প্যারালাল TEXT

(For HSC & Pre-Admission)

পদার্থবিজ্ঞান প্রথম পত্র

দ্বিতীয় অধ্যায়: ভেক্টর

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ফিজিক্স টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
জায়েদ, হৃদয় ও আরফিন

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
প্রথম প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০২৩ ইং
সর্বশেষ সংস্করণ: আগস্ট, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
১৭৫/-
(একশত পঁচাত্তর টাকা মাত্র)

প্রিয় শিক্ষার্থী বন্ধুরা,

তোমরা শিক্ষা জীবনের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপে পদার্পণ করেছো। মাধ্যমিকের পড়াশুনা থেকে উচ্চ মাধ্যমিকের পড়াশুনার ধাঁচ ভিন্ন এবং ব্যাপক। মাধ্যমিক পর্যন্ত যেখানে ‘বোর্ড বই’-ই ছিল সব, সেখানে উচ্চ-মাধ্যমিকে বিষয়ভিত্তিক নির্দিষ্ট কোন বই নেই। কিন্তু বাজারে বোর্ড অনুমোদিত বিভিন্ন লেখকের অনেক বই পাওয়া যায়। একারণেই শিক্ষার্থীরা পাঠ্যবই বাছাইয়ের ক্ষেত্রে দ্বিধায় ভোগে। এছাড়া, মাধ্যমিকের তুলনায় উচ্চ-মাধ্যমিকে সিলেবাস বিশাল হওয়া সত্ত্বেও প্রস্তুতির জন্য খুবই কম সময় পাওয়া যায়। জীবনের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ এই ধাপের শুরুতেই দ্বিধা-দ্বন্দ্ব থেকে মুক্তি দিতে আমাদের এই Parallel Text। উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে শিক্ষার্থীদের হতাশার একটি মুখ্য কারণ থাকে পাঠ্যবইয়ের তাত্ত্বিক আলোচনা বুঝতে না পারা। এজন্য শিক্ষার্থীদের মাঝে বুঝে বুঝে পড়ার প্রতি অনীহা তৈরি হয়। তারই ফলস্বরূপ শিক্ষার্থীরা HSC ও বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তি পরীক্ষায় ভালো ফলাফল করতে ব্যর্থ হয়।

তোমাদের লেখাপড়াকে আরও সহজ ও প্রাণবন্ত করে তোলার বিষয়টি মাথায় রেখে আমাদের Parallel Text বইগুলো সাজানো হয়েছে সহজ-সাবলীল ভাষায়, অসংখ্য বাস্তব উদাহরণ, গল্প, কার্টুন আর চিত্র দিয়ে। প্রতিটি টপিক নিয়ে আলোচনার পরেই রয়েছে গাণিতিক উদাহরণ; যা টপিকের বাস্তব প্রয়োগ এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান সম্পর্কে ধারণা দেয়ার পাশাপাশি পরবর্তী টপিকগুলো বুঝতেও সাহায্য করবে। তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা, বৈশিষ্ট্য, পার্থক্য ইত্যাদি নির্দেশকের মাধ্যমে আলাদা করা হয়েছে। এছাড়াও যেসব বিষয়ে সাধারণত ভুল হয়, সেসব বিষয় ‘সতর্কতা’ এর মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

তবে শুধু বুঝতে পারাটাই কিন্তু যথেষ্ট নয়, তার পাশাপাশি দরকার পর্যাপ্ত অনুশীলন। আর এই বিষয়টি আরও সহজ করতে প্রতিটি অধ্যায়ের কয়েকটি টপিক শেষে যুক্ত করা হয়েছে ‘টপিকভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান’। যার মধ্যে রয়েছে বিগত বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্নের পাশাপাশি বুয়েট, রুয়েট, কুয়েট, চুয়েট, মেডিকেল ও ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়সহ বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান। এভাবে ধাপে ধাপে অনুশীলন করার ফলে তোমরা বোর্ড পরীক্ষার শতভাগ প্রস্তুতির পাশাপাশি ভর্তি পরীক্ষার প্রস্তুতিও নিতে পারবে এখন থেকেই। এছাড়াও অধ্যায় শেষে রয়েছে ‘গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম’ ও ‘গাণিতিক সমস্যাবলি’ যা অনুশীলনের মাধ্যমে তোমাদের প্রস্তুতি পূর্ণাঙ্গ হবে।

আশা করছি, আমাদের এই Parallel Text একই সাথে উচ্চ মাধ্যমিকে তোমাদের বেসিক গঠনে সহায়তা করে HSC পরীক্ষায় A+ নিশ্চিত করবে এবং ভবিষ্যতে বিশ্ববিদ্যালয় ভর্তিযুদ্ধের জন্য প্রস্তুত রাখবে।

তোমাদের সার্বিক সাফল্য ও উজ্জ্বল ভবিষ্যত কামনায়-

উদ্ভাস ফিজিক্স টিম

সূচিপত্র

পদার্থবিজ্ঞান প্রথম পত্র

অধ্যায় ০২: ভেক্টর

ক্র.নং	বিষয়বস্তু	পৃষ্ঠা
০১	রাশি	০১
০২	স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি	০২
০৩	ভেক্টর রাশির প্রকাশ	০২
০৪	বিভিন্ন প্রকার ভেক্টর	০৪
০৫	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	০৭
০৬	ভেক্টরের যোগ: লব্ধি	০৮
০৭	সামান্তরিক সূত্র	১১
০৮	ভেক্টর যোগের কয়েকটি ধর্ম	১৬
০৯	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	১৮
১০	ভেক্টরের উপাংশ	২১
১১	ভেক্টরের উপাংশের কিছু ব্যবহার	২৮
১২	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	৩৫
১৩	ভেক্টর বিয়োগ	৪১
১৪	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	৫০
১৫	কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টরের প্রকাশ	৫১
১৬	উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ	৫৩
১৭	ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টর	৫৪
১৮	ভেক্টরের গুণন	৫৫
১৯	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	৬৭
২০	ক্যালকুলাস	৭৩
২১	স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র	৭৮
২২	গ্রেডিয়েন্ট	৭৯
২৩	ডাইভারজেন্স	৮০
২৪	কার্ল	৮২
২৫	টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান	৮৩
২৬	একত্রে সব গুরুত্বপূর্ণ সূত্র	৮৭
২৭	গুরুত্বপূর্ণ প্র্যাক্টিস প্রবলেম	৮৮
২৮	গাণিতিক সমস্যাবলি	৯৭

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে . . .

