প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

উচ্চতর গণিত দ্বিতীয় পত্র

সপ্তম অধ্যায় : বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আঃ মালেক ও আরিফ

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ
সেপ্টেম্বর, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৭৫/-
(একশত পঁচাত্তর টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিক জীবনের ধাপ পেরিয়ে উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে পদার্পণ করায় ***উদ্ভাসের*** পক্ষ থেকে তোমাদের সকলকে অভিনন্দন। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে 'বোর্ড বই'-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোন বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। একারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া, মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মূখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় 'সতর্কতা' এর মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে 'টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান'। যার মধ্যে বিগত বোর্ড পরীক্ষার পাশাপাশি রয়েছে বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে 'গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম' ও 'গাণিতিক সমস্যাবলি' যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতের বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

সপ্তম অধ্যায় : বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

প্রশ্নমালা: ৭.১

প্রশ্নমালা: ৭.২

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC Parallel Text" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC Parallel Text" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী

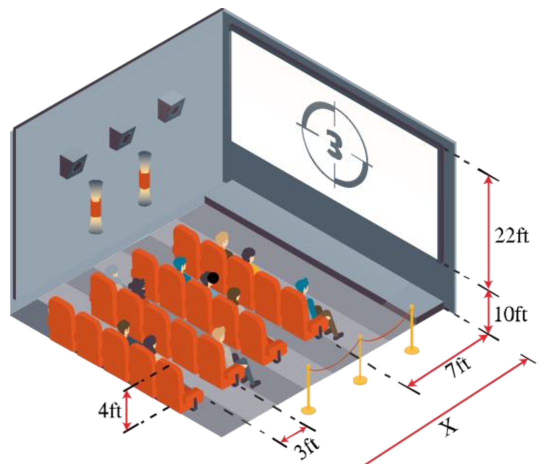
(v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ: "HSC Parallel Text" H.Math 2nd Paper, Bangla Version, Chapter-07, Page-28, Question-10, দেওয়া আছে, 1 কিন্তু হবে 0।

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

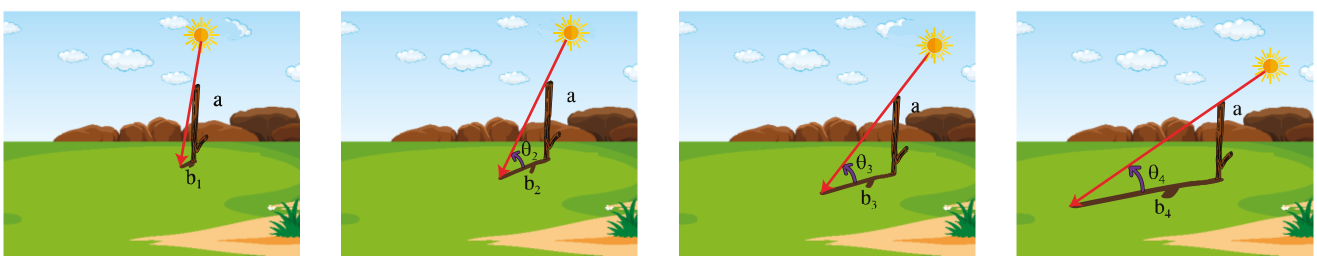
শুভ কামনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০৭ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ



