $e = \frac{AS}{AZ} = 1 \Rightarrow \frac{a}{AZ} = 1 \therefore AZ = a$ একক

সুতরাং, বলা যায়, নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AZ = a$ একক

$\therefore$ নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $SZ = AS + AZ = a + a = 2a$ একক