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের “HSC Parallel Text” তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে অনেক বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ক্রটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ক্রটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নেব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) “HSC Parallel Text” এর বিষয়ের নাম, (ii) ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (iii) অধ্যায়ের নাম, (iv) পৃষ্ঠা নম্বর, (v) প্রশ্ন নম্বর, (vi) ভুলটা কী, (vii) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়।

উদাহরণঃ “HSC Parallel Text” Physics 1st Paper, Bangla Version, Chapter-02, Page-68, Question-22, দেওয়া আছে, উত্তরঃ (c) কিন্তু হবে (d)।

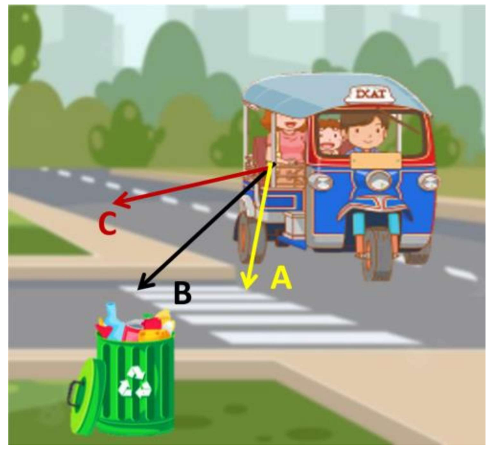
ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়
উদ্ভাস ফিজিক্স টিম

অধ্যায় ০২
ভেক্টর

কোনো একদিন, কলেজ ছুটির পর কোক কিনে তুমি আর তোমার বন্ধু শাফিন অটোরিকশা করে বাসায় আসছো। আসার পথে কোক শেষ হয়ে যাওয়ায় তুমি আশেপাশে ডাস্টবিন খুঁজছো কোকের বোতল ফেলে দেওয়ার জন্য। হঠাৎ তুমি রাস্তার পাশে বেশ কিছুদূরে একটি ডাস্টবিন দেখলে। তো চিত্রের মতো অবস্থায় তুমি যদি খালি বোতলটি ডাস্টবিনে ফেলতে চাও তবে কী করবে?
তোমার কাছে তখন তিনটি অপশন রয়েছে,

(A) ডাস্টবিনের কিছুটা সামনে নিক্ষেপ করবে
(B) তুমি ডাস্টবিন বরাবর নিক্ষেপ করবে।
(C) অথবা ডাস্টবিনের কিছুটা পিছনে নিক্ষেপ করবে



ভেবে দেখো তো কোন উপায়ে বোতলটি সরাসরি ডাস্টবিনে ফেলা সম্ভব । অবশ্যই C উপায়ে এটি করা সম্ভব, চাইলে তুমি কিন্তু নিজেই এটি করে দেখতে পার।
আর এখানে কাজ করেছে পদার্থবিজ্ঞানের চমকপ্রদ একটি জগত- ‘ভেক্টর’।
ভেক্টরের জগতে তোমাকে স্বাগতম!

রাশি

নবম-দশম শ্রেণিতে পদার্থবিজ্ঞান বিষয়ে তোমাদের একটা ধারণা ইতোমধ্যে তৈরি হয়ে গেছে। তোমাকে যদি জিজ্ঞেস করা হয়, “পদার্থবিজ্ঞান বইয়ে আসলে কী নিয়ে আলোচনা করা হয়?” তোমার উত্তর কী হবে? একটু চিন্তা করে দেখো তো!

একদম সাদামাটা ভাষায় বলতে গেলে, ফিজিক্স আসলে আমাদের এই জগৎ কীভাবে চলছে, তা নিয়ে আলোচনা করে। আমাদের চারপাশে বিভিন্ন ঘটনা কেন ঘটছে, কীভাবে ঘটছে, এসব নিয়েই ফিজিক্সের আলোচনা। একটা বই কীভাবে টেবিলের উপর স্থির আছে থেকে শুরু করে পৃথিবী কীভাবে সূর্যের চারপাশে ঘুরছে, সব বিষয় নিয়েই ফিজিক্স আলোচনা, সমালোচনা, ব্যাখ্যা দেওয়ার চেষ্টা করে। আমাদের চারপাশে যা কিছু ঘটছে, সে বিষয়ে আলোচনা করতে হলে প্রথমেই আমাদের যা করতে হবে, চারপাশের ঘটনা ভালোভাবে দেখতে হবে। এরপর সেগুলো নিয়ে একটু বিশ্লেষণ করতে হবে। সেটা করার জন্য আমাদের প্রথমেই যেটা করতে হয়, কিছু জিনিস মাপতে হয়।

আমরা আমাদের হাতের কাছে থাকা একটা কলমের দৈর্ঘ্য মাপতে পারি, রুমের মেঝের ক্ষেত্রফল মাপতে পারি, কোনো বস্তুর ভর-ওজন মাপতে পারি। এই মাপ-জোঁক করার কাজটাকেই ফিজিক্সের ভাষায় বলা হয় পরিমাপ। আর এই জগতে যা কিছু মাপা যায়, তাকে আমরা একটা সুন্দর নাম দেই, তা হলো “রাশি”। আমরা একটা পদার্থের দৈর্ঘ্য, ভর, তাপমাত্রা, সরণ, বেগ এসব পরিমাপ করতে পারি। এগুলোই একেকটা রাশি।

তাহলে, এবার আমরা রাশির সংজ্ঞা আরেকটু সুন্দরভাবে দিতে পারি:

রাশি: পদার্থের যেসব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায়, তাদেরকে রাশি বলে।

স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

ঘড়ি দেখে সময় নির্ণয়, একটি গাড়ি কত জোরে যাচ্ছে তা বের করা, নিজের উচ্চতা নির্ণয়, মেঝেতে চলা কোনো পিঁপড়ার গতিপথ জানা অথবা বিল্ডিংয়ের ছাদ থেকে একটি বল ফেলে দেয়া পদার্থবিজ্ঞানের সকল ক্ষেত্রেই রাশি পরিমাপ করতে হয়। তবে এসব রাশি প্রকাশ করতে গিয়ে একটা ঝামেলা দেখা গেলো। যেমন: কোনো কোনো রাশি মেপে শুধু সংখ্যাটা বলে দিয়ে রাশিটা সম্পূর্ণ প্রকাশ করা যাচ্ছে না। কিছু উদাহরণ দিলে বিষয়টা আরও স্পষ্ট হবে।

তোমাদেরকে যদি জিজ্ঞেস করা হয়, একটা আপেলের ভর কত? আমরা সহজেই সেটা মেপে বলে দিতে পারি, 100 gm বা 150 gm। এখানে আমরা 100 বা 150 সংখ্যাটি দিয়ে সম্পূর্ণ একটা তথ্য দিতে পারছি।

অপরদিকে আমি যদি আমার এক বন্ধুর বাসা খুঁজতে গিয়ে প্রশ্ন করি, "তোমার বাসা কোথায়?" বন্ধু উত্তর দিল, "তোমার বাসা থেকে 10 km দূরে।" এই কথা থেকে আমি একটা তথ্য অবশ্যই পাই। আমি বুঝতে পারি, আমাকে কত দূরে যেতে হবে। কিন্তু, যদি প্রশ্ন করি, "তোমার বাসায় যেতে হলে আমাকে কোথায় যেতে হবে?" তখন কিন্তু শুধুমাত্র এই 10 km কথাটা সম্পূর্ণ তথ্য আমাকে দিতে পারে না। কারণ, 10 km তো আমি যেকোনো দিকেই যেতে পারি।

তাহলে আমার 10 km এই সংখ্যাটির সাথে আরেকটা তথ্য জানতে হবে সেটা হলো, কোনদিকে যাবো। যদি বলা হয়, "10 km দক্ষিণ দিকে" তাহলে কিন্তু এবার আমরা সম্পূর্ণ তথ্য পেয়ে যাচ্ছি, আমাকে আসলে কোথায় যেতে হবে। খেয়াল করে দেখি, ২য় ক্ষেত্রেও কিন্তু আমরা 10 km সংখ্যাটা বললাম ঠিকই, শুধুমাত্র সাথে আরেকটা অতিরিক্ত তথ্য হিসেবে "দিক" বললাম। এভাবে যেসব ক্ষেত্রে শুধুমাত্র একটা মান দিয়ে বা একটা সংখ্যা দিয়ে আমরা আমাদের তথ্যটাকে প্রকাশ করছি, সেসব রাশিকে বলা হয় স্কেলার রাশি। এক্ষেত্রে যেমনঃ 100 gm। আর যেসব রাশি প্রকাশের জন্য মানের সাথে দিকেরও প্রয়োজন হয়, সেসব রাশিকে বলা হয় ভেক্টর রাশি। এক্ষেত্রে যেমনঃ 10 km দক্ষিণ দিকে আশা করি, স্কেলার রাশি আর ভেক্টর রাশি কী, সেটা আমরা এতক্ষণে বুঝে গেছি। যদি বুঝে থাকি, তাহলে আমরা বইয়ের ভাষায় একটু সুন্দর করে সংজ্ঞা ও উদাহরণগুলো শিখে নিতেই পারি, তাই না?