অর্ণব ও অন্তর মুভি পাগল দুই বন্ধু। সারাদিন মুভি নিয়েই তাদের আলোচনা, সমালোচনা হয়। অবসর সময়ে মুভি থিয়েটারে গিয়ে মুভি দেখা তাদের বেশ পছন্দের একটি কাজ। একদিন তারা সিদ্ধান্ত নিল, তাদের এলাকায় গড়ে উঠা নতুন সিনেমা হলে যাবে সিনেমা দেখতে। এখন টিকেট কাটতে হবে; কিন্তু টিকেট কাউন্টারে গিয়ে তারা দ্বিধায় পড়ে গেল আসনের অবস্থান নিয়ে। তাই তারা কর্তৃপক্ষের কাছে হলের ভিতরে প্রবেশ করার জন্য অনুমতি চাইল। অনুমতি পাওয়ার পর ভিতরে গিয়ে তারা দেখল সিটগুলোর বিন্যাস অন্যান্য হলের মত না। একই সমতলে সাজানো, এখন উপায়! তারা সিদ্ধান্ত নিল, এই সমস্যা সমাধানে তাদের আরেক বন্ধু অর্ঘ্যের সাহায্য নিবে। অর্ঘ্য সব শুনে অর্ণব ও অন্তরকে সিনেমা হলের ভিতরের যাবতীয় তথ্য দিতে বলল। অর্ণব ও অন্তর দেখল, সিটের ১ম সারি মুভি স্ক্রিন হতে 7 ft দূরে এবং প্রত্যেকটি সিট পরস্পর 3 ft দূরে দূরে অবস্থিত। স্ক্রিন মেঝে থেকে 10 ft উপরে এবং স্ক্রিনের প্রস্থ প্রায় 22 ft তারা এসকল তথ্য তাদের মেধাবী বন্ধু অর্ঘ্যকে পাঠাল। সে কিছুক্ষণের মধ্যেই অর্ণব ও অন্তরকে ৩য় সারির মাঝের আসন দুটি নিতে বলল। অর্ঘ্যর জায়গায় তুমি থাকলে কি তোমাদের বন্ধু অর্ণব ও অন্তরকে একই পরামর্শ দিতে?

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

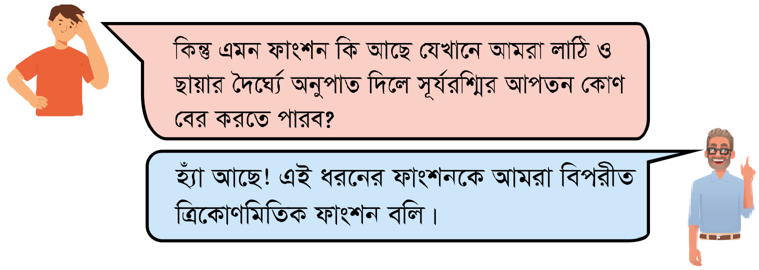


একটি লাঠিকে ভূমির উপর লম্বভাবে দাঁড় করালে দেখবে দিনের বিভিন্ন সময় ছায়ার দৈর্ঘ্য ভিন্ন ভিন্ন হয়। দুপুর ১২ টায় সূর্য যখন ঠিক মাথার উপর থাকে তখন ছায়া পড়ে না। কিন্তু বেলা বাড়ার সাথে সাথে ছায়ার দৈর্ঘ্য বাড়তে থাকে। কারণ বেলা যত বাড়তে থাকে সূর্যরশ্মির আপতন কোণ (θ) তত কমতে থাকে; আপতন কোণ যত কমতে থাকবে ছায়ার দৈর্ঘ্য (b) তত বাড়তে থাকে অথবা বলা যায় লাঠির দৈর্ঘ্য (a) ও ছায়ার দৈর্ঘ্যের (b) অনুপাত কমতে থাকে যেহেতু লাঠির দৈর্ঘ্যের কোনো পরিবর্তন হচ্ছে না। অর্থাৎ আপতন কোণের (θ) সাথে লাঠির দৈর্ঘ্য ও তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাতের $\left(\frac{a}{b}\right)$ সম্পর্ক আছে। একে ত্রিকোণমিতিতে কোণের ট্যানজেন্ট (tangent) অনুপাত বলা হয় এবং $\tan\theta = \frac{a}{b}$ আকারে লিখা হয়। যেমন: আপতন কোণ যখন $45°$ হবে তখন ছায়ার দৈর্ঘ্য লাঠির দৈর্ঘ্যের সমান হয়। কারণ, $\tan 45° = 1$

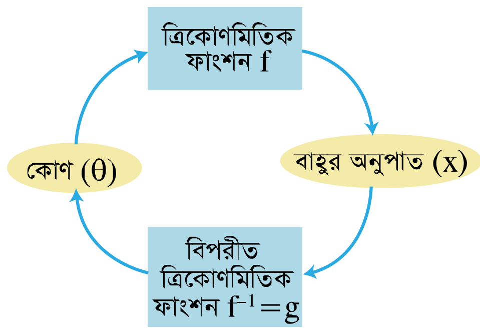
বা, $\frac{a}{b} = 1 \therefore a = b$

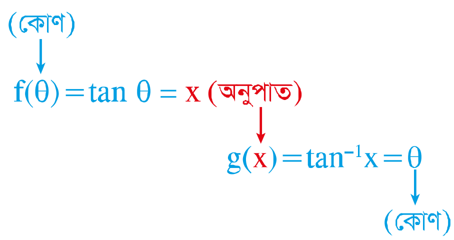
আবার, আপতন কোণ $30°$ হলে, ছায়ার দৈর্ঘ্য লাঠির দৈর্ঘ্যের $\sqrt{3}$ গুণ হয়। [$\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore b = \sqrt{3}\,a$]

অর্থাৎ tangent ফাংশনে আপতন কোণের মান বসালে আমরা লাঠির ও ছায়ার দৈর্ঘ্যের অনুপাত পাব।



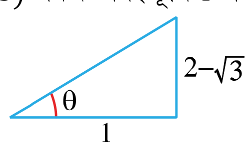
ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে যেমন কোণ ইনপুট করলে দুটি বাহুর অনুপাত পাওয়া যায় তেমনি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে আমরা অনুপাত ইনপুট করলে আউটপুটে কোণ পাব। উপরের আলোচনায় আমরা ত্রিকোণমিতিক ফাংশন হিসেবে $\tan\theta$ নিয়ে আলোচনা করেছি। এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $\tan^{-1}x$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\tan^{-1}x$ কে ট্যান-ইনর্ভাস $x(\tan\text{ inverse } x)$ পড়া হয়।





তাহলে ধারণাটি একদম simple! ধরো, একটা কোণ $45°$ হলে $\tan 45° = 1$। আবার $\tan^{-1}(1) = 45°$। একইভাবে $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$, $\tan 60° = \sqrt{3}$ হলে $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$ হবে।

তাহলে বলতো কোনো সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব $(2-\sqrt{3})$ একক এবং ভূমি 1 একক হলে ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ কত হবে?



একদম সহজ। $\theta = \tan^{-1}\frac{2-\sqrt{3}}{1} = \tan^{-1}(2-\sqrt{3}) = 15°$ (তোমরা ক্যালকুলেটরে বসিয়ে সমাধান করতে পারো)।

সতর্কতা!

$\tan^{-1}x$ ও $(\tan x)^{-1}$ এক নয়। প্রথমটি একটি কোণ এবং দ্বিতীয়টি ভূমি ও লম্বের অনুপাত $\left[(\tan x)^{-1} = \left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}\right)^{-1} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}\right]$ নির্দেশ করে। অর্থাৎ, $\tan^{-1}x$ এর পরিবর্তে $(\tan x)^{-1}$ বা $\frac{1}{\tan x}$ লেখা যাবে না। যেমন, $\tan^{-1}0 = 0$ [যেহেতু $\tan 0 = 0$] কিন্তু $(\tan 0)^{-1} = \frac{1}{\tan 0} = \frac{1}{0} =$ অসংজ্ঞায়িত।

উপরে শুধু $\tan^{-1}$ (tan inverse) নিয়ে আলোচনা করা হলেও মোট ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের (sin, cos, tan, cot, sec, cosec) জন্য একটি করে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন আছে যাদের কাজও একই ধরনের।

যেমন:
- $\sin 30° = \frac{1}{2}$ হলে, $\sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$
- $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$
- $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 60°$
- $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sec^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} = 30°$
- $\text{cosec}^{-1}45° = \sqrt{2}$ হলে, $\text{cosec}^{-1}\sqrt{2} = 45°$ হবে।

নিচে প্রত্যেকটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের নাম ছক আকারে দেওয়া হলো:

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন
$\sin\theta$ (sine of θ)	$\sin^{-1}x$ (sine inverse x)
$\cos\theta$ (cosine of θ)	$\cos^{-1}x$ (cosine inverse x)
$\tan\theta$ (tangent of θ)	$\tan^{-1}x$ (tangent inverse x)
$\cot\theta$ (cotangent of θ)	$\cot^{-1}x$ (cotangent inverse x)
$\sec\theta$ (secant of θ)	$\sec^{-1}x$ (secant inverse x)
$\text{cosec}\,\theta$ (cosecant of θ)	$\text{cosec}^{-1}x$ (cosecant inverse x)