সংজ্ঞা	পদার্থের যেসব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদেরকে রাশি (Quantity) বলে।	
প্রকারভেদ	ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে অথবা দিক বিবেচনা করে ভৌত রাশিকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। যথা: (i) নির্দিক/অদিক/স্কেলার রাশি (ii) সদিক/দিক/ভেক্টর রাশি	
স্কেলার রাশি	সংজ্ঞা	যেসব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে।
	উদাহরণ	দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, তাপমাত্রা , তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্রুতি, কাজ, আয়তন, ঘনত্ব, দূরত্ব, শক্তি, তড়িৎ আধান, বিদ্যুৎ প্রবাহ।
ভেক্টর রাশি	সংজ্ঞা	যেসব ভৌত রাশির মান ও দিক দুটোই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।
	উদাহরণ	সরণ, বেগ, ভরবেগ, বল, ত্বরণ, বলের ভ্রামক, বলের ঘাত, টর্ক, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, ওজন, গ্রেডিয়েন্ট, কার্ল, কেন্দ্রমুখী বল ইত্যাদি।

চিন্তা করো না এগুলো নিয়ে আমরা পুরো বইয়ে বিস্তারিত আলোচনা করবো

ভেক্টর রাশির প্রকাশ

আচ্ছা, এতক্ষণে আমরা নিশ্চয়ই বুঝে গেছি, ভেক্টর রাশি বিশেষ ধরনের রাশি, তাই না? এসব রাশিতে মানের পাশাপাশি দিকও থাকে। তাহলে, এই রাশিকে কিন্তু উচ্চতা বা ভরের মত 5 feet বা 60 kg দিয়ে প্রকাশ করা যাবে না। এসো আমরা একটু দেখার চেষ্টা করি, ভেক্টর রাশিকে তাহলে কীভাবে প্রকাশ করতে হয়?

মনে কর, আমার বন্ধু শাফিন নিচের চিত্রের O বিন্দু থেকে A বিন্দুতে গেল। এখন এই O থেকে A বিন্দু পর্যন্ত OA রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে বলা হয় দূরত্ব; যা একটি স্কেলার রাশি। আর O থেকে A পর্যন্ত অবস্থানের পরিবর্তনকে বলা হয় সরণ; যা একটি ভেক্টর রাশি। এখন, এই অবস্থানের পরিবর্তনকে আমরা নিচের ছবিটার মত **Fig 2.02** করে প্রকাশ করতে পারি।

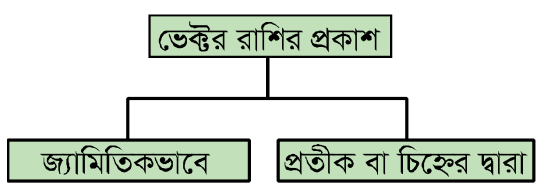


Fig 2.01: শাফিনের আদি অবস্থান O

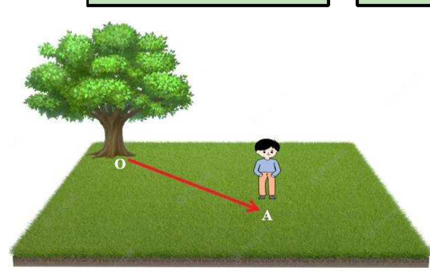


Fig 2.02: শাফিনের সরণ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$

এখানে, O থেকে A পর্যন্ত তীর চিহ্নিত রেখাংশটি শাফিনের সরণ ভেক্টরের জ্যামিতিক প্রকাশ। শাফিন O থেকে A পর্যন্ত গিয়েছে, তাই তীর চিহ্নটা O থেকে A এর দিকে দিয়ে শাফিনের অবস্থান কোনদিকে পরিবর্তিত হয়েছে, সেটি দেখানো হয়েছে। এখানে O থেকে A পর্যন্ত অংশটুকুর দৈর্ঘ্য হচ্ছে ভেক্টরের মান। আর যে তীর চিহ্নের কথা বললাম, সেটি হচ্ছে ভেক্টরের দিক। শাফিন যে O বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করেছিল, সেটিকে বলা হয় আদিবিন্দু, প্রারম্ভিক বিন্দু বা পাদবিন্দু এবং যে বিন্দু A পর্যন্ত গিয়েছিল, সেটিকে বলা হয় শীর্ষবিন্দু বা প্রান্তিক বিন্দু বা প্রান্ত বিন্দু **(Fig 2.03)**।

তাহলে তোমরাই বলো, শাফিন যদি A বিন্দু থেকে O বিন্দু পর্যন্ত যেত, তাহলে সরণটা কেমন হতো?

সরণের মান ঠিকই থাকতো, শুধুমাত্র দিকটা হতো A থেকে O বিন্দুর দিকে।

Fig 2.03

ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে বারবার এঁকে তো আর সব সময় আলাপ-আলোচনা করা সম্ভব না। তাই, অক্ষর দিয়েও ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয়। শাফিনের প্রথম সরণটিকে $\overrightarrow{OA}$ এভাবে প্রকাশ করা হয়। এই লেখাটার মানে, একটি ভেক্টর যেটি গিয়েছে O থেকে A পর্যন্ত। আবার A বিন্দু থেকে O বিন্দু পর্যন্ত গেলে সেই সরণ ভেক্টরকে লেখা হতো $\overrightarrow{AO}$। আবার $\overrightarrow{OA}$ কে দুটো অক্ষর দিয়ে না লিখে একটি অক্ষর দিয়ে (যেমন: $\vec{A}$) লেখা যায়।

A অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চারভাবে প্রকাশ করতে পারি:

$\vec{A}$	$\bar{A}$	$\underline{A}$	**A**

আমরা প্রথম পদ্ধতিটিই সবচেয়ে বেশি ব্যবহার করব।

ভেক্টরের মান প্রকাশ করতে পরমমান চিহ্ন ($|\vec{A}|$) বা শুধুমাত্র অক্ষর **(A)** ব্যবহার করা যায়।

আমরা সরণ ভেক্টরের উদাহরণ এর মাধ্যমে ভেক্টর রাশির প্রকাশ বোঝার চেষ্টা করলাম। অন্যান্য যেকোনো ভেক্টর (যেমন: বল, ত্বরণ, অবস্থান ইত্যাদি) একইভাবে প্রকাশ করা হয়।

সতর্কতা!