উল্লেখ্য বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনকে arc (আর্ক) ফাংশন নামেও ডাকা হয়। কেন? নিচে আলোচনা করা হলো।

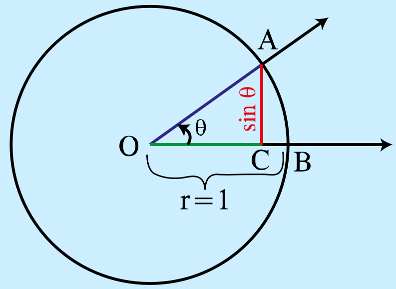
arc ফাংশন

একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে (unit circle) θ কোণের সাথে সম্পর্কিত বৃত্তচাপ (AB) এর দৈর্ঘ্য θ এর সাংখ্যিক মানের সমান। কারণ আমরা জানি, $\theta = \frac{S}{r}$ বা, $\theta = \frac{AB}{1}$

[যেহেতু বৃত্তটি একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বা unit circle]

এবং θ একটি রেডিয়ান কোণ।

$\therefore$ চাপ $AB = \theta$



চিত্র: ১

আবার, $\sin\theta = \frac{AC}{AO}$ বা, $\sin\theta = AC = x$ (ধরি)

সুতরাং, $\sin^{-1}x = \theta = AB$ (বৃত্তচাপ বা arc এর দৈর্ঘ্যের সাংখ্যিক মানের সমান)

অর্থাৎ আমরা যখন, $\sin^{-1}x$ এর মাধ্যমে কোণ নির্ণয় করি; এই কোণের ($\sin^{-1}x$ বা, θ) সাথে বৃত্তচাপের (Arc) দৈর্ঘ্যের গভীর সম্পর্ক রয়েছে। একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে কোণের রেডিয়ান মান বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্যের মানের সমান।

আবার, θ এর একই সাথে $\sin\theta$ রেখা বা AC এবং বৃত্তচাপ (AB) এর সাথে সম্পর্কিত হওয়ায় আমরা বলতে পারি, $\sin\theta$ রেখা বৃত্তচাপের সাথে সম্পর্কিত।

এভাবে বলা যায়, $\sin\theta$ এর সাথে সম্পর্কিত বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= AB = \theta$

বা, arc of sine $= \theta$ বা, arc sine $(x) = \sin^{-1}x$

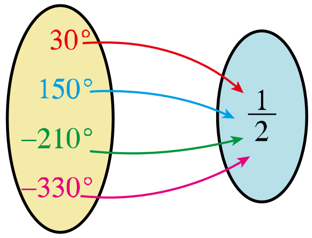
একইভাবে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে একই ফলাফল পাওয়া যায়।

চলো, এবার বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সম্পর্কে বিস্তারিত জানার চেষ্টা করি।

আমরা জানি, $\sin\theta$, θ কোণের সাথে সম্পর্কিত ত্রিকোণমিতিক লম্ব ও অতিভুজের অনুপাত নির্দেশ করে। $\sin\theta$ কোণের যেকোনো বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $f(\theta) = \sin\theta$ এর ক্ষেত্রে আমরা যেকোনো বাস্তব ত্রিকোণমিতিক কোণ বসালে একটি করে আউটপুট পাব। কিন্তু, সেই আউটপুট -1 হতে 1 পর্যন্ত সীমাবদ্ধ।