এতক্ষণে আমরা নিশ্চয়ই একটা ধারণা পেয়েছি, ভেক্টর রাশি আসলে কী, এটি কেন প্রয়োজন আর এটি কীভাবে প্রকাশ করতে হয়। তবে একটা বিষয়ে আমাদের একটু খেয়াল রাখতে হবে, একটু আগে আমরা যেমন দেখলাম, OA রেখাংশের দৈর্ঘ্যটা দূরত্ব অর্থাৎ স্কেলার রাশি, আবার সেই দূরত্বের সাথে দিকসহ বললে সেটি সরণ বা ভেক্টর রাশি। এখান থেকে আমাদের মনে হতেই পারে যে, কোনো ভেক্টরের মানকেই স্কেলার রাশি বলে আর স্কেলার রাশির সাথে দিক বলে দিলেই হয়ত সেটি ভেক্টর। কিন্তু, আসলে তা সবসময় সত্যি নয়। দূরত্ব আর সরণের উদাহরণ দিয়েই ব্যাপারটা স্পষ্ট বোঝা যাবে।

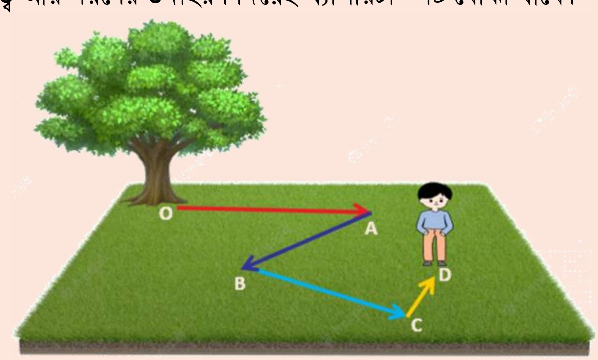


Fig 2.04: শাফিনের গতিপথ

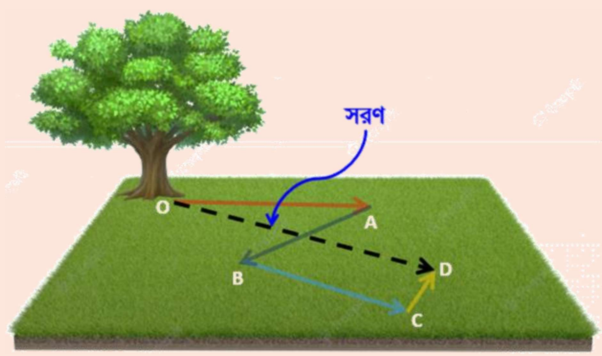


Fig 2.05: শাফিনের সরণ $\overrightarrow{OD}$

ধরা যাক, কেউ যদি উপরের চিত্রের মতো **(Fig 2.04)** এর মত O বিন্দু থেকে D বিন্দুতে আঁকাবাঁকা পথে যায় তাহলে তার সরণ আর দূরত্ব কেমন হবে?

সরণ: পথ যেমনই হোক, সরণ এর মান মানেই আদিবিন্দু থেকে শেষবিন্দু পর্যন্ত দৈর্ঘ্য। আর দিক হবে আদিবিন্দু থেকে শেষবিন্দুর দিকে। অর্থাৎ, সরণের মান হল OD আর দিক হল O থেকে D এর দিকে। **(Fig 2.05)**

দূরত্ব: দূরত্ব = পথের দৈর্ঘ্য = OA + AB + BC + CD বুঝতেই পারছো দূরত্ব OD এর মান আর যাই হোক সরণ OD এর মান এর সমান হবে না। সুতরাং, সর থেকে দিক বাদ দিলে যা থাকে তাই দূরত্ব অথবা ভেক্টর রাশি আর এর মানকেই স্কেলার রাশি বলে-একথা ভাবা যাবে না।

বিভিন্ন প্রকার ভেক্টর

চলো এবার আমরা শাফিনের এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় যাওয়ার ঘটনাটিকে আরেকটু বিস্তারিতভাবে পর্যবেক্ষণ করি। ধরা যাক, শাফিন শুরুতে ছিল A বিন্দুতে, এরপর সে গিয়েছে B বিন্দুতে।

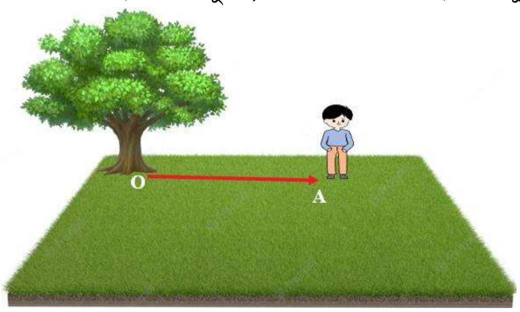


Fig 2.06: শাফিনের অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$

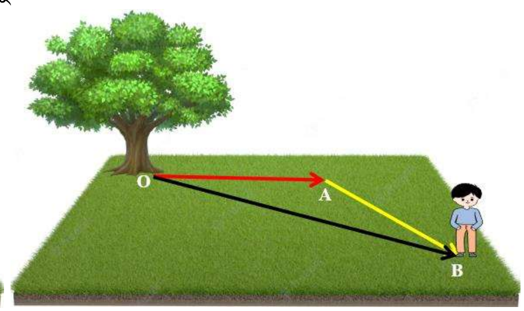


Fig 2.07: শাফিনের অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$

আমরা নিশ্চয়ই জানি, যে কোনো একটা বস্তু কোথায় আছে, তা বোঝানোর জন্য অন্য আরেকটা কিছুর সাহায্য নিয়ে বলতে হয়। যার সাহায্য নিয়ে আমরা অন্য একটা বস্তুর অবস্থান ব্যাখ্যা করতে পারি, তাকে বলা হয় প্রসঙ্গ কাঠামো। শাফিনের ক্ষেত্রে শাফিন কোথায় আছে, সেটা আমরা ওর পাশে থাকা গাছটার সাহায্যে বলতে পারি। গাছের গোড়া থেকে A বিন্দু পর্যন্ত একটা রেখা টেনে সেটাকে আমরা যদি একটা ভেক্টর হিসেবে বিবেচনা করি, সেই ভেক্টরটাকে বলা হয় অবস্থান ভেক্টর। গাছের গোড়ার বিন্দুটা O হলে, $\overrightarrow{OA}$ হচ্ছে শাফিনের শুরুর অবস্থানের অবস্থান ভেক্টর **Fig 2.06**। তাহলে অবস্থান ভেক্টর দিয়ে কী বোঝায়? অবস্থান ভেক্টরের মান দিয়ে বোঝায়, বস্তুটা প্রসঙ্গ কাঠামো বা যেখান থেকে আমরা সব মাপতে চাচ্ছি, সেখান থেকে কত দূরে আছে। আর অবস্থান ভেক্টরের দিক দিয়ে বোঝায়, বস্তুটা ঐ প্রসঙ্গ কাঠামো থেকে কোন দিকে আছে।