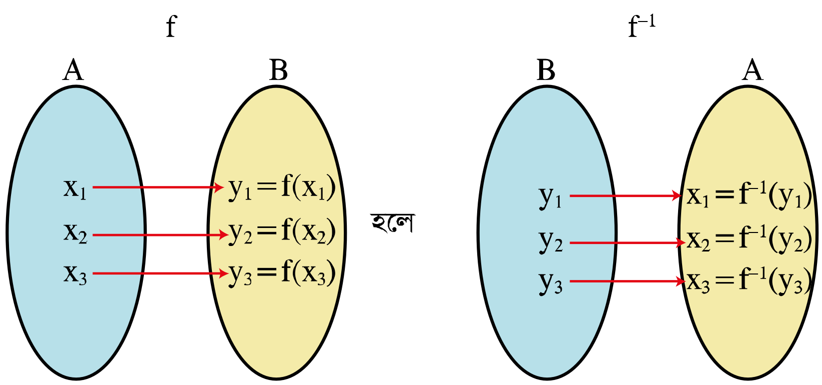
$$\because\ -1 \le \sin\theta \le 1$$

ফলে দেখা যায়, একাধিক কোণের জন্য একই অনুপাত পাওয়া যাচ্ছে। যেমন, $f(\theta) = \sin\theta$ তে $\theta = 30°$ এর জন্য $\frac{1}{2}$ পাওয়া যায়। আবার $\theta = 150°, -210°, -330°$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক কোণের জন্যও একই অনুপাত পাওয়া যায়।



যা বহু-এক (Many − one) ম্যাপিং নির্দেশ করে। এই ধরনের বৈশিষ্ট্য প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রেই দেখা যায়। আসলে সকল ত্রিকোণমিতিক ফাংশন একটি বহু-এক ফাংশন। তাই এর কোন inverse বা বিপরীত ফাংশন নির্ণয় সম্ভব নয়। কারণ আমরা জানি, কোনো ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলেই কেবল তার বিপরীত ফাংশন নির্ণয় সম্ভব। যা নিচে সংক্ষিপ্ত আকারে আলোচনা করা হলো:

বিপরীত ফাংশন (Inverse function): $f : A \longrightarrow B$ দ্বারা সূচিত ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলে f এর বিপরীত ফাংশন f^{-1} কে $f^{-1}: B \longrightarrow A$ দ্বারা সূচিত করা হয়, যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান থাকে।



$f: A \to B$ $\qquad$ $f^{-1}: B \to A$

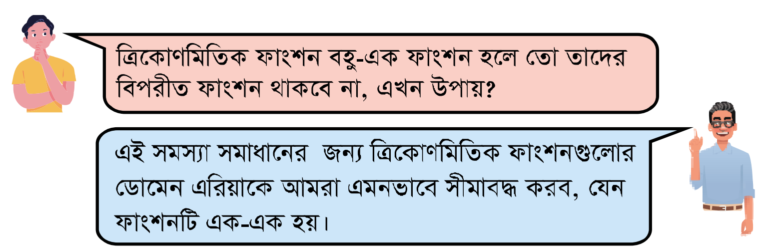
অনুসিদ্ধান্ত

যদি $f: A \longrightarrow B$ দ্বারা সূচিত ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হয় তবে,

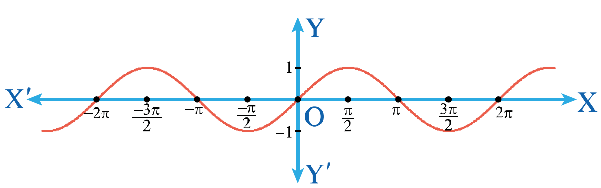
(i) f এর অধীন উপাদান $x \in A$ এর ছবি $y \in B$ হলে, f^{-1} এর অধীনে উপাদান $y \in B$ এর ছবি $x \in A$ হবে।

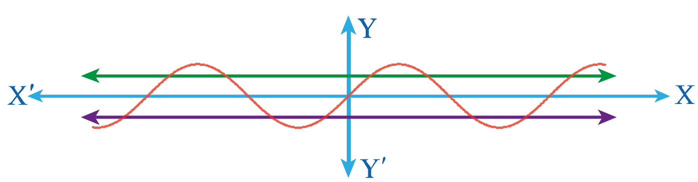
অতএব, $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