তাহলে, শাফিনের B বিন্দুতে যাওয়ার পর শেষ অবস্থানের অবস্থান ভেক্টরটা কী হবে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছি? সেটি হবে $\overrightarrow{OB}$। তাহলে, আমরা শাফিনের আদি অবস্থান আর শেষ অবস্থান দুটোই ভেক্টর পদ্ধতিতে বের করে ফেললাম। তাহলে, শাফিনের সরণ কী হবে? শাফিনের সরণ হবে আদি অবস্থান থেকে শেষ অবস্থানের দিকে একটি ভেক্টর। এই ভেক্টর রাশির মানই হবে সরণের মান এবং সরণের দিক হবে আদি অবস্থান থেকে শেষ অবস্থানের দিকে।

অবস্থান ভেক্টর: প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টরও বলে।

সরণ ভেক্টর: যদি একটি বস্তুকণা A অবস্থান হতে B অবস্থানে স্থানান্তরিত হয় তবে A বিন্দুকে পাদবিন্দু এবং B বিন্দুকে প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত ভেক্টরকে সরণ ভেক্টর বলে। $\overrightarrow{AB}$ একটি সরণ ভেক্টর।

এতক্ষণে আমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছি, কোনো একটা ঘটনা থেকে ভেক্টর রাশি কীভাবে পরিমাপ করতে হয়। একটু আগে সরণ ভেক্টরের একটা বৈশিষ্ট্য আমরা দেখলাম, যে সরণ হচ্ছে একটা বস্তুর শেষ অবস্থান ও আদি অবস্থানের পার্থক্য। বস্তু ঘুরেফিরে যেদিকেই যাক না কেন, শেষ অবস্থান আর আদি অবস্থানের পার্থক্যই হচ্ছে সরণ। তাহলে তোমরা বলো তো, শাফিন যদি O বিন্দু থেকে হাঁটা শুরু করে A বিন্দুতে যায় এবং এরপর আবার O বিন্দুতে ফিরে আসে, তাহলে তার সরণ কত হবে? তার আদি অবস্থান আর শেষ অবস্থান একই জায়গায়, তাহলে তার সরণের মান হবে শূন্য। কিন্তু, সরণ তো ভেক্টর রাশি, ভেক্টরের দিক থাকে। এক্ষেত্রে সরণের দিক কোনদিকে? এই ধরনের বিশেষ ক্ষেত্রে, মান শূন্য হওয়ার কারণে ভেক্টরটির দিক নির্দিষ্টভাবে বলা যায় না। এই বিশেষ ধরনের ভেক্টরকে বলা হয় শূন্য ভেক্টর বা নাল ভেক্টর।

শূন্য ভেক্টর বা নাল ভেক্টর: একটি ভেক্টরের সূচনা বিন্দু ও প্রান্ত বিন্দু যদি মিলে যায় তবে তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।

আগের শূন্য ভেক্টরের উদাহরণে আমরা লিখতে পারি, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{0}$ বা, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$

এই $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{AO}$ ভেক্টর দুটির মান সমান কিন্তু এদের দিক বিপরীত। এই ধরনের ভেক্টরকে আমরা বলে থাকি বিপরীত ভেক্টর।

এখান থেকে আমরা আরও দুটি ব্যাপার মনে রাখব-

(i) কোন ভেক্টর রাশির সামনে মাইনাস চিহ্ন $(-)$ দিলে তার বিপরীত ভেক্টরটি পাওয়া যায়।

(ii) পরস্পর বিপরীত ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল/ লব্ধি একটি শূন্য বা নাল ভেক্টর।

বিপরীত ভেক্টর: বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

এবার আমরা নতুন আরেকটি ঘটনা অনুসন্ধান করব। ধরা যাক, শাফিন O বিন্দু থেকে প্রথমে A বিন্দুতে যায়, অর্থাৎ $\overrightarrow{OA}$ বরাবর A পর্যন্ত যায়। তাহলে সরণ ভেক্টরটির মান $\overrightarrow{OA}$ এর দৈর্ঘ্যের সমান, আর দিক হচ্ছে O থেকে A এর দিকে। শাফিন যদি একই পথে $\overrightarrow{OA}$ বরাবর দ্বিগুণ দূরে গিয়ে M বিন্দুতে থামতো, তাহলে সরণ ভেক্টরটি কেমন হতো? মান হতো OM এর দৈর্ঘ্যের সমান, তবে দিক কিন্তু একই থাকতো। O থেকে M এর দিকে আর O থেকে A এর দিকে যা-ই বলি না কেন, সেটা কিন্তু আসলে একই দিক বোঝায়।

তাহলে এখানে, $OM = 2OA$, আবার $\overrightarrow{OM}$ ও $\overrightarrow{OA}$ এর দিকও একই দিকে। তাহলে বলা যায়, $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA}$

তাহলে কি একটা ব্যাপার আমরা খেয়াল করতে পারছি যে, দিক যদি আমরা একই রাখি, তাহলে শুধুমাত্র মান পরিবর্তন করে আমরা আমাদের ইচ্ছেমতো ভেক্টর তৈরি করতে পারি ঐ দিক বরাবর। $\overrightarrow{OA}$ দিকটা যদি আমরা ঠিক রাখি, তাহলে $\overrightarrow{OA}$ বরাবর একেকবার একেক মান নিয়ে আমরা ঐ দিকে অসংখ্য সরণ ভেক্টর তৈরি করতে পারি। $\overrightarrow{OA}$ এর সাথে 2, 3, 4 গুণ করে আমরা $\overrightarrow{OA}$ বরাবর $\overrightarrow{OA}$ এর দ্বিগুণ, তিনগুণ, চারগুণ মানের একেকটি ভেক্টর তৈরি করে ফেলতে পারছি। কিন্তু, আমরা যে বলছি যেকোনো মানের ভেক্টর তৈরি করা সম্ভব, সেটা আমরা কীভাবে করবো? এখানে তো $\overrightarrow{OA}$ এর গুণিতক মানের ভেক্টর বানানোর উপায়টা বললাম। চিন্তা করে দেখো তো, এমন কোনো একটা ভেক্টর যদি থাকতো যার সাথে আমি 12 গুণ করলে আমি ভেক্টর হিসেবে 12 মানের একটি ভেক্টর পেতাম ঐ দিকে, সেটি কেমন হতো? আমরা যদি এমন একটি ভেক্টর পেতাম যার মান 1, তাহলে তার সাথে আমরা যে সংখ্যাই গুণ করতাম, আমরা সেই মানেরই ভেক্টর পেতাম। এই ধরনের ভেক্টর যাদের মান 1, সেগুলোকেই বলা হয় একক ভেক্টর। আর একক ভেক্টরের কাজ নিশ্চয়ই আমরা এতক্ষণে বুঝে গেছি।

একক ভেক্টর দিয়ে আমরা একটা দিক বরাবর যেকোনো ভেক্টর তৈরি করতে পারি। O থেকে A বরাবর শাফিন যদি 1 মিটার দূরত্ব গিয়ে A বিন্দুতে যায়, তাহলে $\overrightarrow{OA}$ ই হচ্ছে ঐ দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর। একক ভেক্টরের কোন মাত্রা বা একক নেই। এর একমাত্র উদ্দেশ্য - একটি নির্দিষ্ট দিক প্রকাশ করা। একক ভেক্টরকে প্রকাশ করার জন্য আমরা অক্ষরের উপরে তীর চিহ্নের পরিবর্তে টুপি (hat/cap) ব্যবহার করি। যেমন: $\overrightarrow{OA}$ একক ভেক্টরটিকে আমরা লিখব $\hat{a}$।