(ii) ডোমেন $f =$ রেঞ্জ f^{-1} এবং রেঞ্জ $f =$ ডোমেন f^{-1}

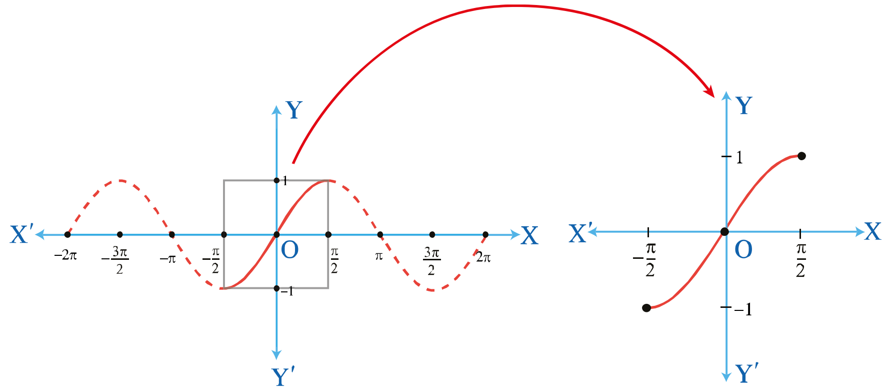


আসো, উদাহরণের মাধ্যমে বুঝার চেষ্টা করি। আমরা সবাই $y = \sin x$ এর গ্রাফের সাথে পরিচিত।

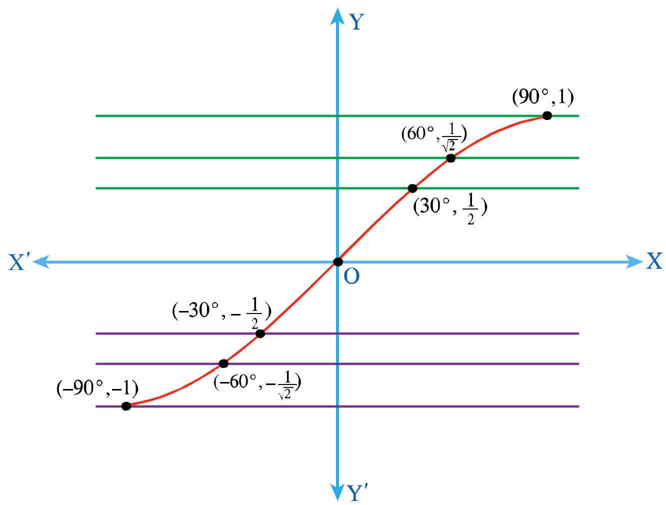


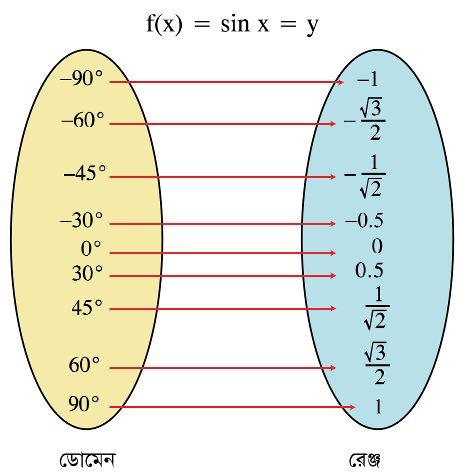


$\sin x$ ফাংশনের ডোমেন $(-\infty, \infty)$ এবং এই ডোমেন দেখে স্পষ্টতই বুঝা যায় $\sin x$ এক-এক ফাংশন নয়। তোমরা চাইলে $y = \sin x$ এর গ্রাফে Horizontal line test করে দেখতে পারো। $y = \sin x$ ফাংশনে x এর একাধিক মানের জন্য y এর একই মান পাওয়া যায়। বিপরীতভাবে বললে y এর একই মানের জন্য x এর বেশ কয়েকটি (অসংখ্য) মান পাওয়া যাবে। যেমন, $y = \sin x$ গ্রাফে $y = 1$ পাওয়া যায় এমন বিন্দু অনেকগুলো আছে যথা: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 1\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right), \left(-\frac{7\pi}{2}, 1\right)$ ইত্যাদি। অর্থাৎ, এখানে $y = \sin x$ ফাংশনে বহু-এক সম্পর্ক আছে। আমরা যদি $y = \sin x$ এর ডোমেনকে সীমাবদ্ধ করি তাহলে এই সমস্যা থেকে সমাধান পাওয়া যাবে।