এখন, $\hat{a}$ এর সাথে যেকোনো সংখ্যা গুণ করে আমরা, সেই মানের ভেক্টর বানাতে পারবো। মনে করি, 5 একক মানের একটি ভেক্টর বানাবো, O থেকে N পর্যন্ত। তাহলে, $\overrightarrow{ON} = 5\hat{a}$। একক ভেক্টরের ব্যবহারটাও নিশ্চয়ই বুঝতে পারছি। $5\hat{a}$ বলতে বোঝাচ্ছে শাফিন $\hat{a}$ এর দিকে 5 একক দূরত্ব অতিক্রম করেছে। অর্থাৎ $\hat{a}$ দিয়ে শুধুমাত্র দিকটাই বোঝানো হচ্ছে। তাহলে আমরা বলতে পারি যে, একক ভেক্টর দিয়ে আসলে কোনো ভেক্টরের দিকটা বোঝানো হয়। এতক্ষণ আমরা বলছিলাম বারবার, যে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করতে মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন, কিন্তু মান আর দিক কীভাবে গাণিতিকভাবে একসাথে লেখা হয়, সেটার সুস্পষ্ট ধারণা আমরা এখান থেকে পাচ্ছি। $\overrightarrow{ON} = 5\hat{a}$ থেকে আমরা বলতে পারি, ভেক্টর = মান × দিক

অথবা, ভেক্টর = মান × ঐদিকে একক ভেক্টর

একক ভেক্টর বিষয়ে আরও বিস্তারিত আলোচনা আমরা পরবর্তীতে করবো।

একক ভেক্টর: যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। অর্থাৎ, যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

X, Y ও Z অক্ষের ধনাত্মক দিক নির্দেশ করতে আমরা তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ ব্যবহার করে থাকি। এই তিনটি বিশেষ ভেক্টরকে আমরা বলি আয়ত একক ভেক্টর।

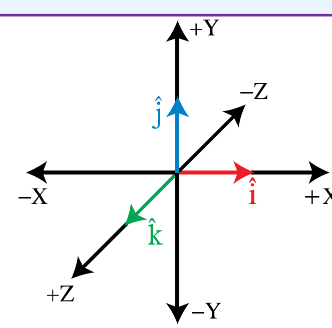
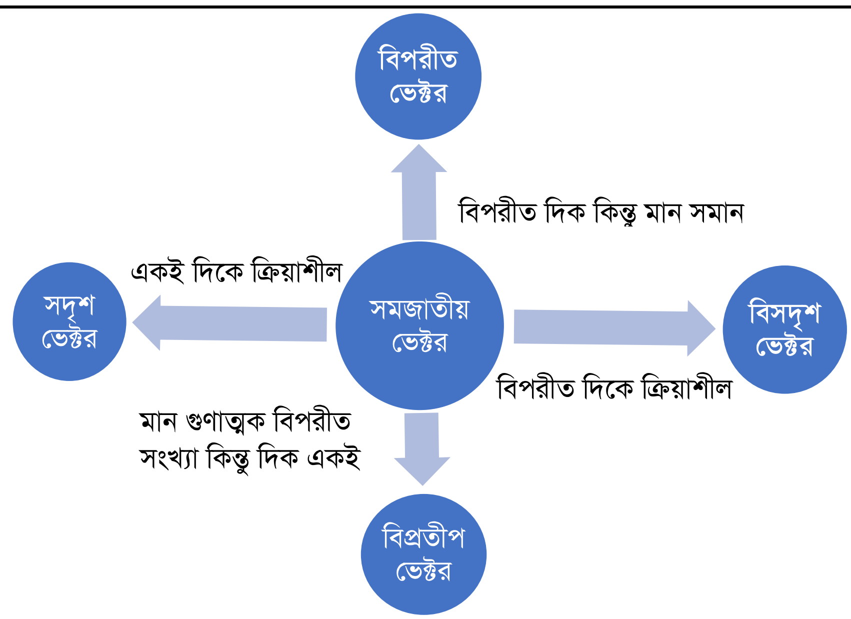


Fig 2.08: আয়ত একক ভেক্টর

এছাড়াও আরও বিভিন্ন ধরনের ভেক্টর হতে পারে, সেগুলো আমরা এক নজরে নিচে দেখে নিতে পারি:

ভেক্টর	বর্ণনা
সদৃশ ভেক্টর	➢ সমজাতীয় দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ বা সমান্তরাল ভেক্টর বলে। পাশের চিত্রে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর সদৃশ ভেক্টর। 
বিসদৃশ ভেক্টর	➢ সমজাতীয় দুটি ভেক্টর যদি বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে। পাশের চিত্রে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর বিসদৃশ ভেক্টর। 
বিপ্রতীপ ভেক্টর বা ব্যতিহার ভেক্টর	➢ সমজাতীয় দুইটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির মানের গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যা বা বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বা ব্যতিহার ভেক্টর বলে। ➢ যেমন: $\vec{A} = 7\hat{i}$ এবং $\vec{B} = \frac{1}{7}\hat{i}$। সুতরাং, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর বিপ্রতীপ ভেক্টর।
স্বাধীন ভেক্টর	➢ কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমতো পছন্দ করা হয়, তবে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।
সঠিক ভেক্টর	➢ যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।
সীমাবদ্ধ ভেক্টর	➢ কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি ইচ্ছেমতো পছন্দ করতে দেওয়া না হয় অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে যদি পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয় তাহলে সেই ভেক্টরকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে। ➢ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ক্রিয়াশীল ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। ➢ অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। এর আদিবিন্দু সবসময় মূলবিন্দুতে থাকে।
মুক্ত ভেক্টর	➢ যে সকল ভেক্টরকে এদের মান ও দিক ঠিক রেখে একস্থান থেকে অন্যস্থানে স্থানান্তর করা যায় তাদেরকে মুক্ত ভেক্টর বলে।
সমান ভেক্টর	➢ দুইটি ভেক্টরের মান সমান এবং দিক একই হলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
সমতলীয় ভেক্টর	➢ দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সমতলে অবস্থান করে তবে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।
সমরেখ ভেক্টর	➢ যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই সরলরেখা বরাবর বা পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে তাহলে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে।



টপিক ভিত্তিক বিগত বছরের প্রশ্ন ও সমাধান

- রাশি
- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি
- ভেক্টর রাশির প্রকার
- বিভিন্ন প্রকার ভেক্টর

বোর্ড MCQ ও সমাধান

01. $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি একটি – [Ctg.B'22]
(i) একক ভেক্টর (ii) সঠিক ভেক্টর
(iii) অবস্থান ভেক্টর
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $|\vec{A}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = s\sqrt{3} \neq 0 \therefore \vec{A}$ একটি সঠিক ভেক্টর। আবার, $|\vec{A}| = \sqrt{3} \neq 1 \therefore \vec{A}$ একক ভেক্টর নয়।

02. সমজাতীয় অসমমানের এবং বিপরীতমুখী ভেক্টরকে কী বলে? [BB'22] [Ans: c]
(a) বিপরীত ভেক্টর (b) বিপ্রতীপ ভেক্টর
(c) বিসদৃশ্ ভেক্টর (d) সদৃশ ভেক্টর

03. একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কী বলে? [JB'22][Ans: b]
(a) অবস্থান ভেক্টর (b) সরণ ভেক্টর
(c) একক ভেক্টর (d) বল ভেক্টর

04. শূন্য ভেক্টরের ক্ষেত্রে- [MB'22][Ans: c]
(i) শূন্য ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই
(ii) শূন্য ভেক্টরের ক্ষেত্রে ত্বরণ থাকে
(iii) শূন্য ভেক্টরের আদিবিন্দু ও শেষবিন্দু একই বিন্দুতে থাকে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

05. কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই হলে সে ভেক্টরকে বলে- [R.B.'21; J.B.'21; M.B.'21; Ctg.B.'16]
(a) সমরেখ ভেক্টর (b) একক ভেক্টর [Ans: c]
(c) নাল ভেক্টর (d) অবস্থান ভেক্টর

06. সমান ভেক্টরের বৈশিষ্ট্য– [Ctg.B.'21] [Ans: d]
(i) সমজাতীয় রাশি (ii) মান সমান
(iii) দিক একই দিকে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. নিচের কোনটির দিক নির্দিষ্ট নয়? [B.B.'21; C.B.'17]
(a) সমান ভেক্টর (b) বিপরীত ভেক্টর [Ans: d]
(c) সমান্তরাল ভেক্টর (d) শূন্য ভেক্টর

08. কোনো ভেক্টর এবং একক ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? [Ctg.B.'19] [Ans: d]
(a) 180° (b) 90° (c) 45° (d) 0°

09. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে এদের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? [B.B.'19] [Ans: a]
(a) 0° (b) 90° (c) 180° (d) 270°

10. $\vec{A} = -2\vec{B}$ হলে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি- [C.B.'17] [Ans: b]
(i) সদৃশ (ii) বিসদৃশ (iii) সমরেখ
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

11. স্কেলার রাশি হচ্ছে– [J.B.'16] [Ans: b]
(i) শক্তি (ii) সরণ (iii) বিভব
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

এডমিশন MCQ ও সমাধান

12. কোনটি স্কেলার রাশি? [KU'19-20] [Ans: d]
(a) সরণ (b) বল (c) ত্বরণ (d) ঘনত্ব

Medical MCQ ও সমাধান

13. কোনটি ভেক্টর রাশির (Vector quantity) উদাহরণ নয়? [DAT: 20-21] [Ans: c]
(a) বেগ (b) ত্বরণ (c) দ্রুতি (d) বল

14. স্কেলার রাশির বেলায় কোনটি সঠিক নয়? [MAT: 13-14]
(a) স্কেলার রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ সাধারণ গাণিতিক নিয়মে করা যায়
(b) মানের পরিবর্তন হলে স্কেলার রাশির পরিবর্তন হয়
(c) দুটি স্কেলার রাশির কোনটির মান শূন্য না হলেও এদের গুণফল শূন্য হতে পারে
(d) দুটি স্কেলার রাশির গুণফল একটি স্কেলার রাশি
সমাধান: (c); দুটি স্কেলার রাশির কোনটির মান শূন্য না হলেও এদের গুণফল শূন্য হতে পারে।

15. নিম্নের কোনটি স্কেলার রাশি? [MAT: 09-10] [Ans: b]
(a) তড়িৎ প্রাবল্য (b) তড়িৎ বিভব
(c) ভরবেগ (d) বেগ

বোর্ড সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

➲ জ্ঞানমূলক প্রশ্ন:

16. সমান ভেক্টর কী? [DB'22]
উত্তর: একই দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে, তাদেরকে সমভেক্টর বা সমান ভেক্টর বলে।

17. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? [SB'22; RB'21; Ctg.B'21,17; SB'21; BB'21, 16; JB'21; Din.B'21; CB'16]
উত্তর: প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয়, তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

18. স্বাধীন ভেক্টর কী? [BB'22; JB'17]

উত্তর: কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমতো পছন্দ করা যায়, তবে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।

19. একক ভেক্টর কাকে বলে? [JB'22; CB'22, 21; CB' 21; RB'17]

উত্তর: যে ভেক্টরের মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

20. সদৃশ ভেক্টর কাকে বলে? [Din.B'22]

উত্তর: সমজাতীয় দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

21. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? [D.B.'21; J.B.'16; Ctg.B.'19; B.B.'19]

উত্তর: ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে

➲ অনুধাবনমূলক প্রশ্ন:

22. নাল ভেক্টরের দিক ব্যাখ্যা কর। [BB'22]

উত্তর: যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বা শূন্য ভেক্টর বলে। একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। নাল ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই বিন্দুতে হয়। তাই নাল ভেক্টরের কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নেই। নাল ভেক্টরকে সাধারণত $\vec{0}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

23. অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। [CB'22, Din.B.'17]

উত্তর: প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে বলে অবস্থান ভেক্টর সীমাবদ্ধ ভেক্টরের পাদবিন্দু নির্দিষ্ট থাকে। ফলে পাদবিন্দুর অবস্থান পরিবর্তন করা যায় না। অবস্থান ভেক্টরের ক্ষেত্রেও পাদবিন্দু প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দুতে নির্দিষ্ট থাকে। তাই অবস্থান ভেক্টর – একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর

নিজে করো

০১। তিনটি ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর মধ্যে $\vec{A}$ উত্তরদিকে ক্রিয়া করছে আবার $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ কাজ করছে দক্ষিণদিকে। $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর মান সমান না হলেও, $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ এর মান সমান। ভেক্টরগুলোর মধ্যে কোন জোড়া সদৃশ, বিসদৃশ, ও বিপরীত ভেক্টর তা চিহ্নিত করে লিখ।
[Ans. $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ পরস্পর সদৃশ ভেক্টর ; $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর বিসদৃশ ভেক্টর ; $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ পরস্পর বিসদৃশ ভেক্টর এবং $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ পরস্পর বিপরীত ভেক্টর।]

০২। সরণ ভেক্টরের মান কি সবসময় দূরত্বের সমান হবে? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। **[Ans. না]**

০৩। $\vec{M}$ এর মান 5 একক হলে $\vec{M}$ এর বিপ্রতীপ ভেক্টরের মান কত হবে? **[Ans. $\frac{1}{5}$ একক]**

ভেক্টরের যোগ: লব্ধি

এতক্ষণ আমরা একটি ভেক্টর নিয়ে আলোচনা করলাম, এবার চলো দেখি একই বস্তুর উপর কয়েকটি ভেক্টর কাজ করলে তার প্রভাব কেমন হয়। ভেক্টর রাশিগুলোও যেহেতু এক প্রকার রাশি, তাহলে এগুলোও একটা আরেকটার সাথে যোগ করে মোট রাশি বের করার কথা। কিন্তু, এখানে সমস্যা বাঁধায় ভেক্টর রাশির দিক। স্কেলার রাশির শুধু মান থাকে, স্কেলার রাশি আমরা সরাসরি যোগ করে দিতে পারি। 1 সে.মি. আর 1 সে.মি. দৈর্ঘ্যের দুটো কলম পরপর রাখলে মোট দৈর্ঘ্য কত? 2 সে.মি. সহজেই বের করা সম্ভব। কিন্তু ভেক্টরের ক্ষেত্রে যেহেতু মানের সাথে দিকও বিবেচনা করতে হয়, তাই এটি সরাসরি যোগ করা সম্ভব না। এটি যোগ করতে আমাদের জ্যামিতির সাহায্য নিতে হয়। এখন তাহলে বলো দেখি, কয়েকটা ভেক্টরের লব্ধি বলতে আসলে কী বোঝায়? লব্ধি বলতে বোঝায়, সবগুলো ভেক্টর ক্রিয়াশীল হলে তাদের মোট প্রভাবটা কেমন হবে, সেটা। তাহলে, এই কথাটাকে আমরা একটু ঘুরিয়ে বলতে পারি, কোনো বস্তুর উপর একাধিক ভেক্টর আলাদা আলাদাভাবে ক্রিয়া করলে যে ঘটনা ঘটবে, শুধুমাত্র লব্ধি ভেক্টরটা ক্রিয়া করলেও একই ঘটনা ঘটবে।

এখানে, $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ আলাদাভাবে ক্রিয়া করা যে কথা (বস্তুটা O থেকে B তে যাবে), $\overrightarrow{OB}$ একাই ক্রিয়া করাও একই কথা (বস্তুটা O থেকে B তেই যাবে)। অর্থাৎ, $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ কে আমরা $\overrightarrow{OB}$ দিয়ে প্রতিস্থাপন করতে পারি। এটিই হলো লব্ধি বের করার তাৎপর্য।

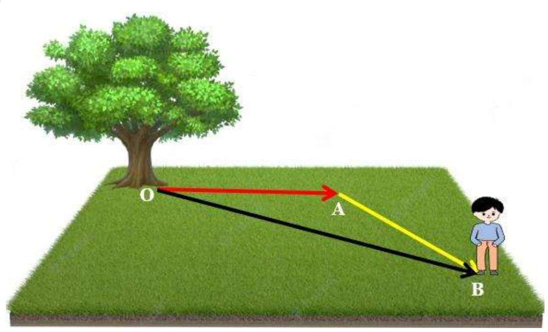


Fig 2.09

চলো একটু গভীরভাবে চিন্তা করা যাক!!

শাফিন যদি গাছের গোড়া থেকে A পর্যন্ত একবার যায়, এরপর আবার A থেকে B পর্যন্ত যায়, তাহলে তার মোট সরণ কত হবে? আমরা জানি, মোট সরণ হচ্ছে শেষবিন্দু আর আদিবিন্দুর পার্থক্য। তাহলে আদি অবস্থান ছিল O বিন্দু, শেষ অবস্থান B বিন্দু, তাহলে মোট সরণ ভেক্টরটি হবে O থেকে B বিন্দু পর্যন্ত একটা ভেক্টর, অর্থাৎ $\overrightarrow{OB}$। কারণ, কোন পথে সে B তে গেছে, সেটা এখানে বিবেচনা করতে হয় না। এখানে একটা বিশেষ ঘটনা ঘটেছে। শাফিন প্রথমে যে O থেকে A পর্যন্ত গিয়েছিল, সেটিও কিন্তু একটি সরণ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$। আবার পরবর্তীতে A থেকে B পর্যন্ত যাওয়ার ক্ষেত্রে, সেটিও একটি সরণ ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$। তাহলে আমরা এখানে $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ একসাথে দুটো সরণ ঘটলে মোট সরণ বের করে ফেলেছি। মোট সরণ হচ্ছে $\overrightarrow{OB}$। ভেক্টরের ক্ষেত্রে "মোট ভেক্টর" বা "ভেক্টরগুলোর যোগফল" কে বলা হয় ভেক্টরগুলোর লব্ধি। তাহলে আমরা $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ এর লব্ধি বের করে ফেলেছি। $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$।

এভাবেই দুটি ভেক্টরের যোগফল বা লব্ধি নির্ণয় করা যায়।

সতর্কতা!

কয়েকটি ভেক্টরের লব্ধি বলতে বোঝায় ভেক্টরগুলো একসাথে কাজ করলে তাদের সম্মিলিত ফলাফল কি হবে সেটি। আমাদেরকে খেয়াল রাখতে হবে, লব্ধি সবসময় নির্ণয় করা যায় সমজাতীয় ভেক্টরের ক্ষেত্রে। সমজাতীয় ভেক্টর বলতে বোঝায় একই প্রকারের ভেক্টর।
যেমন, আমরা দুটি বেগের লব্ধি হিসেবে আরেকটি বেগ নির্ণয় করতে পারি কয়েকটি বলের লব্ধি হিসেবে একটি বল নির্ণয় করতে পারি।
কিন্তু একটি বেগ ও একটি বলের লব্ধি বলতে আসলে কোনোকিছু বোঝায় না এদের একসাথে প্রভাব হিসেবে কোনো রাশি নির্ণয় করা যায় না তাই, সবসময় একই ধরনে ভেক্টর হলেই কেবলমাত্র লব্ধি নির্ণয় করা যাবে
লব্ধি নির্ণয়ের মোট তিনটি পূর্ব শর্ত আছে।

শর্তগুলো হলো:

(i) সমজাতীয় হতে হবে।
(ii) একই বস্তু বা বিন্দুর উপর ক্রিয়াশীল হতে হবে।
(iii) একই সময়ে ক্রিয়াশীল হতে হবে।

এখানে একটা বিষয় খেয়াল করার মত, সেটি হচ্ছে ত্রিভুজের বাহুগুলো বরাবর আমি যদি হাঁটতে থাকি, তাহলে O থেকে A, A থেকে B, B থেকে O পর্যন্ত যাওয়ার কথা। ভেক্টর বিবেচনা করলে, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BO}$ এই ভেক্টরগুলো পাওয়া যাওয়ার কথা সিরিয়ালি। কিন্তু, $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ এর লব্ধি হচ্ছে $\overrightarrow{OB}$। এখানে $\overrightarrow{OB}$ আর $\overrightarrow{BO}$ কিন্তু দুটো আলাদা ভেক্টর, একটা আরেকটার উল্টো। তার মানে, $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ এর লব্ধি পাওয়ার জন্য আমাদেরকে এই দুটো ভেক্টর দিয়ে একটা ত্রিভুজ বানাতে হবে। ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটাই ওদের লব্ধি, কিন্তু লব্ধির দিকটা হবে $\overrightarrow{OA}$ আর $\overrightarrow{AB}$ যে সিরিয়ালে ছিল, তার উল্টোদিকে। এই নিয়মটাই একটা সূত্র হিসেবে প্রতিষ্ঠিত। সূত্রটিকে বলা হয়, ভেক্টরের লব্ধির ত্রিভুজ সূত্র। সূত্রটার মূল কথা হলো এটাই যে, তিনটা ভেক্টরকে আমরা যদি একটা ত্রিভুজের তিনটা বাহু হিসেবে প্রকাশ করতে পারি, যাতে ভেক্টরগুলোর মান হয় ত্রিভুজের বাহুগুলোর মানের সমান, তাহলে একই সিরিয়ালে দুটো ভেক্টরের লব্ধি হবে তৃতীয় বাহু বরাবর যে ভেক্টরটা ধরেছি, সেটার সমান, তবে দিক হবে প্রথম দুটো যে সিরিয়ালে আছে, তার উল্টোদিকে।

ত্রিভুজ সূত্র: দুটি ভেক্টর কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একইক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।