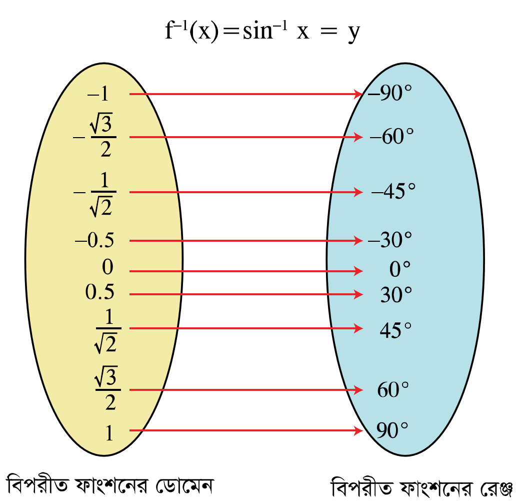


খেয়াল কর, $y = \sin x$ এর ডোমেনকে $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত সীমাবদ্ধ করে ফেললে ফাংশনটি এক-এক হয়ে যাবে। আমরা Horizontal Line Test করার মাধ্যমে সত্যতা যাচাই করতে পারি।

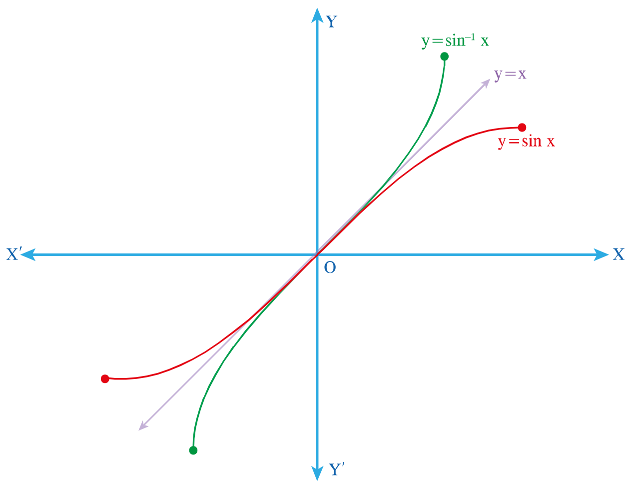


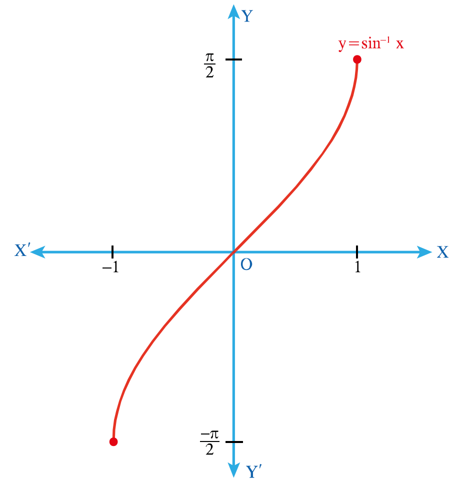


এখন আমরা $\sin x$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $\sin^{-1} x$ বের করতে পারব। আসলে উপরের $y = \sin x$ এর ম্যাপিংকে উল্টো করে দিলেই বিপরীত ফাংশনের ম্যাপিং পাওয়া যায়।



$y = \sin^{-1} x$ এর ম্যাপিং থেকে গ্রাফ আঁকা সম্ভব অথবা সহজে গ্রাফ অঙ্কনের জন্য $y = \sin x$ কে $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিফলিত করে $y = \sin^{-1} x$ এর গ্রাফ আঁকা যায় যা আমরা উচ্চতর গণিত ১ম পত্রের অষ্টম অধ্যায়ে শিখেছি।





$y = \sin^{-1} x$

ডোমেন: $[-1, 1]$; রেঞ্জ: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ডান পাশের $y = \sin^{-1} x$ এর গ্রাফ থেকেই ডোমেন ও রেঞ্জ সরাসরি নির্ণয় করা যাচ্ছে। $y = \sin^{-1} x$ গ্রাফে x এর মান -1 থেকে 1 পর্যন্ত এবং y এর মান $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত বিস্তৃত। সুতরাং ডোমেন $[-1, 1]$ এবং রেঞ্জ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$।

বাকি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনগুলোও একই পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেনের এলাকা সিলেকশন বুঝতে পারলেই সহজে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের গ্রাফ এবং ডোমেন-রেঞ্জ নির্ণয় করা যায়।

চলো এবার $y = \cos x$ এর ক্ষেত্রে ডোমেন-রেঞ্জ কেমন হবে এবং $\cos^{-1} x$ কীভাবে পাওয়া যাবে সেসব নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করি।